



**UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE PUEBLA**

MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS

**MÉTODOS DE LA EVALUACIÓN DE LA
CONFIABILIDAD EN DUCTOS
TERRESTRES**

Trabajo de Investigación
que para obtener el Grado de

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

Presenta:

Héctor J. Toraya Lazo de la Vega

Puebla, Pue., México

Junio de 2000



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyla**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

A mis hermanos

A Nelly

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor el Dr. Oscar A. Flores Macías por su gran amistad y ayuda.

Al IMP, Delegación Zona Sur, por haberme otorgado la BECA y por su apoyo, en particular al Ing. Rogerio González Magaña, Gerente de Ingeniería, por su disposición.

A mi compañero Teófilo Salomón García por su colaboración.

Al personal de Planeación de la delegación, ayuda y apoyo en los trámites administrativos. A todos gracias.

ÍNDICE

<u>LISTA DE FIGURAS</u>	v
<u>LISTA DE TABLAS</u>	vi
<u>RESUMEN</u>	vii
<u>ABSTRACT</u>	viii
<u>1. INTRODUCCIÓN.</u>	1
<u>2. ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.</u>	4
<u>2.1. INTRODUCCIÓN.</u>	4
<u>2.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.</u>	4
<u>2.3. VARIABLE ALEATORIA.</u>	8
2.3.1. Discreta.	8
2.3.2. Continuas.	9
<u>2.4. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.</u>	9
2.4.1. Media Aritmética.	9
2.4.2. Mediana.	10
2.4.3. Moda.	10
<u>2.5. MEDIDAS DE DISPERSIÓN.</u>	10
2.5.1. Amplitud.	11
2.5.2. Desviación media.	11
2.5.3. Varianza y Desviación estándar.	12
2.5.4. Coeficiente de variación.	12
<u>2.6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA.</u>	13
<u>2.7. DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA.</u>	15
<u>2.8. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD Y DENSIDAD DE PROBABILIDAD MULTIVARIABLES.</u>	16
<u>2.9. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES DISCRETAS.</u>	17
2.9.1. Distribución de Bernoulli.	17
2.9.2. Distribución Binomial.	18
2.9.3. Distribución Geométrica.	18
2.9.4. Distribución Hipergeométrica.	19
2.9.5. Distribución de Poisson.	20
<u>2.10. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES CONTINUAS.</u>	20
2.10.1. Distribución Gamma.	21
2.10.2. Distribución Exponencial.	21
2.10.3. Distribución Normal.	22
2.10.4. Distribución Log-Normal.	24
2.10.5. Distribución Beta.	25
2.10.6. Variable aleatoria Gumbel (función extrema Tipo I [El max]).	25
2.10.7. Variable aleatoria Gumbel (función extrema [El min]).	26
2.10.8. Variables aleatorias con f.d.p. de Frechet.	27
2.10.9. Variables aleatorias con f.d.p. de Weibull.	28
2.10.10. Variables aleatorias con f.d.p. exponencial.	29

3. <u>ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD.</u>	31
3.1. <u>INTRODUCCIÓN.</u>	31
3.2. <u>EVALUACIÓN DE CONFIABILIDAD.</u>	33
3.3. <u>SIMULACIÓN Y MÉTODO DE MONTE CARLO.</u>	36
3.3.1. <u>Simulación de variables aleatorias.</u>	37
3.3.2. <u>Variables aleatorias uniformes.</u>	38
3.3.3. <u>Variable aleatoria normal (Fórmula de Box y Muller).</u>	39
3.3.4. <u>Variable aleatoria Lognormal.</u>	39
3.3.5. <u>Simulación de variables aleatorias con diferentes f.d.p.</u>	40
3.3.6. <u>Cálculo de la probabilidad de falla por Monte Carlo.</u>	41
3.4. <u>MÉTODOS FORM Y SORM.</u>	42
3.4.1. <u>Algoritmos de optimización.</u>	44
3.4.2. <u>Transformación de Rosenblatt.</u>	46
3.4.3. <u>Transformación de Nataf.</u>	48
3.4.4. <u>Método de segundo orden, SORM.</u>	52
3.4.5. <u>EJEMPLO aplicando FORM para variables aleatorias normales.</u>	54
3.4.6. <u>EJEMPLO aplicando FORM para variables aleatorias log-normales.</u>	61
3.5. <u>MÉTODO DE SUPERFICIE DE RESPUESTA CUADRÁTICA.</u>	67
3.5.1. <u>EJEMPLO aplicando Superficie de Respuesta Cuadrática.</u>	71
4. <u>MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESFUERZO PARA TUBERÍAS ENTERRADAS.</u>	79
4.1. <u>INTRODUCCIÓN.</u>	79
4.2. <u>CARACTERÍSTICAS ÚNICAS.</u>	82
4.2.1. <u>Expansión y Flexibilidad.</u>	83
4.2.2. <u>Tramos Restringidos.</u>	84
4.3. <u>LASTRADO EN TUBERÍAS.</u>	85
4.4. <u>REVISIÓN POR FLOTABILIDAD.</u>	86
4.5. <u>LOCALIZACIÓN DE ANCLAS.</u>	88
4.6. <u>INTERPRETACIÓN Y ALCANCES DE CÓDIGOS.</u>	89
4.6.1. <u>Código ASME/ANSI B31.3.</u>	89
4.6.2. <u>Código ASME/ANSI B31.4.</u>	90
4.6.3. <u>Código ASME/ANSI B31.8.</u>	92
4.7. <u>ESFUERZOS PERMISIBLES Y FACTORES DE DISEÑO.</u>	94
4.7.1. <u>Cálculo de esfuerzos actuantes para los códigos B31.3, B31.4 y B31.8.</u>	94
4.7.2. <u>Cálculo de esfuerzos permisibles para los códigos B31.3, B31.4 y B31.8.</u>	96
4.8. <u>REVISIÓN DE ESPESORES.</u>	106
4.8.1. <u>Cálculo de espesores para el código ANSI B31.3</u>	106
4.8.2. <u>Cálculo de espesores para el código ANSI B31.4.</u>	108
4.8.3. <u>Cálculo de espesores para el código ANSI B31.8.</u>	109
5. <u>ANÁLISIS DE FLEXIBILIDAD PARA UNA TUBERÍA ENTERRADA.</u>	110
5.1. <u>DESCRIPCIÓN DEL EJEMPLO.</u>	110
5.2. <u>CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DEL SUELO.</u>	112
5.3. <u>DETERMINACIÓN DE LA ZONA DE LOCALIZACIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS.</u>	117
5.4. <u>CÁLCULO DE ESFUERZOS.</u>	120

<u>6. APLICACIÓN DE CONFIABILIDAD EN ANÁLISIS DE ESFUERZOS.</u>	122
6.1. <u>INTRODUCCIÓN.</u>	122
6.2. <u>DESCRIPCIÓN DEL EJEMPLO.</u>	123
6.3. <u>INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS</u>	140
<u>7. CONCLUSIONES.</u>	142
<u>REFERENCIAS</u>	145
<u>Apéndice A</u>	147
A.1. <u>DISCRETIZACIÓN DEL MODELO.</u>	147
A.2. <u>DEFINIENDO LOS PUNTOS DE SUELO EN AUTOPIPE.</u>	153
A.3. <u>PROPIEDADES CONTENIDAS EN AUTOPIPE.</u>	156
A.4. <u>CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DE LAS RESTRICCIONES DEL SUELO.</u>	159
A.4.1. <u>Propiedades del suelo transversal horizontal.</u>	163
A.4.2. <u>Propiedades longitudinales del suelo.</u>	167
A.4.3. <u>Propiedades verticales del suelo.</u>	171

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.2.1 Función de distribución de una variable aleatoria discreta</u>	14
<u>Fig. 2.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua</u>	14
<u>Fig. 2.3. Distribución y Función de densidad de Probabilidad</u>	15
<u>Fig. 2.4. Función de densidad para variables discretas</u>	17
<u>Fig. 2.5. Función de densidad gamma</u>	21
<u>Fig. 2.6. Función de densidad gamma.</u>	22
<u>Fig. 2.7. Función de densidad Normal</u>	23
<u>Fig. 2.8. Función de densidad Log-Normal</u>	25
<u>Fig. 3.1 Espacio de variables estándar. Cálculo de β.</u>	44
<u>Fig.3.2 Método SRQ [OFM TESIS]</u>	69
<u>Fig. 4.1(a) Tubería superficial</u>	84
<u>Fig. 4.1(b) Tubería enterrada</u>	84
<u>Fig. 4.2 Expansión libre del tubo</u>	85
<u>Fig.4.3 Alcances de Códigos</u>	93
<u>Fig. 4.4 Momentos en un codo</u>	95
<u>Fig. 5.1. Esquema de la línea enterrada</u>	110
<u>Fig. 5.2 Longitud virtual del ancla y espaciamiento máximo</u>	119
<u>Fig. 5.3 Esquema de la línea enterrada tomando en cuenta la longitud virtual del ancla</u>	119
<u>Fig. 6.1 Tubería enterrada</u>	123

LISTA DE TABLAS

<u>Tabla 5.1 Propiedades del suelo con la tubería orientada horizontalmente</u>	115
<u>Tabla 5.2 Propiedades del suelo con la tubería orientada verticalmente</u>	116
<u>Tabla 5.3 Resultados de las reacciones (fuerzas y momentos)</u>	120
<u>Tabla 5.4 Resultados de los desplazamientos (traslacional y rotacional)</u>	121
<u>Tabla 5.5 Resultados de momentos y esfuerzos</u>	121
<u>Tabla 6.1 Parámetros estadísticos</u>	126
<u>Tabla 6.2 Cálculo de los valores de G_x</u>	126
<u>Tabla 6.3 Determinación si las variables son de resistencia o sollicitación p/nodo A04F</u>	127
<u>Tabla 6.4 Determinación si las variables son de resistencia o sollicitación p/nodo A05N</u>	127
<u>Tabla 6.5 Determinación si las variables son de resistencia o sollicitación p/nodo A05F</u>	127
<u>Tabla 6.6 Determinación si las variables son de resistencia o sollicitación p/nodo A09</u>	128
<u>Tabla 6.7 Realizaciones de las variables de base</u>	129
<u>Tabla 6.8 Realizaciones de la función de estado límite</u>	130
<u>Tabla 6.9 Coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada</u>	131
<u>Tabla 6.10 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A04F</u>	132
<u>Tabla 6.11 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05N</u>	132
<u>Tabla 6.12 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05F</u>	133
<u>Tabla 6.13 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A09</u>	133
<u>Tabla 6.14 Parámetros estadísticos</u>	134
<u>Tabla 6.15 Realizaciones de las variables de base</u>	135
<u>Tabla 6.16 Realizaciones de la función de estado límite</u>	136
<u>Tabla 6.17 Coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada</u>	137
<u>Tabla 6.18 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A04F</u>	138
<u>Tabla 6.19 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05N</u>	138
<u>Tabla 6.20 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05F</u>	139
<u>Tabla 6.21 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A09</u>	139

RESUMEN

El presente trabajo muestra unas aplicaciones de los métodos de confiabilidad en el análisis de flexibilidad de tuberías de conducción de hidrocarburos. Para ello presentamos algunos conceptos básicos de probabilidad, estadística y confiabilidad. Se presenta además, algunos de los métodos de Confiabilidad entre los cuales están: método de simulación de Monte Carlo, los métodos aproximados FORM-SORM. Asimismo presentamos el método de Superficie de Respuesta Cuadrática el cual es el más adecuado para los fines del trabajo.

Por otro lado, mostramos una breve descripción de los métodos de análisis de esfuerzos para tuberías enterradas para evaluar y diseñar tuberías. Para evaluarlas existen prácticas comunes, que se reflejan en los códigos y las normas de diseño especializadas de utilización internacional, basadas en la mecánica de materiales y en los métodos de análisis estructural matricial o en el método de elementos finitos. Se muestra también una breve descripción de los diferentes tipos de análisis y de las normas técnicas que se utilizan en la especialidad de diseño estructural de tuberías de conducción.

Un ejemplo de un análisis de flexibilidad para una tubería enterrada se da para sensibilizar respecto a lo complicado que puede ser una análisis debido al gran número de variables que intervienen y a lo complejo del sistema. De la misma manera se realiza la aplicación de los métodos de confiabilidad aplicado al mismo análisis de la tubería enterrada, haciendo énfasis en el método de la superficie de respuesta cuadrática, que es el que permite realizar las evaluaciones de confiabilidad en los casos que nos ocupan.

Palabras clave: Confiabilidad, Monte Carlo, Superficie de Respuesta, FORM, Flexibilidad de ductos, Análisis de esfuerzos.

ABSTRACT

Some applications of reliability methods in stress analysis of pipelines are shown. Basic concepts of probability, statistics and reliability are described. Some of the reliability methods are also presented: Monte Carlo Simulation Method, Approach Method FORM-SORM. The Quadratic Response Surface Method is given being the best choice to reach the goals of this work.

A brief description of buried pipelines stress analysis methods is given for designing and analyzing pipelines using international standards and codes which are based on Mechanical of Materials or Finite Element Method. Also a description of different kinds of analysis methods and codes used for designing conduction pipelines is shown.

An example of flexibility analysis for a buried pipeline is given to show how complicated an analysis can be due to the great number of variables and to the complexity of the system. Reliability methods are applied to the same pipeline analysis, using the Quadratic Response Surface Method to evaluate the cases we are working with.

Key Words: Reliability, Monte Carlo Method, Response surface approach, FORM, Stress Analysis

1. INTRODUCCIÓN.

En los procesos de la industria petrolera podemos distinguir tres etapas fundamentales: 1) la producción 2) la distribución (o venta) y 3) el procesamiento o refinación. Algunas etapas intermedias son la separación de gas, aceite y agua, por ejemplo. Desde luego, el proceso no es tan simplista. Todas las etapas están conectadas por tuberías que llevan los diferentes productos, del pozo a los lugares de destino. Algunas llevan gas aceite y demás componentes, otras llevan sólo aceite, otras sólo gas, algunas otras llevan gasolinas y diesel. Existen tuberías que pueden conducir diferentes tipos de productos a diferentes tiempos.

Las tuberías o líneas de conducción o simplemente ductos, son las uniones entre los diferentes sistemas, ya sea al interior de una planta o la unión entre diferentes plantas o también el medio más seguro de transportar los productos finales a los diferentes centros de distribución, para las industrias o para el consumo. Llamados oleoductos, gasoductos, oleogasoductos, gasolinoductos, amonioductos, en fin poliductos, cuando llevan diferentes productos. Estos son las venas de distribución de los productos de la industria petrolera en México y en el mundo.

Como son estructuras vitales y de mucho riesgo por una posible falla, los niveles de seguridad que se manejan son muy altos. Sin embargo, aún así existen accidentes. Dentro de las variables que intervienen en el diseño muchas tienen un carácter evidentemente aleatorio. Tomar en cuenta su parte incierta en el análisis es uno de los objetivos del análisis de

confiabilidad. Asimismo, estos métodos permiten la evaluación de riesgos de manera más rigurosa que otros métodos. Ellos evalúan la probabilidad de falla y además, nos dan información referente a la importancia relativa de las variables que intervienen en el modelo mecánico.

El objetivo central del presente trabajo es mostrar algunas aplicaciones posibles de los métodos de confiabilidad en los análisis de flexibilidad de tuberías de conducción de hidrocarburos. Para ello presentamos en el segundo capítulo, algunos conceptos básicos de probabilidad, estadística y confiabilidad para introducir el vocabulario y algunos conceptos elementales.

En el capítulo tres se realiza una somera presentación de algunos de los métodos de Confiabilidad. Presentamos el método de simulación de Monte Carlo, pero también presentamos algunos métodos aproximados de gran auge en el mundo en nuestros días, este es el método FORM-SORM. Asimismo presentamos un método que nos permite realizar los análisis para los casos donde no conocemos la superficie de estado límite de manera explícita, función de variables aleatorias de base, este es el método de Superficie de Respuesta Cuadrática

Los métodos de análisis de esfuerzos para tuberías enterradas se presentan en el capítulo cuatro. Para evaluar y diseñar tuberías podemos considerar las líneas de conducción como vigas tridimensionales sujetas a diferentes tipos de solicitaciones. Para evaluarlas existen prácticas comunes de utilización internacional, basadas en la mecánica de materiales y en los métodos de análisis estructural matricial o en el método de elementos finitos. El capítulo presenta una breve descripción de los diferentes tipos de análisis y de las normas técnicas que se utilizan en la especialidad de diseño mecánico de tuberías de conducción.

Se realizó en el capítulo cinco un análisis de flexibilidad para una tubería enterrada con el fin de mostrar la manera de aplicar los métodos de análisis y para sensibilizarnos respecto a lo complicado que puede ser un análisis debido al gran número de variables que intervienen y a lo complejo del sistema.

Para mostrar los potenciales de los métodos de confiabilidad en el capítulo seis se realizó la aplicación de confiabilidad en análisis de esfuerzos, es decir, aplicado al mismo análisis de la tubería enterrada del capítulo anterior, haciendo énfasis en el método de la

superficie de respuesta cuadrática, que es el que permite realizar las evaluaciones de confiabilidad en los casos que nos ocupan.

Por último en el séptimo capítulo se dan las conclusiones y las posible perspectivas de desarrollo en la misma línea de trabajo.

2. ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA¹.

2.1. INTRODUCCIÓN.

El objetivo central de este capítulo es la presentación de algunos conceptos básicos de probabilidad, estadística y confiabilidad, pero sobre todo mostrar algunas aplicaciones relativamente prácticas dentro de lo que es la Ingeniería Civil, en especial en el área de estructuras.

Con lo anterior, esperamos dar a los lectores elementos que les permitan familiarizarse con la terminología, las ideas fundamentales, su interpretación en ingeniería y comprender (¡ o conocer !) algunas aplicaciones prácticas de la teoría de probabilidades, la estadística y la confiabilidad.

2.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.

En este capítulo nos dedicaremos a revisar someramente dos conceptos el de *probabilidad* y el de *confiabilidad*. Esto nos permitirá tener una visión general de los objetivos y de los alcances que esperamos tener.

¹ Este capítulo se tomó de las referencias [INFANTE], [FREUD], [MEDENHALL] y [OFM TESIS]

Concepto de Probabilidad

Aunque los conceptos relacionados con el “*azar*” son tan viejos como la humanidad misma y aunque el juego de dados ha sido popular desde épocas viejas, se acepta generalmente que la teoría matemática de la probabilidad fue iniciada por los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665). Ellos lograron obtener probabilidades “exactas” para algunos problemas de ciertos juegos de dados.

Para combinaciones de dados, sin embargo, probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de dados ya habían sido calculadas por Cardano (1501-1576) y por Galileo (1564-1642).

Actualmente la teoría de probabilidades es una potente herramienta de aplicación a diversos campos de estudio, para la mayoría de las áreas en ingeniería, ciencias, administración y algunas otras. Además, podemos encontrar aplicaciones teóricas y prácticas en campos como la medicina, meteorología, mercadotecnia, ingeniería sísmica, sociología, etc.

Existen diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad. Pero, además de las aplicaciones formales de la teoría de probabilidades, este concepto de probabilidad aparece en nuestra vida cotidiana y en nuestras acciones de manera intuitiva. Por ejemplo: “*es probable que llueva mañana*” o “*es muy probable que el autobús llegue tarde*”.

En estas frases aparece el concepto de probabilidad, o el de **verosimilitud**, de la ocurrencia de algún evento específico. A pesar de eso, no existe una definición única, aceptada por todos los científicos y filósofos que estudian el tema, para la interpretación del concepto de probabilidad. Daremos aquí tres interpretaciones que en determinados momentos pueden ser de utilidad.

La frecuentista, en donde la probabilidad de obtener algún resultado específico de algún suceso se interpreta como la frecuencia relativa con la que se obtendrá dicho suceso si se repite el proceso un gran número de veces en condiciones similares. Por ejemplo, para una moneda equilibrada se afirma que si se lanza un gran número de veces el número de águilas o de soles es aproximadamente la mitad, es decir un medio. Dicho de otra manera, la probabilidad de obtener sol (o águila) es de $\frac{1}{2}$.

Esta interpretación tiene algunos problemas, como que es un gran número de veces. Además, si las condiciones fuesen exactamente las mismas, ¿no sería lógico obtener siempre águila o siempre sol?

La clásica, en la cual la probabilidad está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles. Por ejemplo, para una moneda, existen dos posibilidades: águila o sol. Si suponemos que la ocurrencia de estos resultados es igualmente verosímil (igualmente posible), entonces deberán tener la misma probabilidad de ocurrencia. Como la **suma de probabilidades de un evento debe ser siempre igual a 1**, la probabilidad de cada una de las caras debe ser igual a 0.5 o $\frac{1}{2}$. Si existen n resultados igualmente verosímiles, entonces la probabilidad de cada uno será $1/n$.

Esta definición incluye algunos problemas también. No es aplicable a todos los tipos de problemas.

- El concepto de verosimilitud se basa en esencia en el concepto de probabilidad, que es el que tratamos de definir.
- No se puede aplicar a algunos casos, como el de definir la probabilidad de que alguien se case o no, que hoy llueva o no, etc.

La subjetiva, que es la probabilidad que una persona da o asigna a alguno de los posibles resultados de un proceso. Ésta representa el propio juicio del individuo sobre la verosimilitud de un cierto resultado. Se basa en opiniones y éstas en la información que la persona tiene acerca del proceso y de su ocurrencia. Dos personas pueden tener información diferente y asignar probabilidades diferentes.

Esta definición también presenta algunos problemas:

- Es requisito que los juicios de una persona sobre las verosimilitudes relativas a un número infinito de realizaciones de un suceso sean completamente consistentes y libres de contradicción, lo cual parece humanamente imposible.
- La interpretación subjetiva no proporciona bases para que dos científicos que trabajen en un mismo problema obtengan una evaluación conjunta en un área específica de interés común.

Para una definición consistente de la probabilidad, la interpretación puede estar parcialmente basada en la definición frecuentista, así como también puede estar parcialmente basada en la definición clásica, si toman en cuenta el número total de resultados posibles. Pero la interpretación final será responsabilidad del individuo.

La teoría de probabilidades y la estadística son herramientas muy importantes en la toma de decisiones. La visión probabilista del análisis estructural, puede considerarse como una extensión de la visión determinista. El análisis estructural determinista, asigna una probabilidad de 1.0, es decir sus funciones de densidad de probabilidades tienen masas de probabilidad concentradas en 1. En el caso probabilista, la respuesta a la pregunta, ¿cual es la probabilidad de que mi estructura se comporte de un cierta manera? estará entre 0 y 1.

Cual es la probabilidad de que una estructura se comporte de una manera esperada, si las **propiedades de los materiales constitutivos**, la **geometría** y las **solicitaciones** a las que estará expuesta son **aleatorias o incompletamente conocidas**. Al responder a este tipo de cuestiones nos ayuda la visión probabilista del análisis estructural (o del diseño), [OFM TESIS]

Concepto de Confiabilidad

Dentro de las diferentes aplicaciones que podemos hacer de los conceptos de probabilidades en Ingeniería Civil y en especial en el área de estructuras, existe uno de interés creciente en los años recientes y de gran utilidad para los proyectistas y para los diseñadores. Éste es el de **Confiabilidad estructural**.

Las construcciones en Ingeniería Civil son concebidas y construidas con la idea de satisfacer diferentes necesidades, más o menos explícitas. El soportar cargas o resistir esfuerzos es algo inherente pero no es el objetivo primordial. El diseño se efectúa considerando el conocimiento de las necesidades, de las acciones que actuarán, de las propiedades de los materiales y utilizando métodos de análisis y diseño más o menos sofisticados y adaptados a cada circunstancia, lo que permite encontrar el "*mejor diseño*".

La probabilidad de que una estructura, un sistema estructural o un elemento estructural satisfaga las condiciones límites y de servicio para las que fue creada se define como **confiabilidad o probabilidad de éxito**.

Al complemento de la confiabilidad se le conoce como probabilidad de falla ($P_f = 1 - P_r$), donde P_f es la **probabilidad de falla** y P_r es la confiabilidad, dado que la suma de probabilidades debe ser uno.

No debemos entender falla siempre como “**ruina**”. Falla debemos entender como la no satisfacción de las necesidades, de las condiciones para las que fue creada (tanto de resistencia como de servicio). Aunque algunas veces si puede ser equivalente. Por ejemplo, la falla de algún elemento estructural en una plataforma no significa obligatoriamente la ruina de la estructura. Sin embargo, si la falla de ese elemento lleva al colapso a la estructura, entonces si será equivalente a ruina. Algunas veces, llaman a la probabilidad de falla únicamente **probabilidad de excedencia**.

La evaluación de un buen nivel de confiabilidad será relativa a la naturaleza de las obras, a las acciones que deben soportar, a la vida útil deseada o supuesta, al costo, al problema que implique su falla tanto económico, político, social, ecológico

2.3. VARIABLE ALEATORIA.

Es una función de valores reales definida en un espacio muestral. Una variable aleatoria transforma los eventos de un espacio muestral en eventos numéricos. De manera más práctica, es una variable de nuestra estructura que no tiene un valor determinista, sólo está definido por sus parámetros estadísticos y su función de distribución de probabilidad.

2.3.1. Discreta.

Una variable aleatoria X se dice que es discreta si solamente puede tomar un número finito o infinito contable² de valores distintos en su dominio. En realidad, las variables discretas representan en la mayoría de los casos, cálculos asociados a fenómenos reales.

Por ejemplo. El número de tuberías defectuosas en un envío es de 85 (no se puede esperar 85.6 tuberías defectuosas).

² Un conjunto de elementos es infinito contable si se puede establecer una correspondencia biunívoca uno a uno en el conjunto de los enteros positivos.

2.3.2. Continuas.

Una variable aleatoria X se dice que es continua si puede tomar un número infinito de valores distintos en un intervalo $[a, b]$ (pudiendo ser de $[-\infty, +\infty]$).

Por ejemplo. La vida útil de una estructura cualquiera (puede ser de 35.3 años)

2.4. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.

A menudo es necesario resumir los datos por medio de un número único, que describe a su modo el conjunto entero. El tipo de número que seleccionamos depende exactamente de la característica particular que queremos describir. Tal vez en un estudio nos interese el valor que sólo el 25% de los datos excede; en otro, el valor que excede el 10% inferior de los datos; en otro más, un valor que describa en cierta forma el centro o punto medio de los datos. Las medidas estadísticas que describen tales características se conocen como **medidas de localización o de tendencia**. Entre éstas las que describen el centro o punto medio de los datos se llaman **medidas de tendencia central**.

Las medidas de tendencia central que estudiaremos son tres: Media aritmética, Mediana y Moda.

2.4.1. Media Aritmética.

La medida más popular de la tendencia central es lo que el lego llama un “promedio” y lo que los estadistas llaman **media aritmética** o solamente una **media**. Ésta se define como sigue:

La media aritmética de n observaciones de la variable X se denotará por el símbolo $\bar{x}$, y se define como la suma de ellas dividida por n . Simbólicamente:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

2.4.2. Mediana.

Para evitar la posibilidad de dejarse llevar por valores muy bajos o muy altos, en ocasiones describimos el “punto medio” o “centro” de un conjunto de datos con medidas estadísticas diferentes de la media. Una de estas, la **Mediana (M_e)** de n valores, requiere se acomoden los datos de acuerdo con su tamaño y se define como sigue:

La Mediana (M_e) de un conjunto de n números, ordenados de menor a mayor, es el número central en el arreglo. Si n es un número non, sólo hay un valor central. Si n es un número par, hay dos valores centrales, y la mediana debe tomarse como la media aritmética de estos dos valores.

2.4.3. Moda.

Otra medida que en ocasiones se usa para describir el “punto medio” de un conjunto de datos es la moda. Que se define simplemente como el valor que ocurre con la mayor frecuencia y más de una vez. Sus dos ventajas principales son que no requiere de cálculos, sólo de conteo y que se puede determinar al igual para datos cualitativos que para datos nominales.

2.5. MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

En la sección anterior hemos discutido tres medidas descriptivas del “centro” de una distribución de frecuencias. Sin embargo, estas medidas no son suficientes para caracterizar la distribución, puesto que otro aspecto que debe tomarse en cuenta es la variabilidad de las observaciones.

Con el propósito de medir la dispersión, se discutirán en este apartado cinco medidas: Amplitud, Desviación Media, Varianza, Desviación Estándar y Coeficiente de Variación.

2.5.1. Amplitud.

La medida de dispersión más simple recibe el nombre de amplitud, es muy poco usada, puesto que su única ventaja es la sencillez con que se calcula. En su cálculo sólo intervienen dos elementos del conjunto. Al aumentar el número de observaciones, puede esperarse que aumente la variabilidad. Puesto que la amplitud no tiene en cuenta el tamaño del conjunto, no es una medida adecuada para comparar la variabilidad de dos grupos de observaciones, a menos que éstos sean del mismo tamaño.

La Amplitud (A) de un conjunto de datos es la diferencia entre las observaciones de mayor y menor valor numérico en el mismo.

2.5.2. Desviación media.

Para obtener una medida de dispersión basada en estas desviaciones, que no sea siempre cero, es necesario eliminar el signo de la misma. Una forma de hacerlo es tomar el valor absoluto de cada desviación. Esto da origen a la medida de dispersión conocida como Desviación Media.

La desviación media ($D.M.$) de un grupo de observaciones se define como la suma de los valores absolutos de sus desviaciones con respecto a su media aritmética, dividida por el número de ellas. Es decir:

$$D.M. = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (2.2)$$

La desviación media es una medida de dispersión que es útil para propósitos meramente descriptivos. Es poco usada por las siguientes razones:

- Cuando el tamaño del conjunto es grande, su cálculo puede ser laborioso.
- La función valor absoluto que aparece en su ecuación puede presentar algunos problemas.

2.5.3. Varianza y Desviación estándar.

Una forma alternativa de eliminar el signo en las desviaciones con respecto a la media es elevarlas al cuadrado. De esta forma generamos la medida de dispersión que recibe el nombre de Varianza.

La varianza (s^2) de un conjunto de datos se define como la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media, dividida por el número de observaciones menos una.

Su ecuación es:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.3)$$

Puesto que la varianza es una medida que tiene como unidades el cuadrado de las unidades originales de medición, se acostumbra definir también a su raíz cuadrada, para tener una medida de dispersión en las unidades originales.

La desviación estándar (s) se define como la raíz cuadrada de la varianza. Es decir:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

2.5.4. Coeficiente de variación.

Las medidas de dispersión anteriores son todas medidas de variación absoluta. Una medida de la dispersión relativa de los datos, que toma en cuenta su magnitud, está dada por el coeficiente de variación.

El coeficiente de variación (C.V.) es una medida de la dispersión relativa de un conjunto de datos, que se obtiene dividiendo la desviación estándar del conjunto entre su media aritmética.

Simbólicamente, para la característica X tenemos:

$$C.V.(X) = \frac{s_x}{x} \quad (2.5)$$

2.6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

Dado que ciertos tipos de variables aleatorias ocurren con mucha frecuencia en la práctica, es útil disponer de las probabilidades para cada valor de una variable aleatoria. A este conjunto de probabilidades se le llama Distribución de Probabilidad.

Se encuentra que muchos experimentos muestran características similares y generan variables aleatorias con la misma Distribución de Probabilidad. Como consecuencia, el conocimiento de distribuciones de probabilidad de ciertos tipos usuales de experimentos eliminará la necesidad de resolver el mismo problema repetidas veces.

La probabilidad de que X tome el valor x, $P[X=x]$ se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales de S que tiene asignado el valor x. Algunas veces se denotará $P[X=x]$ por $p(x)$.

Sea X cualquier variable aleatoria (discreta o continua), se define su Función de Distribución como:

$$f_x(x) = P[X \leq x] \quad \text{para } [-\infty, +\infty]$$

Las Funciones de Distribución de variable aleatorias discretas siempre son funciones escalonadas, puesto que la función de distribución acumulada solamente se incrementa en un conjunto enumerable de puntos.

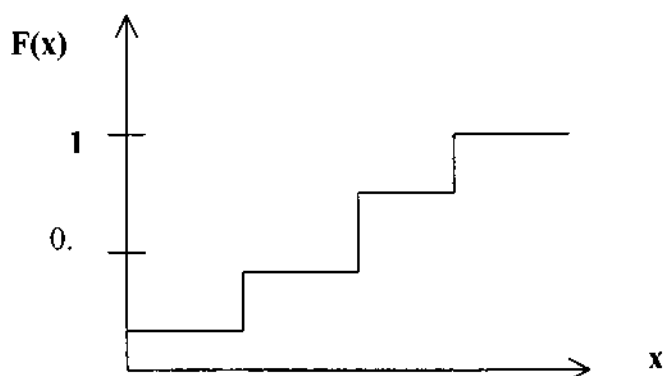


Fig.2.1 Función de distribución de una variable aleatoria discreta

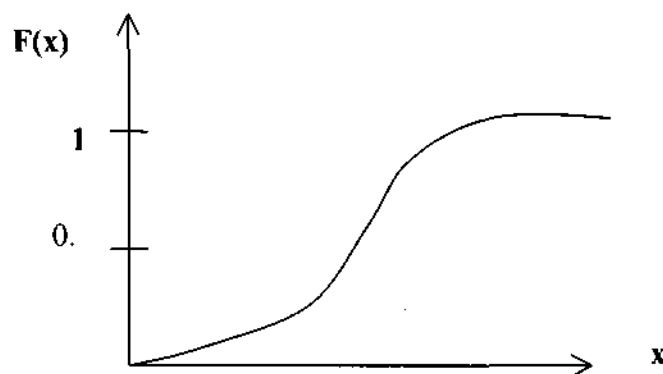


Fig. 2.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

Para cualquier Función de Distribución $F_x(x)$, se cumple que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$
- $F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$ si $x_2 \geq x_1$

2.7. DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

Sea $F_X(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria continua, entonces:

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = F'_x(x) \quad (2.6)$$

es la Función de Densidad de Probabilidad, siempre y cuando exista la derivada.

Entonces, la Función de Distribución se escribe también como:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx = P[X \leq x] \quad (2.7)$$

La relación gráfica entre la Distribución de Probabilidad $F_X(x)$ y la Densidad de Probabilidad $f_X(x)$ es:

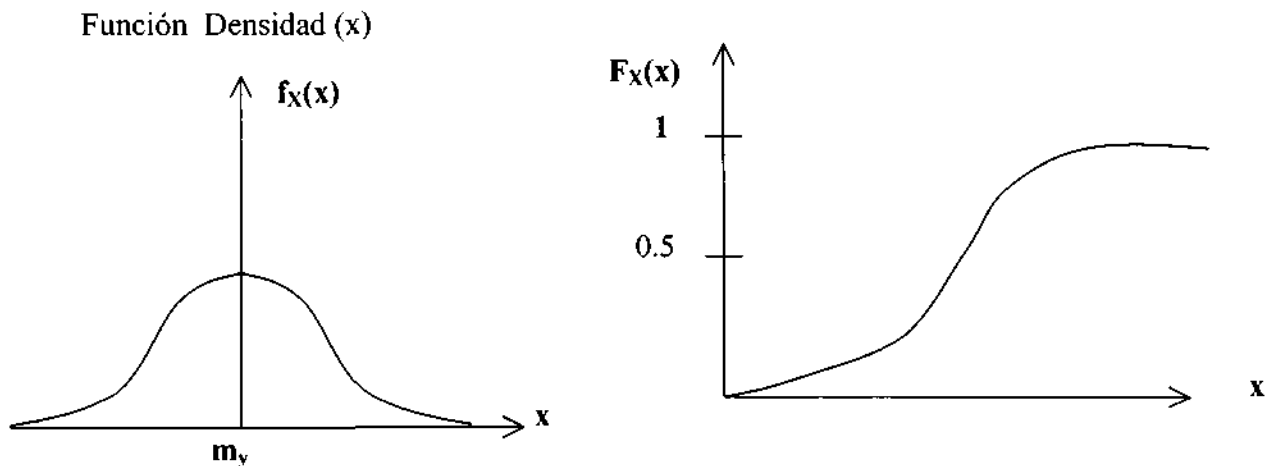


Fig. 2.3. Distribución y Función de densidad de Probabilidad

La Función de Densidad $f_X(x)$ es un modelo teórico para la distribución de frecuencias de una población de mediciones. Esto es, que si aumento los eventos probables y genero un histograma de frecuencias, cuando los eventos tiendan a infinito, la distribución de frecuencias corresponderá a la “forma” de la distribución de densidad de probabilidades.

Para la Densidad de Probabilidad, se deberán cumplir dos condiciones:

$$a.- f_x(x) > 0$$

$$b.- \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$$

de aquí se obtienen otras relaciones útiles, como:

$$P[a \leq x \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a] = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(x) dx \quad (2.8)$$

que representa, la probabilidad de que la variable X, se encuentre entre los valores de $x_1 = a$ y $x_2 = b$.

2.8. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD Y DENSIDAD DE PROBABILIDAD MULTIVARIABLES.

En algunos casos es posible definir diversas variables aleatorias en el mismo espacio muestral, en cuyo caso la interrelación entre las variables aleatorias es tan importante como la variación individual.

Sea el caso de involucrar la aleatoriedad de las solicitaciones (cargas) y las resistencias (deformabilidad). Para este caso, se puede definir un espacio muestral conjunto, en donde se obtenga la probabilidad de obtener para una cierta carga, cierta solicitación (o un rango de ellas).

Para el caso de n variables aleatorias, se define la Distribución de Probabilidad como:

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n] \quad (2.9)$$

y la Densidad de Probabilidad como:

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.10)$$

donde, el dominio de la integral, es la Función de Densidad Conjunta.

2.9. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES DISCRETAS.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una Densidad de Probabilidad discreta, si X , sólo puede tomar un número finito n de valores distintos, tomando el valor de:

$$f_x(x) = P[X = x] \quad (2.11)$$

Obviamente, para cualquier punto x , que no es uno de los valores posibles de X , $f_x(x)=0$.

La forma de este tipo de Densidades de Probabilidad es:

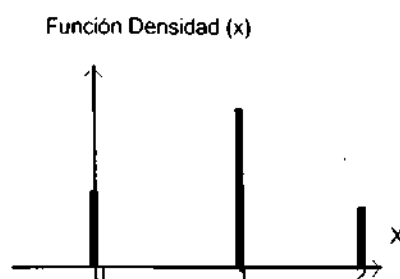


Fig. 2.4. Función de densidad para variables discretas

2.9.1. Distribución de Bernoulli.

Esta función de distribución de probabilidad representa el modelo más sencillo. Constituye la base de casi todos los modelos existentes, y se aplica a variables que solamente pueden tomar dos valores (generalmente 0 y 1), independientes entre si.

Su forma es:

$$P_x(x) = \begin{cases} p & \text{para } x=1 \text{ "Éxito"} \\ 1-p & \text{para } x=0 \text{ "Falla"} \end{cases}$$

$$q = 1-p$$

o bien,

$$f_x(x) = P(X = x) = p^x q^{(1-x)} \quad (2.12)$$

donde $x=0$ ó $x=1$

$$0 \leq p \leq 1$$

2.9.2. Distribución Binomial.

Algunos experimentos consisten en la observación de una serie de pruebas idénticas e independientes, las cuales pueden generar uno de dos resultados (éxito o fracaso). Este tipo de experimento se llama binomial.

Un experimento binomial se identifica por:

- El experimento consta de n pruebas idénticas.
- Cada prueba tiene dos resultados posibles (éxito o fracaso).
- La probabilidad de éxito en una sola prueba es igual a p , y permanece constante de prueba en prueba. La probabilidad de un fracaso es igual a $q=1-p$.
- Las pruebas son independientes.
- La variable bajo estudio es X , el número de éxitos observados en n pruebas.

Su función de distribución de probabilidades es:

$$f_x(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

$$0 \leq p \leq 1$$

2.9.3. Distribución Geométrica.

La variable aleatoria que tiene distribución geométrica, se define para un experimento que es muy similar al experimento binomial. También se refiere a pruebas idénticas e independientes y cada una también puede tener dos resultados (éxito o fracaso). La diferencia

estriba en que la variable aleatoria X , representa el número de prueba en el cual se presenta el primer éxito. Por consiguiente, el experimento podría terminar en la primera prueba al obtener éxito.

Su forma es:

$$f_x(x) = P(X = x) = p^x q^{(1-x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

$$0 \leq p \leq 1$$

2.9.4. Distribución Hipergeométrica.

Este tipo de distribución se utiliza cuando el tamaño de la muestra (n) es relativamente grande con respecto al tamaño de la población (se afecta la probabilidad debido a que no hay reemplazo).

Su forma es:

$$f_x(x) = P(X = x) = \frac{\binom{A}{x} \binom{B}{n-x}}{\binom{N}{n}}; \quad x = 0, 1, \dots, n; \quad n \leq A \text{ y } n \leq B \quad (2.15)$$

Donde $N = A + B$ es el número de elementos en la población, A y B el número de defectuosos y aceptables en la población respectivamente, n el tamaño de muestra y x es el número de defectuosos en la muestra.

2.9.5. Distribución de Poisson.

Es una distribución de probabilidad discreta sobre un espacio infinito enumerablemente. Es común encontrar el caso, donde la probabilidad de éxito es muy pequeña (p) pero el tamaño de la muestra es muy grande (n). Entonces resulta difícil evaluar los factoriales en una distribución binomial. Para este caso, se aplica la distribución de Poisson.

La distribución de Poisson resulta entonces de evaluar el límite de la distribución binomial conforme p tiende a cero y n a infinito, con el producto $np = cte$.

Su forma es:

$$f_x(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Donde $e = 2.71828$ es la base de los logaritmos naturales y $\lambda = np$

Esta distribución corresponde, a una secuencia infinita de intentos de Bernoulli con probabilidad muy baja de éxito, se puede asociar a experimentos “continuos”.

2.10. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES CONTINUAS.

Si una variable aleatoria X tiene una distribución continua, entonces $P[X=x]=0$ para todo valor individual x . Esto implica, que la forma de la curva de Densidad de Probabilidad $f_X(x)$ no será única, pudiendo apreciarse (dependiendo del fenómeno) una mayor naturalidad de comportamiento asociado a cada curva. No debe de olvidarse que la integral bajo la curva $f_X(x)$ es uno.

A continuación se presentan diferentes modelos de curva de Densidad de Probabilidad que puede ajustarse a los diferentes fenómenos aleatorios:

2.10.1. Distribución Gamma.

Su forma es:

$$f_x(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \quad \text{para } x \geq 0 \quad (2.17)$$

donde:

λ y k son un factor escala y de forma

$\Gamma(k) = (k-1)!$ para k entero es llamada función gamma

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du \quad \text{para } k \text{ real}$$

k es el valor de ocurrencia de un fenómeno (k -ésimo intento)

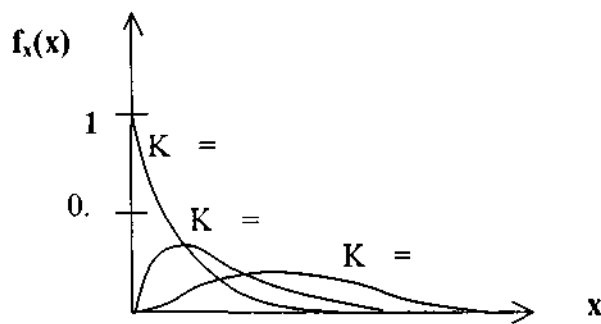


Fig. 2.5. Función de densidad gamma

2.10.2. Distribución Exponencial.

Su forma es:

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0 \quad (2.18)$$

λ es un factor de escala

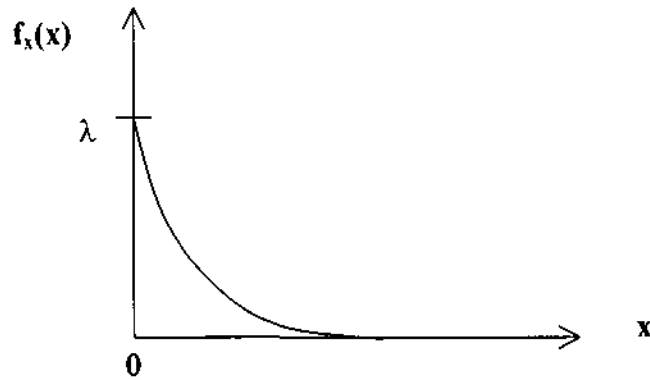


Fig. 2.6. Función de densidad gamma.

2.10.3. Distribución Normal.

Su forma es:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{para } -\infty < x < +\infty \quad (2.19)$$

la cual presenta la forma característica de la “campana”.

Con cierta falta de rigor, se considera que la Densidad de Probabilidad Normal, constituye un modelo adecuado para muchas situaciones en las que existe multiplicidad de efectos, lo cual requiere siempre una justificación posterior.

La función es simétrica respecto a la media muestral μ_x , por tanto μ_x es la media de la Densidad. Se puede demostrar así mismo que σ_x^2 es su varianza

Se puede presentar en forma simplificada la relación de la función de Densidad de Probabilidad Normal al efectuar una estandarización, tal que:

$$Z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (2.20)$$

quedando la función como:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (2.21)$$

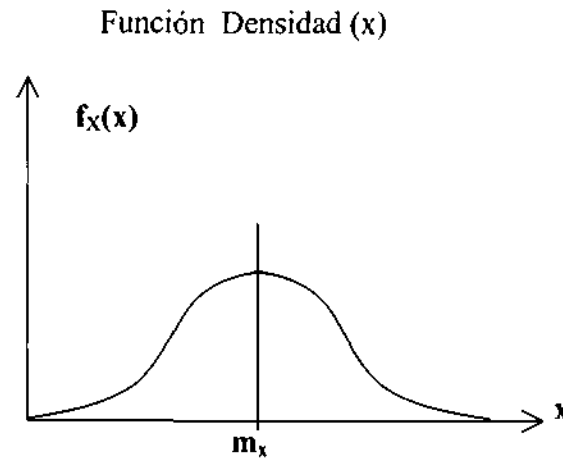


Fig. 2.7. Función de densidad Normal

La función de distribución acumulada Normal estándar puede aproximarse, con un error menor a 7.5×10^{-8} , por la expresión siguiente:

$$F_X(x_i) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5) \quad (2.22)$$

donde $u = \frac{1}{1 - 0.2316419x}$ y $x > 0$

$$a_1 = 0.319381530 \quad a_2 = -0.356563782$$

$$a_3 = 1.781477937 \quad a_4 = -1.821255978$$

$$a_5 = 1.330274429$$

en caso de que $x < 0$ tenemos

$$F_X(x) = 1 - F_X(-x)$$

2.10.4. Distribución Log-Normal.

La distribución Log-Normal representa a una variable cuyo logaritmo natural representa a una variable Normal.

Su forma es:

$$f_x(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \quad \text{para } x \geq 0 \quad (2.23)$$

donde,

μ_y media de la variable Y
 σ_y^2 varianza de la variable Y

con densidad de probabilidad:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \quad \text{para } -\infty < y < +\infty \quad (2.24)$$

y tal que:

$Y = \log x$

2.10.5. Distribución Beta.

Su forma es:

$$f_x(x) = \frac{1}{\beta} x^{r-1} (1-x)^{t-r-1} \quad \text{para } 0 < x < \infty \quad (2.25)$$

donde,

$$\beta = \frac{(r-1)!(t-r-1)!}{(t-1)!} \quad \text{si } r \text{ y } t \text{ son enteros} \quad (2.26)$$

Dos casos particulares son importantes:

- Valor de $r=1$ y Valor $t=2$ implica una forma de Densidad de Probabilidad Uniforme (0,1)
- Valor de $r=3$ y Valor $t=102$ implica una función de Densidad de Probabilidad lineal en x con forma triangular.

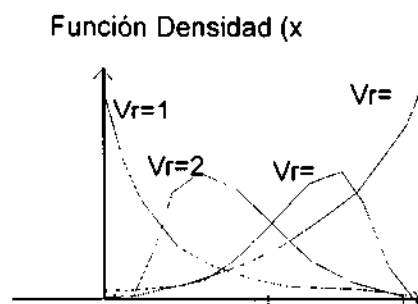


Fig. 2.8. Función de densidad Log-Normal

2.10.6. Variable aleatoria Gumbel (función extrema Tipo I [El max]).

La función de densidad de probabilidades de Gumbel (El-Max) es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{a} e^{\left[-\frac{x-b}{a} - e^{\{-(x-b)/a\}} \right]} \quad , \text{ para } a > 0 \quad (2.27)$$

y la función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = e^{\left[-e^{\{-(x-b)/a\}} \right]} \quad (2.28)$$

en donde $m(x) = \gamma \cdot a + b$ ($\gamma = 0.5772156649$, es la constante de Euler)

$$\sigma(x) = \pi \cdot a / \sqrt{6}$$

de donde los parámetros de la f.d.p pueden calcularse por medio de las siguientes relaciones:

$$a = \frac{\sqrt{6}\sigma(x)}{\pi} \quad \text{y} \quad b = m(x) - \frac{\gamma \cdot \sqrt{6}\sigma(x)}{\pi} \quad (2.29)$$

2.10.7. Variable aleatoria Gumbel (función extrema [El min]).

La función de densidad de probabilidades de Gumbel (El-min) es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{a} e^{\left[\frac{x-b}{a} - e^{\{(x-b)/a\}} \right]} \quad , \text{ para } a > 0 \quad (2.30)$$

y la función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = 1 - e^{\left[-e^{\{(x-b)/a\}} \right]} \quad (2.31)$$

en donde $m(x) = b - \gamma \cdot a$ ($\gamma = 0.5772156649$)

$$\sigma_{\cdot}(x) = \pi \cdot a / \sqrt{6} \quad (2.32)$$

de donde los parámetros de la f.d.p pueden calcularse por medio de las siguientes relaciones:

$$a = \frac{\sqrt{6}\sigma_{\cdot}(x)}{\pi} \quad \text{y} \quad b = m(x) + \frac{\gamma \cdot \sqrt{6}\sigma_{\cdot}(x)}{\pi} \quad (2.33)$$

2.10.8. Variables aleatorias con f.d.p. de Frechet.

La f.d.p. de Frechet (E2-Max) es de la forma:

$$f_X(x) = a \cdot b(x \cdot b)^{-(a+1)} e^{-[b \cdot x]^a} \quad (2.34)$$

definida para $a > 0$ y $b > 0$

La función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = e^{-[bx]^a} \quad (2.35)$$

sus parámetros son:

$$m(x) = \frac{1}{b} \Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (2.36)$$

$$\sigma_{\cdot}(x)^2 = \frac{1}{b^2} \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) \right] \quad (2.37)$$

en donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (2.38)$$

Esta función se encuentra en algunos programas especializados, o en el libro de recetas numéricas que contiene subrutina en fortran, “Numerical Recipes”.

2.10.9. Variables aleatorias con f.d.p. de Weibull.

La f.d.p. de Weibull generalizada (E3-min) es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-c}{b} \right)^{a-1} e^{-\left[\frac{x-c}{b} \right]^a} \quad (2.39)$$

definida para $a > 0$, $b > 0$ y $0 \leq c \leq x$

La función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left[\frac{x-c}{b} \right]^a} \quad (2.40)$$

sus parámetros son:

$$m(x) = b \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) + c \quad (2.41)$$

$$\sigma^2(x) = b^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{a} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{a} + 1\right) \right] \quad (2.42)$$

$$s^3(x) = b^3 \Gamma\left(\frac{3}{a} + 1\right) + 3cb^2 \Gamma\left(\frac{2}{a} + 1\right) + 3c^2 b \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) + c^3 \quad (2.43)$$

siendo $s^3(x)$ el momento de orden 3 de la variable X y $\Gamma(\cdot)$ la función gamma ya definida.

El parámetro a se llama parámetro de forma, b es el parámetro de escala y c es el parámetro de posición.

La manipulación de la función de Weibull con 3 parámetros es muy delicada y en consecuencia, se emplea muy poco. Sin embargo, la función de Weibull con dos parámetros es mucho más frecuente su utilización. Esta es la que corresponde al parámetro $c=0$. Sus características son entonces:

$$f_X(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b} \right)^{a-1} e^{-\left[\frac{x}{b} \right]^a} \quad (2.44)$$

definida para $a > 0$, $b > 0$ y $0 \leq x$

La función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left[\frac{x}{b} \right]^a} \quad (2.45)$$

sus parámetros son:

$$m(x) = b \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \quad (2.46)$$

$$\sigma^2(x) = b^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{a} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{a} + 1\right) \right] \quad (2.47)$$

Como no tiene más que dos parámetros, entonces el tercer momento no es necesario.

Debemos notar que si $a = 3.57$, la función de Weibull se aproxima de una función normal.

2.10.10. Variables aleatorias con f.d.p. exponencial.

La función de densidad de probabilidades exponencial es de la forma:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad (2.48)$$

y la función de densidad acumulada es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x\lambda} \quad (2.49)$$

sus parámetros son:

$$m(x) = 1/\lambda \quad (2.50)$$

$$\sigma_*(x) = 1/\lambda \quad (2.51)$$

3. ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD.

3.1. INTRODUCCIÓN.

En el diseño de estructuras, en el diseño mecánico, en el diseño de cimentaciones, partimos de la necesidad de satisfacer ciertas necesidades, por ejemplo: cubrir un claro, cerrar un espacio, crear una presión, crear el soporte de una estructura, etc. Este diseño se efectúa considerando el conocimiento de ciertas necesidades, de las acciones existentes, de las propiedades de los materiales y para esto, se utilizan métodos de análisis y diseño adaptados a cada circunstancia, lo que nos permite encontrar **el mejor** diseño, a condición de interpretar correctamente los resultados.

Sin embargo, debemos tomar en cuenta que **[OFM TESIS]**:

- Los métodos de cálculo se basan en teorías aproximadas que intentan aproximar la realidad física adaptándose a determinadas circunstancias.
- Las propiedades de los materiales son medidas por ensayos en laboratorio o por ensayos en el sitio, realizados según las Normas en vigor. Los resultados son tratados estadísticamente para que nosotros podamos disponer de valores nominales en nuestro diseño.

- Las dimensiones de los elementos no son respetadas durante la fabricación, por lo que las características geométricas son diferentes de las utilizadas durante los cálculos.
- Las acciones internas dependen de las propiedades geométricas y de las propiedades de los materiales.
- Las acciones exteriores se estiman en función de un número siempre limitado de medidas y su modelación es algunas veces simplista. Las acciones accidentales, son poco previsibles.
- Las propiedades geométricas, las propiedades mecánicas y las solicitaciones, tanto en el suelo como en la superestructura, tienen distribuciones espaciales, pocas veces tomadas en cuenta.
- En fin, las leyes de comportamiento, las propiedades mecánicas, las acciones y distribuciones espaciales, tienen una evolución en el tiempo, no siempre tomada en cuenta, (y no siempre es posible tomarla en cuenta de manera adecuada).

Todo lo anterior nos recuerda que los datos no los tenemos a nuestra disposición con total certeza y no únicamente por falta de precisión. Por lo cual, los parámetros que utilizamos para el análisis y el diseño de estructuras son aleatorios, lo que implica que debemos utilizar para la evaluación estructural, métodos que tomen en cuenta la parte incierta que existe en nuestros datos, en los cálculos, en los modelos que utilizamos y en la realización de nuestros proyectos.

En el presente trabajo, la parte incierta se tomará mediante la evaluación de la **confiabilidad estructural**, es decir, mediante la evaluación de la probabilidad de que un sistema estructural esté en condiciones de satisfacer las necesidades para las que fue proyectado. Sin embargo, no es posible aún tomar en cuenta todas las variables aleatorias que intervienen en nuestros cálculos, por lo que debemos elegir las que consideremos más determinantes en un cierto problema y estudiar su influencia. Para esto debemos basarnos en las técnicas existentes y en la experiencia de los diseñadores y analistas.

Este capítulo, presenta un resumen de algunos de los métodos de confiabilidad existentes para aplicarlos al estudio de estructuras ante solicitación estática.

Para tomar en cuenta la parte incierta en los cálculos, necesitamos primero modelarla. Esta modelación no es simple debido a que se trata con variables que generalmente son

función del tiempo y del espacio. Para esto, podemos agrupar las incertidumbres en dos grupos **[LEMAIRE]**.

Incertidumbre interna: relativa al estado de la estructura (datos mecánicos y características físicas, geométricas y las condiciones límite, ...).

Incertidumbre externa: relativa al medio ambiente, está constituida por la carga y las deformaciones impuestas a las estructuras (carga de servicio, viento, sismo, ola, nieve, temperatura, carga viva, ...).

Estos tipos de incertidumbres se modelan como **procesos estocásticos** si son función del tiempo o como **variables aleatorias**, si no lo son. Si son además función del espacio se representan como campos aleatorios y se discretizan como vectores aleatorios.

Para el diseño estructural, utilizamos reglas que traducen la idea del “buen” funcionamiento. Estas reglas son el resultado del conocimiento físico y mecánico de las estructuras y de sus materiales constitutivos así como de la experiencia de los diseñadores. Los estados límite de servicio y los estados últimos son las reglas de dimensionamiento. La definición de un estado límite es uno de los primeros pasos para el análisis de confiabilidad **[OFM TESIS]**, por ejemplo: ¿cuál es el estado de esfuerzos que no debemos sobrepasar ? o ¿cuál es desplazamiento considerado incompatible con el buen funcionamiento?.

Así, los estados límite son el reflejo de nuestro conocimiento, del comportamiento de una estructura y de las combinaciones de las acciones que en ella actúan. Sin embargo, un diseño estructural no puede satisfacerse de una sola regla, son necesarias varias de ellas. Los enlaces de eventos elementales se definen como **escenarios de falla [LEMAIRE]**. La verificación de una regla no es mas que la verificación de un modo potencial de falla entre otros posibles.

3.2. EVALUACIÓN DE CONFIABILIDAD.

Una vez definidos los estados límite, las variables consideradas como aleatorias, sus leyes y sus parámetros estimados podemos proceder a la evaluación de la confiabilidad, o de su complemento, la probabilidad de falla, para un escenario elegido. Para los análisis de confiabilidad de estructuras son necesarias algunas hipótesis:

- *el estado de la estructura está definido en un espacio resultado de un vector de variables aleatorias;*
- *la estructura puede estar en uno de dos estados posibles es estado de falla o el estado de seguridad [KIUREGHIAN-B].*

La frontera entre ambos estados se conoce como **superficie de estado límite**. El estado de seguridad es el estado de una estructura que es capaz de satisfacer todas las necesidades (mecánicas y de servicio) para las que fue diseñada.

Si Z se define como la diferencia entre la resistencia R y la sollicitación S , entonces $G(Z)$ es la función de estado límite elemental, definida como:

$$G(Z) = R - S \quad (3.1)$$

donde R es la variable que representa los recursos del sistema y S es la variable que define la demanda (como un esfuerzo o una deformación). $G(Z) > 0$ define el estado de seguridad y $G(Z) \leq 0$ definen el estado de falla. La probabilidad de falla es entonces:

$$P_f = \int_{G(Z) \leq 0} f_Z(z) dz \quad (3.2)$$

donde $f_Z(z)$ es la función de densidad de probabilidades de Z . Una dificultad importante en el análisis de confiabilidad resulta del hecho de que los parámetros estadísticos de la sollicitación (y algunas veces los de la resistencia) no están dados directamente porque los análisis estadísticos fueron hechos para las variables de base de las cuales ellas se obtuvieron. Entonces sea X_i un vector de variables aleatorias de base de la estructura (cargas, propiedades de los materiales, geometría, etc.).

Se suponen conocidas al menos sus funciones de distribución de probabilidades marginales. La variable Z y el vector X_i están ligadas por una transformación llamada transformación mecánica [KIUREGHIAN-A, KIUREGHIAN-B]:

$$Z = Z(X_i) \quad (3.3)$$

Se supone como primera aproximación que esta transformación es conocida, inclusive si para la mayoría de las estructuras, la transformación se conoce sólo con la ayuda de un algoritmo, por ejemplo un programa de elementos finitos **[OFM TESIS]**.

Así, para el estado límite $G_k(X_i)$, donde $k=1, \dots, m$, definido en función de variables aleatorias de base X_i con $i=1, \dots, n$, m el número de estados límite y n el número de variables aleatorias de base, la probabilidad de falla está definida como:

$$P_f = \text{Prob}(G_k(X_i) \leq 0) = \int_{D_f} f_{X_i}(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (3.4)$$

donde $f_{X_i}(x_i)$ representa la densidad de probabilidades conjunta del vector X_i y D_f el dominio de falla. La confiabilidad es el complemento de la probabilidad de falla, es decir:

$$P_r = 1 - P_f \quad (3.5)$$

Para evaluar la confiabilidad es necesario entonces evaluar la probabilidad de falla y obtener su complemento. Sin embargo, el cálculo de la ecuación (3.4) es a menudo imposible. Por lo que necesitamos métodos aproximados los cuales se enlistan a continuación.

- Método de integración directa
- Método de Monte Carlo
- Métodos de índices de confiabilidad
 - ◆ Índice de Cornell
 - ◆ Índice de Rosembluet y Esteva
 - ◆ Índice de Hasofer y Lind (Método FORM / SORM)
 - ◆ Índice de Veneciano
 - ◆ Índice generalizado de Ditlevsen
- Métodos de simulación adaptada o condicionada
- Métodos de superficie de Respuesta

3.3. SIMULACIÓN Y MÉTODO DE MONTE CARLO.

La simulación es una herramienta muy importante en nuestros días para los diseñadores. Los progresos de la informática y los desarrollos técnicos hacen de la simulación una herramienta aceptada y muy utilizada en muchas áreas. Rubinstein [RUBINSTEIN] define la simulación como *“una técnica potente para la generación de muestras experimentales, ... esta definición general es llamada, algunas veces, simulación en el sentido largo, en oposición a la simulación estocástica, que se define como una experimentación de un modelo que varía en el tiempo”*.

En nuestros días, la simulación estocástica es el muestreo estadístico de un modelo. Dado que el muestreo de una distribución particular implica la utilización de números aleatorios, la simulación estocástica es llamada muchas veces **Simulación de Monte Carlo**. *Históricamente, el método de Monte Carlo ha sido considerado como la técnica que utiliza los números aleatorios o pseudoaleatorios, para la solución de un modelo* [RUBINSTEIN]. Los números aleatorios, la base de toda simulación, son variables aleatorias uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Los programas de computadora que producen esos números se llaman **“generadores de números aleatorios”** (o pseudo - aleatorios).

Según Rubinstein, el nombre de “Monte Carlo”, fue introducido por Von Neumann y por Ulman durante la segunda guerra mundial, como una “clave” para los trabajos secretos de Los Álamos; ellos sugirieron ese nombre debido a los juegos de dinero de la ciudad de Monte Carlo, en el Principado de Mónaco. Sin embargo su utilización es mucho más amplia, el método puede utilizarse para la solución de problemas deterministas, como la solución de integrales múltiples o la solución de ecuaciones diferenciales y muchos otros[OFM TESIS].

Este método proporciona una muy buena aproximación sobre la confiabilidad o sobre las probabilidades de falla o simplemente sobre las probabilidades de ocurrencia de un cierto fenómeno. Su principio es muy simple pero su aplicación es, en la mayoría de los casos, bastante costosa, llegando a ser prohibitiva.

Si $G(X_i)$ es la función de estado límite y si disponemos de las leyes marginales de las variables aleatorias X_i (es decir, la función de distribución para una sola variable) y de sus parámetros estadísticos respectivos (media y desviación estándar), bastará con evaluar un número *suficientemente grande* de veces la función en estudio, mediante simulaciones

independientes de las variables aleatorias, posteriormente tratar los resultados estadísticamente, para poder así obtener una aproximación de la probabilidad buscada.

Podemos comprender mejor la validez de este método gracias a un ejemplo simple dado por David Ruell “.... si jugamos volados (águila o sol) un gran número de veces, entonces la proporción de águilas (o soles) será vecina del 50%. Así, partiendo de una incertidumbre total en cuanto al resultado de un lanzamiento de una moneda (volado), llegamos a una certeza casi completa para una larga serie de tiros. El pasaje de la incertidumbre a la casi certidumbre, que se produce al observar grandes series de eventos o de grandes sistemas es la parte esencial en el estudio del azar”. Podemos agregar también, que es la parte esencial de la validez del Método de Monte Carlo [OFM TESIS].

El problema de este método radica en lo que nosotros debemos considerar como “un gran número de veces”; o ¿qué es un número suficiente de veces?. No existe una respuesta concreta a esta interrogante, pero se sabe que si la probabilidad buscada es del orden de 10^{-n} , entonces el número de realizaciones debe andar entre 10^{n+2} y 10^{n+3} . Para ingeniería civil, la probabilidades de falla son muy pequeñas, lo que implica que el número de simulaciones deberá bastante considerable para obtener un resultado apropiado. Algunos estudios muestran que la convergencia es lenta, aproximadamente en relación a $\sqrt{n}$. Existen, además, relaciones que permiten dar un intervalo de confianza sobre la estimación del resultado.

A pesar del costo computacional que implica la aplicación de este método, no debemos descartarlo. Por el contrario, muchas veces es muy útil para distintos problemas para los que no tenemos otra solución. Este método permite, entre otras cosas, calibrar algunos otros métodos aproximados de reciente auge.

3.3.1. Simulación de variables aleatorias.

Cuando las funciones de distribución de las diferentes variables aleatorias son conocidas (con sus eventuales correlaciones) es posible simular un gran número realizaciones. Para una estructura, por ejemplo, si sus características geométricas, mecánicas, así como las acciones que soportan, son conocidas, es decir, si conocemos sus parámetros estadísticos (media y desviación estándar) y su función de distribución de probabilidades, podemos

simular un gran número de estructuras. Realizando los análisis a cada una de éstas, tendremos un gran número de simulaciones de sus fuerzas internas, así como de sus desplazamientos, giros, reacciones, esfuerzos, etc.

El método de Monte Carlo permite efectuar un tratamiento estadístico de todas las simulaciones. Como el método consiste en una repetición sistemática de cálculos, la computadora será una herramienta sin duda, indispensable.

En esta sección presentamos la manera de simular variables aleatorias independientes, distribuidas según algunas funciones de distribución de probabilidades, pero partiendo siempre de un conjunto de números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y 1. Muchas calculadoras de bolsillo disponen de una función que permite obtener este conjunto. Regularmente se le llama **RND** (de *random* en inglés) o **RAN**. Algunos lenguajes de programación, como Fortran o BASIC (Pascal, C, etc..) disponen de esta función.

Será necesario entonces, obtener la función inversa de distribución de probabilidades de la variable aleatoria. Es decir, si tenemos un variable aleatoria uniformemente distribuida $R(0,1)$, podemos obtener valores de x_i tales que $F_x(x_i) = R(0,1)$, siendo estos valores de probabilidad.

3.3.2. Variables aleatorias uniformes.

Si $R_1, R_2, \dots, R_n$ son una serie de simulaciones de la variable aleatoria R uniformemente distribuida entre $[0 \text{ y } 1]$, entonces la variable X , definida por:

$$X = \sqrt{3(2R - 1)}\sigma(x) + m(x) \quad (3.6)$$

o también

$$X = R(b - a) + a \quad (3.7)$$

está distribuida según una función de distribución de probabilidades (f.d.p.) uniforme en el intervalo (a, b) o $m(x) \pm \frac{1}{2}(b - a)$.

3.3.3. Variable aleatoria normal (Fórmula de Box y Muller).

Si $R_1, R_2, \dots, R_n$ son una serie de simulaciones de la variable aleatoria R uniformemente distribuida entre $[0 \text{ y } 1]$, las variables $u_1, u_2, \dots, u_n$ calculadas con:

$$u_i = \sqrt{-2 \ln R_i} \cos(2\pi \cdot R_{i+1}) \quad (3.8)$$

$$u_{i+1} = \sqrt{-2 \ln R_i} \sin(2\pi \cdot R_{i+1})$$

son una serie de simulaciones de la variable aleatoria U que siguen una f.d.p. normal estándar, es decir, con media 0 y desviación estándar 1, $\sim N(0,1)$.

Para obtener una variable aleatoria Normal con media m_x y desviación σ_x la transformación está dada por:

$$X_i = \sigma_x u_i + m_x \quad (3.9)$$

3.3.4. Variable aleatoria Lognormal.

La variable aleatoria Lognormal es aquella para la cual su logaritmo natural sigue una f.d.p. Normal. Las expresiones de la media y la varianza de la variable normal equivalente $y = \ln x$, son:

$$m(y) = \ln \frac{m(x)^2}{\sqrt{m(x)^2 + \sigma(x)^2}} \quad (3.10)$$

$$\sigma(y)^2 = \ln \left[1 + \frac{\sigma(x)^2}{m(x)^2} \right] \quad (3.11)$$

El problema de simular una variable Lognormal es entonces:

- 1) Simular una variable uniforme entre 0 y 1, $R(0,1)$
- 2) Obtener una variable aleatoria normal estándar $N(0,1)$
- 3) Transformar a una Lognormal mediante $X = e^Y$ que es lo mismo que $X = e^{R\sigma(y)+m(y)}$

3.3.5. Simulación de variables aleatorias con diferentes f.d.p.

Si R es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, entonces x , dado por:

$$x = a \cdot \ln \left[1 - \frac{1}{\ln R} \right] + b \quad (3.12)$$

es una variable aleatoria que sigue una f.d.p E1-Max, con parámetros a y b .

Si R es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, entonces x , dado por:

$$x = a \cdot \ln[-\ln R] + b \quad (3.13)$$

es una variable aleatoria que sigue una f.d.p E1-min, con parámetros a y b .

Si R es la variable aleatoria uniforme entre (0 y 1)., entonces la variable X , definida por:

$$X = -\frac{1}{b} e^{\left[\frac{1}{a} \ln \left(-\frac{1}{\ln R} \right) \right]} \quad (3.14)$$

está distribuida según una f.d.p. de Frechet, o extremo tipo II, $E2\text{-Max}(a,b)$.

Para esta f.d.p, la obtención de parámetros a y b analítica no es posible, pero para un coeficiente de variación entre 0 y 1, existen valores aproximados que son:

$$\frac{1}{a} = (-0.4919cv^2 + 0.782cv - 0.03) \quad (3.15)$$

$$b = \left(\frac{1.12}{a^2} + \frac{0.313}{a} + 1.02 \right) \cdot \frac{1}{m(x)} \quad (3.16)$$

en donde cv es el coeficiente de variación (desviación entre media, $cv = \sigma.(x)/m(x)$).

Para simular variables aleatorias que correspondan a la función de Weibull partimos de una serie de valores aleatorios uniformes. Si R es la variable aleatoria uniforme entre (0 y 1)., entonces la variable X , definida por:

$$X = c + be^{\left[\frac{1}{a} \ln(-\ln R) \right]} \quad (3.17)$$

está distribuida según una función de Weibull $W(a,b,c)$ o $E3-\min(a,b,c)$.

La dificultad reside en hecho de que no es simple la obtención de los parámetros a, b y c en función de los tres momentos $m(x), \sigma.(x)$ y $s^3(x)$. Sin embargo, existen programas comerciales que incluyen esta distribución.

Si R es la variable aleatoria uniforme entre (0 y 1)., entonces la variable X , definida por:

$$X = - \frac{\ln(1-R)}{\lambda} \quad (3.18)$$

está distribuida según una f.d.p. exponencial con parámetro λ .

3.3.6. Cálculo de la probabilidad de falla por Monte Carlo.

Una vez simuladas las variables aleatorias se realizan los cálculos estructurales para cada una y se aplican tratamientos estadísticos para estudiar los resultados. Por ejemplo si la probabilidad de falla está dada por la ecuación (3.4). Utilizando Monte Carlo podemos

aproximar la probabilidad de falla evaluando $G(X)$ para cada una de las simulaciones y los parámetros estadísticos de $G(X)$ pueden evaluarse estadísticamente.

La probabilidad de falla se aproxima por:

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^n (G(X) < 0)}{N} \quad (3.19)$$

es decir el número de casos donde $G(X) \leq 0$ entre el número total de simulaciones.

3.4. MÉTODOS FORM Y SORM.

Existe otra manera de evaluar la confiabilidad o para llegar a la probabilidad de falla. Ésta se basa en el cálculo de algunos índices, llamados **índices de confiabilidad**, y en una aproximación de la probabilidad de falla. Un índice bastante utilizado es el índice de confiabilidad de Cornell β_c . Éste se calcula como:

$$\beta_c = \frac{m[G(x)]}{\sigma \cdot [G(x)]} \quad (3.20)$$

lo que significa que se divide la media de la función límite entre su desviación estándar. Este índice por sí solo es una medida de la seguridad de la estructura. Sin embargo, para poder ligarlo a la probabilidad de falla, es indispensable que las variables sean normales y que la función de estado límite sea lineal para que el resultado sea correcto. Además el índice no es invariante para estados límites equivalentes.

Otro índice utilizado es el índice β_{HL} o simplemente β , propuesto por Hasofer y Lind [**HASOFER**]. El índice de Hasofer y Lind es invariante y simple de obtener, al menos para muchos casos de interés práctico. Sus autores proponen el no trabajar en el espacio de variables físico sino de efectuar un cambio de variables y colocarse así en el espacio de

variables normales estándar (media nula y desviación estándar unitaria) estadísticamente independientes. La transformación de las variables X en variables normales estándar es:

$$U = T(X) \quad (3.21)$$

A esta transformación se le llama **transformación probabilista**. Ella existe siempre para variables continuas.

Se tiene así, para la función de estado límite (3.1):

$$G(X) = G(X(U)) \equiv G(U) = 0 \quad (3.22)$$

Y para la probabilidad de falla:

$$P_f = \int_{G(U) \leq 0} \phi(U) du_1 \dots du_n \quad (3.23)$$

donde $\phi(u)$ es la función de densidad de probabilidades de la función normal de n dimensiones.

El índice de confiabilidad β se define como la distancia más corta del origen a la función límite $G(U)=0$ en el espacio U [KIUREGHIAN-A, RACKWITZ]. Esta distancia proporciona un hiperplano tangente a la función límite en el punto P^* , llamado punto falla más probable o punto de diseño. Este método es conocido como Método de Confiabilidad de Primer Orden, FORM (*First Order Reliability Method*) [MADSEN].

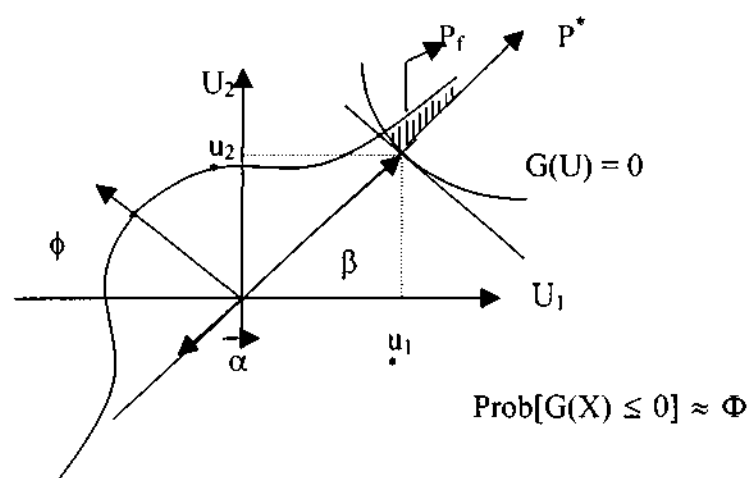


Fig. 3.1 Espacio de variables estándar. Cálculo de β .

La probabilidad de falla FORM se aproxima como:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (3.24)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función normal estándar. Esta aproximación es la de primer orden. El grado de aproximación depende de la no linealidad de la función de estado límite. El resultado sólo es exacto cuando la función límite es lineal y las variables de base normales. La solución por el método FORM se reduce a solucionar un problema de optimización, en donde se busca minimizar β , con la condición de que $G(U)=0$, la cual se encuentra mediante un algoritmo de optimización.

3.4.1. Algoritmos de optimización.

Diferentes métodos de optimización están disponibles para determinar la distancia mínima y el punto P^* , si disponemos de la función límite y de su gradiente para cada paso de iteración del proceso.

El algoritmo de optimización más fácil para resolver este problema es el de Rackwitz y Fiessler. Está dado por la fórmula iterativa siguiente:

$$u_i^{(j+1)} = \left[u_i^{(j)} - \frac{G(u^{(j)})}{|\nabla G(u^{(j)})|} \right] \alpha_i^{(j)} \quad (3.25)$$

en donde $\nabla G(u) = \{\partial G(u) / \partial G(u)_1, \dots, \partial G(u) / \partial G(u)_n\}'$ es el vector gradiente de la función de estado límite,

$$\alpha_i^{(j)} = \frac{\nabla_i G(u^{(j)})}{|\nabla G(u^{(j)})|} \quad (3.26)$$

es el vector de cosenos directores de la normal a la función límite orientada hacia el origen y $G(u^{(j)})$ es el valor de la función de estado límite evaluada en el punto $u^{(j)}$. El índice (j) indica el paso de iteración. Esta expresión nos conduce generalmente al punto P^* y la distancia mínima se define como: $\beta = (u^* u^*)^{1/2}$, siendo u^* las coordenadas del punto P^* . Cada iteración necesita de la evaluación de la función límite $G(U)$ y de su gradiente $\nabla G(U)$.

Este procedimiento sufre de algunas debilidades inherentes de todo proceso de optimización: ¿cómo mostrar que el mínimo encontrado es el mínimo absoluto?. Basándose en el algoritmo de Schittkowski, Abdo y Rackwitz propusieron un algoritmo mejor pero que no garantiza tampoco la obtención del mínimo absoluto [ABDO].

La literatura nos propone diversos algoritmos para la solución del problema de minimización de $|U|$ con la condición de igualdad $G(U)=0$. Algunos de éstos son:

- El método del gradiente proyectado (GP, *gradient projection*),
- El método de penalidad (*penalty method*),
- El método del lagrangiano aumentado (AL, *augmented lagrangian method*),
- El método de programación secuencial cuadrática (SQP, *Sequential Quadratic Programming Method*),
- El método de Hasofer y Lind - Rackwitz y Fiessler (HL-RF), que se describió arriba,
- El método de HL-RF modificado (ver por ejemplo Liu *et al.*) [LIU],
- El método de Abdo y Rackwitz (AR) [ABDO]

Liu *et al.* [LIU] presentaron un estudio comparativo de la mayoría de esos métodos. Concluyen que los métodos GP y AL son muy robustos, pero son muy costosos. El método de HL-RF es el menos costoso de todos, sin embargo existen casos para los que no existe convergencia. Según ellos, el método SQP y el HL-RF modificado, son robustos y son relativamente económicos. Estos métodos resultan de interés en aplicaciones con el método de elementos finitos estocásticos, en la aplicación de los métodos de confiabilidad en análisis estructural, mediante el acoplamiento de programas.

3.4.2. Transformación de Rosenblatt.

La búsqueda del punto de falla más probable se efectúa en el espacio de variables estándar, por lo que debemos realizar la transformación:

$$U = T(X) \quad (3.27)$$

En el caso en que las variables aleatorias de base no sean normales, la transformación más simple para variables aleatorias mutuamente independientes cuyas funciones de distribución de probabilidades marginales son $F_{X_i}(x_i)$. Cada variable puede ser transformada según la identidad:

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.28)$$

La transformación directa es entonces:

$$T(X) \Rightarrow u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

y la transformación inversa resulta:

$$T^{-1}(U) \Rightarrow x_i = F^{-1}_{X_i}(\Phi(u_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

Las coordenadas del punto de falla x^* , en el espacio físico, se obtiene con la transformación (3.30) a partir del punto u^* .

Cuando las variables de base no son mutuamente independientes, la transformación de Rosenblatt [ROSENBLATT] propuesta por Hohenbichler y Rackwitz [HOHENBICHLER] ha sido empleada por diferentes autores. Esta transformación generaliza la precedente:

$$T(x) \Rightarrow \begin{cases} u_1 &= \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)) \\ u_2 &= \Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2|x_1)) \\ &\vdots \\ u_n &= \Phi^{-1}(F_{X_n}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})) \end{cases} \quad (3.31)$$

en la cual $F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})$ es la distribución condicional de x_i cuando $(X_1=x_1, \dots, X_{i-1}=x_{i-1})$ se define por:

$$F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f_{X_1, \dots, X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i) dt_i}{f_{X_1, \dots, X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (3.32)$$

Con esta transformación, se obtiene primero u_i y posteriormente todas las transformaciones condicionales. La transformación de Rosenblatt es idéntica a la transformación (3.29) si las variables de base son mutuamente independientes. La transformación inversa resulta:

$$T^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= F_1^{-1}(\Phi(u_1)) \\ x_2 &= F_2^{-1}(F_2(\Phi(u_2|u_1))) \\ &\vdots \\ x_n &= F_n^{-1}(\Phi(u_n|u_1, \dots, u_{n-1})) \end{cases} \quad (3.33)$$

En la práctica, esta transformación puede calcularse numéricamente. Es necesario notar que la transformación de Rosenblatt, para variables correlacionadas, no es única, y depende

del orden en que se eligen las variables aleatorias. El valor de la probabilidad de falla depende del orden de la transformación, pero la diferencia no es muy significativa. Madsen *et al.* [MADSEN], presentan un ejemplo en el que el orden modifica un poco el valor de β .

3.4.3. Transformación de Nataf.

La transformación de Rosenblatt, dada por la expresión (3.33), presupone que la función de densidad de probabilidades conjunta es conocida, lo cual no es posible en casi todos los casos. Disponemos en general, cuando más, de los valores medios $m(X)$, desviaciones estándar $\sigma(X)$, de la matriz de correlación ρ_{ij} y de las funciones marginales de distribución de X . Der Kiureghian y Liu [KIUREGHIAN-B] sugieren, en ese caso, la utilización de la transformación propuesta por Nataf.

Consideremos dos variables aleatorias correlacionadas X_1 y X_2 . Las funciones de distribución marginales son conocidas ($F_{X_i}(x_i)$). Si Y_1 y Y_2 son las variables normales standard obtenidas con la transformación (3.29):

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)), i = 1, 2 \quad (3.34)$$

Según Nataf, podemos asignar una función de distribución conjunta a las variables X_1 y X_2 sabiendo que las variables Y_i tienen una distribución conjunta normal. Entonces:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \phi_2(y_1, y_2, \rho_{0,12}) \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}{\phi(y_1) \phi(y_2)} \quad (3.35)$$

donde $f_{X_i}(x_i) = dF_{X_i}(x_i)/dx_i$ y $\phi_2(y_1, y_2, \rho_{0,12})$ es la función normal bivariada de medias nulas y desviaciones unitarias y de correlación $\rho_{0,12}$

$$\phi_2(y_1, y_2, \rho_{0,12}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{0,12}^2}} \exp \left[-\frac{y_1^2 - 2\rho_{0,12}y_1y_2 + y_2^2}{2(1 - \rho_{0,12}^2)} \right] \quad (3.36)$$

Es posible expresar $\rho_{0,12}$ en función de las densidades marginales de X_i y sus coeficientes de correlación ρ_{12} :

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_1 m(X_1)}{\sigma(X_1)} \right) \left(\frac{x_2 m(X_2)}{\sigma(X_2)} \right) \phi_2(y_1, y_2, \rho_{0,12}) \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}{\phi(y_1) \phi(y_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_1 m(X_1)}{\sigma(X_1)} \right) \left(\frac{x_2 m(X_2)}{\sigma(X_2)} \right) \phi_2(y_1, y_2, \rho_{0,12}) dy_1 dy_2\end{aligned}\quad (3.37)$$

El modelo presentado es válido si:

1. la búsqueda de y_i se efectúa una por una, y eso es siempre posible si todas las funciones de distribución marginales son continuas y estrictamente crecientes;
2. los valores de $\rho_{0,12}$ están estrictamente comprendidos entre -1 y 1, lo que no siempre se verifica en la medida en que $\rho_{0,12}$ es una correlación ficticia.

Según Der Kiureghian y Liu, **[KIUREGHIAN-B]** la diferencia entre $\rho_{0,12}$ y ρ_{12} es pequeña para la mayoría de funciones de distribución y en la mayoría de condiciones prácticas, así la segunda condición se satisface. Ellos dan una relación semi-empírica entre los coeficientes de correlación para simplificar el cálculo:

$$f = \frac{\rho_{0,12}}{\rho_{12}} \quad (3.38)$$

La relación precedente se basa en las propiedades siguientes:

- f es en general función de ρ_{ij} y de los parámetros de las funciones marginales,
- $f \geq 1$ para valores arbitrarios de ρ_{ij} y de las funciones de distribución,
- f es independiente de ρ_{ij} si una de las variables es normal,
- f es invariante para transformaciones lineales de X_i y X_j , y

además, basado en la última propiedad, para funciones de distribución de dos parámetros, f es independiente de la distribución de los parámetros X_i si la distribución es reducible a la forma

estándar por una transformación lineal. Si no, f es función del coeficiente de variación $CV_{X_i} = \sigma(X_i) / m(X_i)$.

Las funciones de distribución que son reducibles a la forma estándar por una transformación lineal son las del grupo I (Uniforme, Exponencial, Rayleigh, E1-max y E1-min). Las funciones del grupo II estudiadas por Der Kiureghian *et al.* no pueden ser transformadas a la forma estándar por una transformación lineal (Lognormal, Gamma, extrema tipo II, extrema tipo III).

Der Kiureghian *et al.*, muestran cómo podemos aplicar esta transformación. Ellos proporcionan un conjunto de tablas para evaluar f en función de las funciones de distribución y de sus parámetros, de tal suerte que no es necesaria la evaluación de la expresión (3.37).

Una de las ventajas de esta transformación es que el índice de confiabilidad es invariante del orden que se elija para efectuar la transformación.

La generalización para n variables es simple. Es necesario definir las variables normales estándar $Y=(y_1, \dots, y_n)$, las cuales son conjuntamente correlacionadas. El modelo de distribución es entonces:

$$f_X(x) = \phi(Y, \rho_0) \frac{f_{X_1} \dots f_{X_n}}{\phi_{Y_1} \dots \phi_{Y_n}} \quad (3.39)$$

donde $\phi(Y, \rho_0)$ es la función de densidad de probabilidades normal conjunta y ρ_0 es la matriz de los coeficientes de correlación. Los elementos de ρ_0 se obtienen a partir de la relación (3.36) o de las tablas dadas por Der Kiureghian [LIU], en función de las distribuciones marginales y de los coeficientes de correlación.

Según ellos, el modelo es válido si: a) cada función marginal es continua y estrictamente creciente y b) la matriz ρ_0 es definida positiva.

La condición b) necesita que $\rho_{0,ij}$ sea estrictamente inferior a 1 para todo $i \neq j$. La condición a) se satisface para todos los casos de interés práctico en análisis estructural según Der Kiureghian.

La transformación a variables independientes se escribe entonces:

$$u = T(x) = \Gamma_o y = \Gamma_o \begin{Bmatrix} \Phi^{-1}[F_{x_1}(x_1)] \\ \Phi^{-1}[F_{x_2}(x_2)] \\ \vdots \\ \Phi^{-1}[F_{x_n}(x_n)] \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

en donde $\Gamma_o = L^{-l}$ es la inversa de la matriz triangular inferior de la descomposición de Cholesky de ρ_o . Para las variables no normales, la transformación es no lineal. En la búsqueda del punto P^* , el procedimiento estándar es la linealización de la transformación a cada paso de iteración. Entonces:

$$U = T(x) = \Gamma_o D'^{-1} (X - M') \quad (3.41)$$

donde $M' = [m'_1, \dots, m'_n]$ es el vector de medias equivalentes y $D' = \text{diag} [\sigma'_i]$ es la matriz de desviaciones equivalentes. Los elementos de M' y de D' se determinan por linealización en cada punto X por la transformación propuesta por Ditlevsen:

$$m'_i = x_i - \sigma'_i \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)], \quad i = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

$$\sigma'_i = - \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)]\}}{f_{x_i}(x_i)} \quad (3.43)$$

Para utilizar el algoritmo de Rackwitz-Fiessler, basta con evaluar en cada punto las medias y las desviaciones equivalentes y utilizar ρ_o en lugar de ρ . Como ρ_o es independiente de la transformación, L_o y Γ_o se evalúan una sola vez.

3.4.4. Método de segundo orden, SORM.

La función de estado límite no siempre es lineal por lo que la aproximación que se encuentra con FORM puede mejorarse por medio de una aproximación de segundo orden, SORM (*Second Order Reliability Method*).[BREITUNG] En este método la superficie de estado límite en u^* se aproxima con una superficie cuadrática, normalmente parabólica, propuesta por Breitung. Bajo las hipótesis siguientes:

- u^* es único,
- la función de estado límite tiene derivadas segundas en el punto U^* ,
- las curvaturas principales k_j , con $j=1, \dots, n-1$ de la superficie al punto u^* satisfacen:

$$k_j \beta \geq -1, \text{ contra } \beta \rightarrow \infty \quad (3.44)$$

entonces la probabilidad de falla según SORM es:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{j=2}^n (1 - \beta k_j)^{-1/2}, \quad \beta \rightarrow \infty \quad (3.45)$$

Las curvaturas principales en el punto u^* son los valores característicos de la matriz A de dimensión $(n-1)(n-1)$, cuyos elementos son:

$$a_{ij} = \frac{[R \nabla^2 G(u^*) R^T]_{ij}}{[\nabla G(u^*)]^2}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.46)$$

donde $\nabla^2 G(u^*) = [\partial^2 G(u) / \partial u_i \partial u_j]_{u=u^*}$ es el Hessiano en el punto de falla más probable y R es la matriz ortonormal de rotación tal que, en el nuevo marco de referencia, el punto u^* pertenece al eje de la primera coordenada. El cálculo exacto de la integral que representa la

probabilidad contenida en la superficie parabólica, en el caso en que disponemos de las curvaturas k , fue dado por Tvedt.

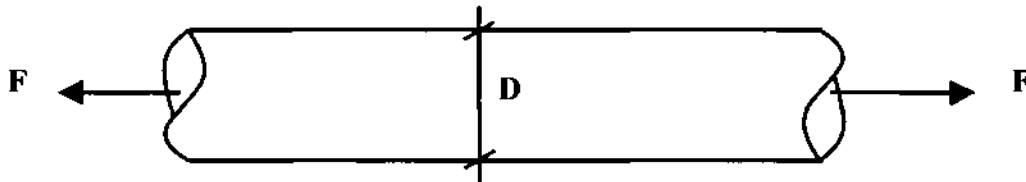
En la expresión (3.70), el primer término representa la aproximación de primer orden y el producto de los términos $(1 - \beta\kappa_j)$ representa la corrección de segundo orden. El problema principal de esta aproximación resulta de la existencia de un punto singular, cuando la curvatura es $k = 1/\beta$, donde no existe solución. El resultado SORM está hecho sólo para cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Otra manera de corregir el resultado dado por FORM es la simulación condicionada, que consiste en realizar una simulación pero no respecto a los valores medios de las variables aleatorias de base, sino con respecto a los valores que definen el valor de β , es decir, respecto a X^*_i , con lo cual, un número relativamente mínimo de simulaciones nos dan un resultado bastante aproximado de la probabilidad de falla. Esta también es una manera de verificar el grado de aproximación del resultado FORM.

3.4.5. EJEMPLO aplicando FORM para variables aleatorias normales.

El ejemplo que se trata a continuación consiste en un tubo de sección circular sometido a esfuerzo de tensión. La resistencia R es función del esfuerzo de fluencia y del área de la sección transversal y la sollicitación es la fuerza de tensión F .

$\sigma_y = \text{Esfuerzo resistente}$



$$\sigma_y = \frac{F}{A} ; \quad \sigma_y \cdot A - F = 0$$

Por lo tanto recordando que la función de estado límite es:

$$G(X) = R - S$$

$$G(X) = \sigma_y \cdot A - F$$

$$G(X) = \sigma_y \cdot \frac{\pi D^2}{4} - F$$

donde si llamamos a:

$$x_1 = F$$

$$x_2 = D$$

$$x_3 = \sigma_y$$

tenemos que:

$$G(X) = x_3 \cdot \frac{\pi x_2^2}{4} - x_1 \quad \text{que es una Función de estado límite explícita, función de variable aleatoria de base}$$

Donde la media, desviación estándar y coeficiente de variación se presentan a continuación:

$$m(x) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \sigma(x) = \begin{Bmatrix} 1.8 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \quad c.v. = \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$$

$$x \sim N(m_x, \sigma_x)$$

Algoritmo de optimización:

$$u_i^{(j+1)} = \left[u_i^{(j)} \cdot \alpha_i^{(j)} - \frac{G(u^{(j)})}{|\nabla G(u^{(j)})|} \right] \alpha_i^{(j)}$$

$$\alpha_i^{(j)} = \frac{|\nabla_i G(u^{(j)})|}{|\nabla G(u^{(j)})|}$$

de acuerdo que se trata de una f.d.p normal

$$u_i = \frac{x_i - m(x_i)}{\sigma(x_i)}$$

$$\therefore x_i = u_i \cdot \sigma(x_i) + m(x_i)$$

$$\nabla G(U) = \frac{\partial G(X)}{\partial u_i} = \frac{\partial G(X)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_i} \quad \text{vector gradiente de la función de estado límite}$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_1} = -1.0 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \sigma(x_1) \quad = \quad -\sigma(x_1)$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_2} = \frac{\pi}{2} \cdot x_2 \cdot x_3 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \sigma(x_2) \quad = \quad \frac{\pi}{2} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sigma(x_2)$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_3} = \frac{\pi}{4} \cdot x_2^2 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = \sigma(x_3) \quad = \quad \frac{\pi}{4} \cdot x_2^2 \cdot \sigma(x_3)$$

$$|\nabla G(U)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\nabla G(U)]^2} \quad \text{Norma de } \nabla G(U)$$

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^{(j)^2}}$$

$$P_f \approx \Phi(-\beta)$$

1^{er}. Paso

Empezamos con un vector $u = 0$

$$u_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2^{do}. Paso

Calculamos el vector x

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

3^{er}. Paso

Calculamos la función de estado límite, la cual nos va a determinar el momento en que vamos a dejar de iterar, recordando que $G(U) = 0$

$G(U)^{(1)} = 3.425$

4to. Paso

Calculamos el gradiente

$$\nabla G(U)^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1.8 \\ 1.885 \\ 0.942 \end{Bmatrix}$$

5to. Paso

Calculamos la Norma de $\nabla G(U)$

$$\|\nabla G(U)^{(1)}\| = 2.771$$

6to. Paso

Calculamos el vector alfa.

$$\alpha^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0.649 \\ 0.680 \\ 0.340 \end{Bmatrix}$$

7mo. Paso

Calculamos el vector u

$$u_i^{(1)} \cdot \alpha_i^{(1)} = 0$$

$$u_i^{(2)} = \left[0 - \frac{3.425}{2.771} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.649 \\ 0.680 \\ 0.340 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.802 \\ -0.840 \\ -0.420 \end{Bmatrix}$$

8vo. Paso

Calculamos β

$$\beta = 1.235$$

El siguiente paso que faltaría sería el cálculo de la probabilidad de falla, pero de acuerdo que el valor de $G(U)$ todavía no es igual a cero, empezamos a partir del 2do. Paso

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 7.444 \\ 1.832 \\ 2.874 \end{Bmatrix}$$

$$G(U)^{(2)} = 0.132$$

$$\nabla G(U)^{(2)} = \begin{Bmatrix} -1.8 \\ 1.654 \\ 0.791 \end{Bmatrix}$$

$$|\nabla G(U)^{(2)}| = 2.569$$

$$\alpha^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.700 \\ 0.644 \\ 0.308 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(2)} \cdot \alpha_i^{(2)} = -1.232$$

$$u_i^{(3)} = \left[-1.23 - \frac{0.132}{2.569} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.700 \\ 0.644 \\ 0.308 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.897 \\ -0.825 \\ -0.395 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.281$$

Como $G(U)$ todavía no es cero, hacemos otra iteración

$$x^{(3)} = \begin{Bmatrix} 7.615 \\ 1.835 \\ 2.882 \end{Bmatrix}$$

$$G(U)^{(3)} = 0.007$$

Ya se considera cero

$$\nabla G(U)^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1.8 \\ 1.661 \\ 0.793 \end{Bmatrix}$$

$$|\nabla G(U)^{(3)}| = 2.574$$

$$\alpha^{(3)} = \begin{Bmatrix} -0.699 \\ 0.645 \\ 0.308 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(3)} \cdot \alpha_i^{(3)} = -1.281$$

$$u_i^{(4)} = \left[-1.281 - \frac{0.007}{2.574} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.699 \\ 0.645 \\ 0.308 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.897 \\ -0.828 \\ -0.395 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.283$$

$$x^{(4)} = \begin{Bmatrix} 7.615 \\ 1.834 \\ 2.881 \end{Bmatrix}$$

$$P_f \approx \Phi(-1.283) \quad \text{Se busca en tablas de Distribución Normal}$$

$$P_f = 0.1003$$

3.4.6. EJEMPLO aplicando FORM para variables aleatorias log-normales.

Aplicando la solución al mismo problema pero suponiendo ahora que las variables aleatorias siguen una f.d.p. Log-Normal

$$y = \ln x$$

$$x = e^y$$

$$y_i = u_i \cdot \sigma(y_i) + m(y_i)$$

$$m(y) = \ln \frac{m(x)^2}{\sqrt{m(x)^2 + \sigma(x)^2}}$$

$$\sigma(y)^2 = \ln \left[1 + \frac{\sigma(x)^2}{m(x)^2} \right]$$

Retomando las $m(x)$ y $\sigma(x)$ del ejemplo anterior se transforman las medias y desviaciones estándar a $m(y)$ y $\sigma(y)$

$$m(y) = \begin{Bmatrix} 1.750 \\ 0.688 \\ 1.093 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma(y) = \begin{Bmatrix} 0.293 \\ 0.099 \\ 0.099 \end{Bmatrix}$$

$$c.v. = \begin{Bmatrix} 0.513 \\ 0.08 \\ 0.108 \end{Bmatrix}$$

De acuerdo que:

$$x = e^y \quad y \quad y_i = u_i \cdot \sigma(y_i) + m(y_i)$$

$$x = e^{u_i \cdot \sigma(y_i) + m(y_i)}$$

$$\nabla G(U) = \frac{\partial G(X)}{\partial u_i} = \frac{\partial G(X)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \quad \text{vector gradiente de la función de estado límite}$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_1} = -1.0 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \sigma(y_1) \cdot e^{u_1 \cdot \sigma_{y1} + m(y_1)} = -\sigma(y_1) \cdot e^{u_1 \cdot \sigma_{y1} + m(y_1)}$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_2} = \frac{\pi}{2} x_2 x_3 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \sigma(y_2) \cdot e^{u_2 \cdot \sigma_{y2} + m(y_2)} = \frac{\pi}{2} x_2 x_3 \cdot \sigma(y_2) \cdot e^{u_2 \cdot \sigma_{y2} + m(y_2)}$$

$$\frac{\partial G(X)}{\partial x_3} = \frac{\pi}{4} x_2^2 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = \sigma(y_3) \cdot e^{u_3 \cdot \sigma_{y3} + m(y_3)} = \frac{\pi}{4} x_2^2 \cdot \sigma(y_3) \cdot e^{u_3 \cdot \sigma_{y3} + m(y_3)}$$

1er. Paso

Empezamos con un vector $u = 0$

$$u_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2do. Paso

Calculamos el vector y

$$y^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.75 \\ 0.688 \\ 1.093 \end{Bmatrix}$$

3er. Paso

Se hace el cambio de variables

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 5.755 \\ 1.989 \\ 2.983 \end{Bmatrix}$$

4to. Paso

Calculamos la función de estado límite, la cual nos va a determinar el momento en que vamos a dejar de iterar, recordando que $G(U) = 0$

$G(U)^{(1)} = 3.513$

5to. Paso

Calculamos el gradiente

$$\nabla G(U)^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1.686 \\ 1.836 \\ 0.918 \end{Bmatrix}$$

6to. Paso

Calculamos la Norma de $\nabla G(U)$

$$|\nabla G(U)^{(1)}| = 2.656$$

7mo. Paso

Calculamos el vector alfa.

$$\alpha^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0.35 \\ 0.691 \\ 0.346 \end{Bmatrix}$$

8vo. Paso

Calculamos el vector u

$$u_i^{(1)} \cdot \alpha_i^{(1)} = 0$$

$$u_i^{(2)} = \left[0 - \frac{3.513}{2.656} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.635 \\ 0.691 \\ 0.346 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.840 \\ -0.914 \\ -0.458 \end{Bmatrix}$$

9no. Paso

Calculamos β

$$\beta = 1.235$$

El siguiente paso que faltaría sería el cálculo de la probabilidad de falla, pero de acuerdo que el valor de $G(U)$ todavía no es igual a cero, empezamos a partir del 2do. Paso

$$y^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.996 \\ 0.597 \\ 1.048 \end{Bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{Bmatrix} 7.360 \\ 1.817 \\ 2.851 \end{Bmatrix}$$

$$G(U)^{(2)} = 0.032$$

$$\nabla G(U)^{(2)} = \begin{Bmatrix} -2.157 \\ 1.464 \\ 0.732 \end{Bmatrix}$$

$$|\nabla G(U)^{(2)}| = 2.708$$

$$\alpha^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.796 \\ 0.541 \\ 0.428 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(2)} \cdot \alpha_i^{(2)} = -1.359$$

$$u_i^{(3)} = \left[-1.359 - \frac{0.032}{2.708} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.796 \\ 0.541 \\ 0.428 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1.091 \\ -0.742 \\ -0.587 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.444$$

Como $G(U)$ todavía no es cero, hacemos otra iteración

$$y^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2.069 \\ 0.654 \\ 1.035 \end{Bmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{Bmatrix} 7.922 \\ 1.849 \\ 2.815 \end{Bmatrix}$$

$$G(U)^{(3)} = -0.363$$

Como ya está cambiando de signo y no está lejos de cero, consideramos como buena hasta esta iteración.

$$\nabla G(U)^{(3)} = \begin{Bmatrix} -2.321 \\ 1.496 \\ 0.748 \end{Bmatrix}$$

$$|\nabla G(U)^{(3)}| = 2.861$$

$$\alpha^{(3)} = \begin{Bmatrix} -0.811 \\ 0.523 \\ 0.261 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(3)} \cdot \alpha_i^{(3)} = -1.426$$

$$u_i^{(4)} = \left[-1.426 - \frac{-0.363}{2.861} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.811 \\ 0.523 \\ 0.261 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(4)} = \begin{Bmatrix} 1.053 \\ -0.679 \\ -0.339 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.299$$

$$y^{(4)} = \begin{Bmatrix} 2.058 \\ 0.621 \\ 1.059 \end{Bmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{Bmatrix} 7.834 \\ 1.860 \\ 2.885 \end{Bmatrix}$$

$$P_f \approx \Phi(-1.299) \quad \text{Se busca en tablas de Distribución Normal}$$

$$P_f = 0.0968$$

3.5. MÉTODO DE SUPERFICIE DE RESPUESTA CUADRÁTICA.

En muchos casos de interés práctico no es posible disponer de la función de estado límite de manera explícita, función de variables aleatorias de base. Para esos casos, existen otros métodos ligados a los métodos de confiabilidad para resolver el problema y evaluar la probabilidad de falla. Estos métodos son llamados de Superficie de Respuesta (*Surface of Response Approach*), la idea central es la utilización de una aproximación de la Superficie de estado límite mediante un polinomio [Rjashekhar]. Para ello es necesario repetir el cálculo determinista para un cierto número de puntos seleccionados alrededor del punto de diseño y después hacer un análisis de regresión. El nivel de aproximación depende del nivel de conocimiento del punto de diseño y del grado de no linealidad de la función de estado límite real.

Los métodos de Superficie de Respuesta fueron desarrollados en los años 50's como una herramienta para crear modelos empíricos con la ayuda de experimentación secuencial, para el análisis de un cierto dominio de interés y para descubrir y analizar las variables más importantes. En nuestros días existen programas de tratamiento estadístico que utilizan esta metodología (STATGRAPHICS, por ejemplo).

Podemos utilizar los métodos de Superficie de Respuesta para dar solución a las preguntas siguientes:

- ¿Cómo un conjunto de variables en una región dada influye en la respuesta?
- ¿Cuál es el conjunto de variables que producen un máximo (o un mínimo) de la respuesta?
- ¿Cuál es la forma de la superficie de los alrededores de esta respuesta máxima?

Los métodos de Superficie de Respuesta fueron utilizados como una alternativa para el análisis de la confiabilidad de estructuras, están fundados en la aproximación de la función de estado límite mediante un polinomio de variables aleatorias en el cual los coeficientes son desconocidos.

Para completar un estudio de confiabilidad estructural cuando no disponemos de las funciones de estado límite explícita utilizando este método los pasos siguientes son necesarios:

- Seleccionar las variables y el conjunto de puntos (X_i)
- Para cada conjunto obtener una realización de la respuesta ($G(X)^i$)
- Obtener los coeficientes para aproximar la función de estado límite ($Q(X)$)
- Realizar el análisis de confiabilidad a la superficie aproximada β
- Analizar los resultados

El método de Superficie de Respuesta Cuadrática [OFM TESIS] forma parte de este tipo de métodos. Como se dijo, se utiliza en los casos en los que no disponemos de la función de estado límite $G(X)$ de manera explícita en función de variables aleatorias de base. El método permite la aproximación de la superficie de estado límite con una superficie cuadrática partiendo de algunas realizaciones. Nosotros podemos obtener esta aproximación mediante una función polinomial cuadrática:

$$Q(X_i) = c + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} X_i X_j \quad (3.47)$$

donde X_i es el vector de variables aleatorias y a_i , b_{ij} y c son las constantes que debemos determinar.

La función $Q(X_i)$ se define por un número mínimo de puntos X_i^l , donde $l = 1, \dots, R$, y donde $R_{min} = (n+1)(n+2)/2$, y n es el número de variables aleatorias. Este método consiste en minimizar por mínimos cuadrados:

$$\sum_{i=1}^R [Q(X_i^l) - G(X_i^l)]^2 \quad (3.48)$$

donde $G(X_i^l)$ son las realizaciones de la función de estado límite y $Q(X_i^l)$ su aproximación.

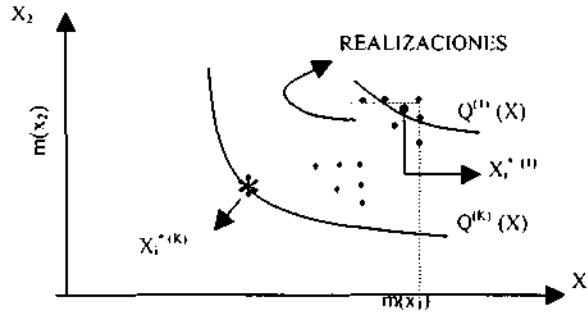


Fig.3.2 Método SRQ [OFM TESIS]

La construcción de $Q(X)$ se hace a partir de un conjunto K de realizaciones $G(X_i)$. La ec. (3.47) permite el cálculo de una aproximación de $\beta^{(K)}$ y de un punto de falla $X_i^{*(K)}$. Una nueva aproximación $(K+1)$ se obtiene a partir de realizaciones situadas alrededor de $X_i^{*(K)}$. Algunas iteraciones nos permiten aproximar la función de estado límite y el cálculo del índice β . La fig. 3.2 muestra esquemáticamente el método SRQ.

Así, si C es el vector de coeficientes desconocidos, ellos son solución de un sistema de ecuaciones lineales:

$$PC = H \quad (3.49)$$

donde P es una matriz y H es un vector función de las realizaciones.

Para la construcción del sistema lineal, el vector de coeficientes desconocidos se define por:

$$C = \{c, a_i, b_{ii}, b_{ij}\}' \quad (3.50)$$

$$(1), (i = 1, n), (i = 1, n)(i = 1, n-1; j = i+1, n)$$

y el vector de combinaciones de grado ≤ 2 de las realizaciones del conjunto de variables aleatorias es:

$$X = \{1, x_i, x_i^2, x_i x_j\}' \quad (3.51)$$

$$(1), (i = 1, n), (i = 1, n)(i = 1, n-1; j = i+1, n)$$

Tenemos entonces:

$$\mathcal{Q}(X^l) = \mathcal{Q}^l = X^l C = C^l X \quad (3.52)$$

Si G^l es la realización l es necesario minimizar la **ecuación (3.48)** con respecto a C :

$$\sum_{l=1}^R |\mathcal{Q}^l - G^l|^2 \quad (3.53)$$

Obtenemos entonces:

$$\sum_{l=1}^R (X^l X^{lH} C) = \sum_{l=1}^R G^l X^l \quad (3.54)$$

$$[P] = \sum_{l=1}^R (X^l X^{lH}) \quad \{H\} = \sum_{l=1}^R (G^l X^l) \quad (3.54bis)$$

Estando P y H definidos, es suficiente con resolver el sistema de ecuaciones lineales para obtener los coeficientes C .

Un ejemplo del método de SRQ se describe a continuación:

3.5.1. EJEMPLO aplicando Superficie de Respuesta Cuadrática.

El ejemplo que se presenta a continuación, trata la evaluación de la confiabilidad de una aproximación cuadrática de la función límite del cilindro a tensión. Aunque la función límite es explícita, nos sirve para mostrar la utilización del método SRQ y su nivel de aproximación.

Entonces sean:

$$x_1 = F$$

$$x_2 = D$$

$$x_3 = \sigma_y$$

$$m(x) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \sigma(x) = \begin{Bmatrix} 1.8 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{Bmatrix}$$

APROXIMACIÓN A LA FUNCIÓN DE ESTADO LÍMITE

$$Q(X_i) = c + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} X_i X_j$$

$$[P]\{c\} = [H]$$

$$[P] = \{X_1\}\{X_1\}' + \{X_2\}\{X_2\}' + \dots + \{X_{10}\}\{X_{10}\}'$$

$$[H] = \{X_1\}G_1 + \{X_2\}G_2 + \dots + \{X_{10}\}G_{10}$$

Para determinar los valores de G_1 hasta G_{10} sustituimos los valores de x en la función de estado límite

$$X = \left\{ 1, x_i, x_{ii}^2, x_{ij} \right\}_{(1), (i=1, n), (i=1, n), (i=1, n-1; j=i+1, n)}$$

$$X = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3\}$$

$$G_1 = (\bar{x}_1, x_2, x_3) = 3.425$$

$$G_2 = (\bar{x}_1 + \sigma_{x_1}, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 1.625$$

$$G_3 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 - \sigma_{x_1}, \bar{x}_3) = 1.634$$

$$G_4 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 - \sigma_{x_3}) = 2.482$$

$$G_5 = (\bar{x}_1 - 2\sigma_{x_1}, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = -0.175$$

$$G_6 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 - 2\sigma_{x_2}, \bar{x}_3) = 0.032$$

$$G_7 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 - 2\sigma_{x_3}) = 1.540$$

$$G_8 = (x_1 + \sigma_{x_1}, x_2 - \sigma_{x_2}, x_3) = -0.166$$

$$G_9 = (\bar{x}_1 + \sigma_{x_1}, \bar{x}_2, \bar{x}_3 - \sigma_{x_3}) = 0.682$$

$$G_{10} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 - \sigma_{x_2}, \bar{x}_3 - \sigma_{x_3}) = 0.871$$

$$X_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 36 \\ 4 \\ 9 \\ 12 \\ 18 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7.8 \\ 2 \\ 3 \\ 60.84 \\ 4 \\ 9 \\ 15.6 \\ 23.4 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad X_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1.8 \\ 3 \\ 36 \\ 3.24 \\ 9 \\ 10.8 \\ 18 \\ 5.4 \end{Bmatrix} \quad X_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 2.7 \\ 36 \\ 4 \\ 7.29 \\ 12 \\ 16.2 \\ 5.4 \end{Bmatrix} \quad X_5 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 9.6 \\ 2 \\ 3 \\ 92.16 \\ 4 \\ 9 \\ 19.2 \\ 28.8 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X_6 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1.6 \\ 3 \\ 36 \\ 2.56 \\ 9 \\ 9.6 \\ 18 \\ 4.8 \end{Bmatrix} & X_7 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 2.4 \\ 36 \\ 4 \\ 5.76 \\ 12 \\ 14.4 \\ 4.8 \end{Bmatrix} & X_8 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 7.8 \\ 1.8 \\ 3 \\ 60.84 \\ 3.24 \\ 9 \\ 14.04 \\ 23.4 \\ 5.4 \end{Bmatrix} & X_9 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 7.8 \\ 2 \\ 2.7 \\ 60.84 \\ 4 \\ 7.29 \\ 15.6 \\ 21.06 \\ 5.4 \end{Bmatrix} & X_{10} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1.8 \\ 2.7 \\ 36 \\ 3.24 \\ 7.29 \\ 10.8 \\ 16.2 \\ 4.86 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\{c\} = [P]^{-1} \{H\}$$

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} 8.635 \\ -0.999 \\ -9.022 \\ -2.888 \\ 0.000 \\ 2.362 \\ 0.006 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 2.999 \end{Bmatrix}$$

Sustituimos el vector c en la función $Q(X)$

$$Q(X) = 8.635 - 0.999x_1 - 9.022x_2 - 2.888x_3 + 0x_1^2 + 2.362x_2^2 + 0x_3^2 + 0x_1x_2 + 0x_1x_3 + 2.999x_2x_3$$

FUNCION DE ESTADO LIMITE

$$Q(X) = 8.635 - 0.999x_1 - 9.022x_2 - 2.888x_3 + 2.362x_2^2 + 2.999x_2x_3$$

Aplicando el método de FORM para variables aleatorias normales

$$\nabla Q(U) = \frac{\partial Q(X)}{\partial u_i} = \frac{\partial Q(X)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i} \quad \text{vector gradiente de la función de estado límite}$$

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_1} = -0.999 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \sigma(x_1) \quad = \quad -0.999\sigma(x_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(X)}{\partial x_2} &= -9.022 + 4.724x_2 + 2.999x_3 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = \sigma(x_2) \\ &= (-9.022 + 4.724x_2 + 2.999x_3) \cdot \sigma(x_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_3} = -2.888 + 2.999x_2 \quad * \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = \sigma(x_3) \quad = \quad (-2.888 + 2.999x_2) \cdot \sigma(x_3)$$

1er. Paso

$$u_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2do. Paso

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

3er. Paso

$$Q(U)^{(1)} = 3.375$$

4to. Paso

$$\nabla G(U)^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1.798 \\ 1.885 \\ 0.933 \end{Bmatrix}$$

5to. Paso

$$|\nabla G(U)^{(1)}| = 2.767$$

6to. Paso

$$\alpha^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0.650 \\ 0.681 \\ 0.337 \end{Bmatrix}$$

7mo. Paso

$$u_i^{(1)} \cdot \alpha_i^{(1)} = 0$$

$$u_i^{(2)} = \left[0 - \frac{3.375}{2.767} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.650 \\ 0.681 \\ 0.337 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.793 \\ -0.831 \\ -0.411 \end{Bmatrix}$$

8_{vo}. Paso

$$\beta = 1.219$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 7.427 \\ 1.834 \\ 2.877 \end{Bmatrix}$$

$$G(\mathbf{U})^{(2)} = 0.1329$$

$$\nabla G(\mathbf{U})^{(2)} = \begin{Bmatrix} -1.798 \\ 1.654 \\ 0.784 \end{Bmatrix}$$

$$\|\nabla G(\mathbf{U})^{(2)}\| = 2.566$$

$$\alpha^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.700 \\ 0.644 \\ 0.305 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i^{(2)} \cdot \alpha_i^{(2)} = -1.216$$

$$\mathbf{u}_i^{(3)} = \left[-1.216 - \frac{0.129}{2.566} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.700 \\ 0.644 \\ 0.305 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.886 \\ -0.815 \\ -0.386 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.264$$

Como $Q(U)$ todavía no es cero, hacemos otra iteración

$$x^{(3)} = \begin{Bmatrix} 7.595 \\ 1.837 \\ 2.884 \end{Bmatrix}$$

$$G(U)^{(3)} = 0.004 \quad \text{Ya se considera cero}$$

$$\nabla G(U)^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1.798 \\ 1.661 \\ 0.793 \end{Bmatrix}$$

$$|\nabla G(U)^{(3)}| = 2.571$$

$$\alpha^{(3)} = \begin{Bmatrix} -0.699 \\ 0.646 \\ 0.306 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(3)} \cdot \alpha_i^{(3)} = -1.264$$

$$u_i^{(4)} = \left[-1.264 - \frac{0.004}{2.571} \right] \cdot \begin{Bmatrix} -0.699 \\ 0.646 \\ 0.306 \end{Bmatrix}$$

$$u_i^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.884 \\ -0.817 \\ -0.387 \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1.265$$

$$x^{(4)} = \begin{Bmatrix} 7.591 \\ 1.837 \\ 2.884 \end{Bmatrix}$$

$P_f \approx \Phi(-1.265)$ Se busca en tablas de Distribución Normal

$P_f = 0.1038$

4. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE ESFUERZO PARA TUBERÍAS ENTERRADAS³.

4.1. INTRODUCCIÓN.

El presente capítulo muestra una descripción de los métodos de análisis de esfuerzos de tuberías o líneas de conducción o transporte de hidrocarburos. A manera de introducción presentamos un resumen de las diferentes etapas por las que atraviesan los hidrocarburos para resaltar la participación tan importante que tienen los diferentes ductos que intervienen en nuestros sistemas.

De los diferentes pozos de producción de hidrocarburos obtenemos gas, aceite y agua, mezclados con diferentes tipos de productos químicos (líquidos, gaseosos y sólidos). La producción es obtenida por presión natural del campo y se llama producción primaria. Las presiones son elevadas y pueden llegar hasta 4000 lb/plg² (281.23 Kg/cm²).

Del pozo pasa el producto a un sistema regulador de presión, para dar la presión requerida en el proceso, dependiendo de la presión de salida del crudo.

³ El contenido de este capítulo se obtuvo de la referencias [B31.3, B31.4, B31.8 e IMP]

El siguiente paso es la conducción del producto, mediante una línea llamada de descarga o de escurrimiento, hacia un cabezal de recolección. La tarea del cabezal es juntar la producción de los diferentes pozos. De ahí se envía a una batería de separación, nuevamente mediante tuberías o líneas de conducción de mayor diámetro que las de descarga. Ambas van enterradas o sumergidas (en el caso de los pantanos).

La función principal de las baterías de separación es separar el gas, crudo y el agua. La batería cuenta con separadores, tanques de almacenamiento, soloaires, equipos y sistemas de control, equipos contra incendios (aspersores, tanques, etc.).

Los separadores pueden ser de dos tipos:

- Separadores horizontales los cuales pueden ser bifásicos (que solamente separan la fase gaseosa y la líquida) o trifásicos (que pueden separar gas, aceite y agua).
- Separadores verticales, que se utilizan cuando en la alimentación la fase gaseosa se presenta en mayor que las otras fases.

Los soloaires son sistemas para el enfriamiento del gas, son como radiadores enormes horizontales con un ventilador. Por sus conductos entra el gas después del proceso de separación y se enfría.

Dentro de la batería de separación también hay tuberías que alimentan los separadores y reciben los diferentes productos, estas tuberías son aéreas o exteriores.

Los productos separados de la batería se llevan por tuberías independientes a diferentes plantas petro-químicas, estaciones de bombeo, endulzadoras, criogénica, etc. Dentro de las cuales también hay un gran número de tuberías.

En la breve descripción anterior podemos apreciar claramente que las diferentes etapas están conectadas por tuberías o líneas de conducción. Éstas pueden ser, de manera general, enterradas, aéreas o submarinas, con sus diferentes interfaces. En el presente trabajo trataremos únicamente los casos de tuberías enterradas.

Las tuberías como sistemas estructurales, no son más que vigas tridimensionales, de sección circular. Para solucionar el sistema estructural utilizamos algún método matricial (flexibilidades, rigideces, elementos finitos) del cual obtenemos los momentos, cortantes y fuerzas axiales que finalmente se transforman en esfuerzos (normales, torsionantes, etc.).

Una de las particularidades de los ductos son las solicitaciones; por ejemplo, además de las cargas gravitacionales, tenemos presión interna (algunas veces muy importantes), vibración (de equipos o por flujo), esfuerzos de temperatura, muy importantes cuando las longitudes son muy grandes. Debemos también, para tuberías sumergidas, realizar un análisis de flotabilidad, etc. Existen diversos parámetros adicionales para las tuberías submarinas.

Los sistemas de tuberías enterradas, representan sistemas complejos en donde existe el efecto de interacción suelo-tubo que le da una particularidad especial para su comportamiento estructural. Como en otros problemas estructurales, se tiene un sistema con un número infinito de grados de libertad para las cuales resultaría prácticamente imposibles obtener una respuesta al estar sujetas a distintos efectos como: temperatura, presión interna, interacción suelo-tubo, presión externa, sismo, etc. Por lo cual, es necesario utilizar modelos matemáticos estructurales que sean representativos del comportamiento real de dichas tuberías.

El modelo matemático estructural, consiste básicamente en discretizar la tubería a través de "ELEMENTOS FINITOS" o tramos de tuberías, las cuales se unen o ensamblan en secciones denominadas "NODOS" y representan el sistema real.

Los efectos de temperatura, presión y de interacción suelo-tubo pueden considerarse distribuidos a lo largo de los tramos de tuberías (vigas sobre fundación elástica). Sin embargo, para tomar en cuenta el efecto de interacción con el suelo, que depende básicamente de las propiedades del suelo, resulta más práctico considerar elementos discretos tipo "RESORTE" en tres direcciones ortogonales (teoría de Winkler).

En tuberías enterradas como en gasoductos, oleoductos y gasolinoductos usualmente se manejan longitudes muy grandes, lo cual da lugar que, aún cuando las temperaturas sean muy bajas comparándolas con las de líneas aéreas de plantas petroquímicas, se generen desplazamientos bastante grandes que ocasionan problemas complejos y riesgosos si no se diseña adecuadamente el comportamiento estructural a través de su análisis de flexibilidad y de esfuerzos.

Por lo anterior, cuando se llegan a manejar temperaturas del orden de 70° C o mayores, se dice que se trata de tuberías a **temperaturas elevadas**. Se ha dado el caso que tuberías que operan a temperaturas de ese orden y atraviesan terrenos de poca resistencia, provocan levantamientos en los tramos donde emergen, llegando en algunos casos, a dejar de apoyarse

en tramos muy grandes, lo cual provoca concentraciones de esfuerzos que ponen en peligro la operación correcta de las líneas de conducción.

4.2. CARACTERÍSTICAS ÚNICAS.

Para entender los requerimientos de los códigos y visualizar los problemas involucrados, en el análisis de esfuerzos de una tubería, se necesita diferenciar una tubería enterrada de una que se encuentre dentro de una planta. Las características propias de una tubería son:

- Esfuerzos permisibles altos.

Una tubería tiene una forma bastante simple. Es circular y a menudo se desarrolla por varios kilómetros sin cambiar de dirección. Por ello los cálculos de los esfuerzos, están basados en fórmulas simples de equilibrio estático que son muy precisas. Aunque los esfuerzos producidos son predecibles, los esfuerzos permisibles usados, son considerablemente mayores que los que se dan para los tubos instalados en una planta.

- Tubos con alto límite elástico (fluencia)

Para aumentar el esfuerzo permisible el primer obstáculo es el límite elástico. No obstante una tubería operando más allá del límite elástico, puede no crear problemas estructurales, pero si excesivas deformaciones y la posibilidad de que a continuación se produzcan esfuerzos no deseables. Por lo tanto, las tuberías con una presión muy alta y con un límite elástico muy alto, son usadas para tuberías enterradas o aéreas actualmente. La condición es que los esfuerzos permisibles, estén basados exclusivamente, en el valor del límite elástico.

- Elongación por alta presión.

El movimiento de una tubería, se debe normalmente a la expansión de una línea muy larga, sujeta a cambios fuertes de temperatura. Los alargamientos debidos a la presión interior del fluido, que no van considerados en los análisis de esfuerzos de tubos en plantas industriales, contribuyen en mucho al movimiento total y deben estar incluidos en el análisis para tuberías enterradas.

- Interacción tubo-suelo.

Cuando la longitud enterrada de la tubería es muy grande, cualquier movimiento del tubo, tiene que vencer las fuerzas del suelo, las cuales se dividen en dos clases: Fuerzas de fricción producidas por el deslizamiento y la presión resultante del empuje. La parte más importante en una tubería enterrada, es la correspondiente a la interacción tubo-suelo, lo cual no sucede en el análisis de tubos instalados en plantas.

4.2.1. Expansión y Flexibilidad.

Una tubería enterrada o superficial, tiene una porción sin movimiento (restringida) y otra con movimiento (no restringida). La parte con movimiento, producirá esfuerzos significativos de flexión. En la figura 4.1(a) se muestran una parte de la tubería restringida mediante anclas y guías y la otra libre con movimiento. En la figura 4.1(b) se ve una gran porción de la tubería sin movimiento, debida exclusivamente a la fricción del suelo. Cuando una línea es presionada y calentada, las esquinas C, D y G se moverán. El movimiento ocasionará una fuerza de fricción, proporcional al tramo del tubo movido. Si la fuerza total de fricción desarrollada a lo largo del tubo es suficiente para contrarrestar la expansión, ésta cesará. Los tramos B, E y F, donde no hay movimiento o éste cesa, son denominados puntos de anclaje virtual y AB y EF, son denominados completamente restringidos.

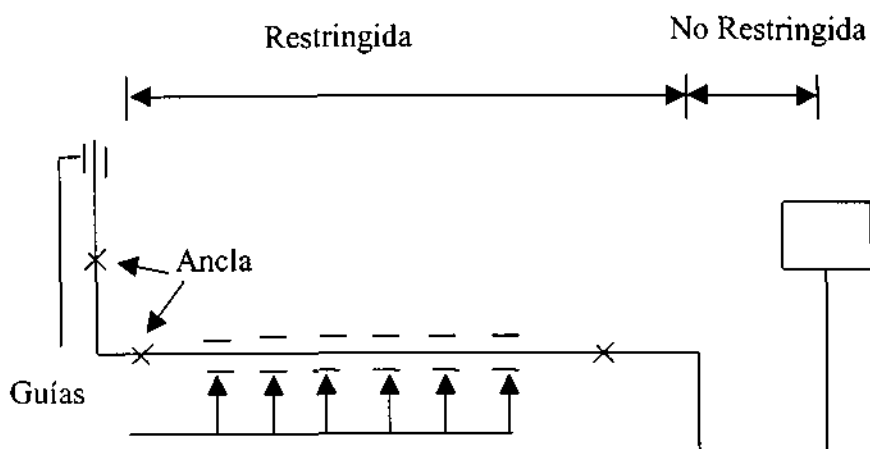


Fig. 4.1(a) Tubería superficial

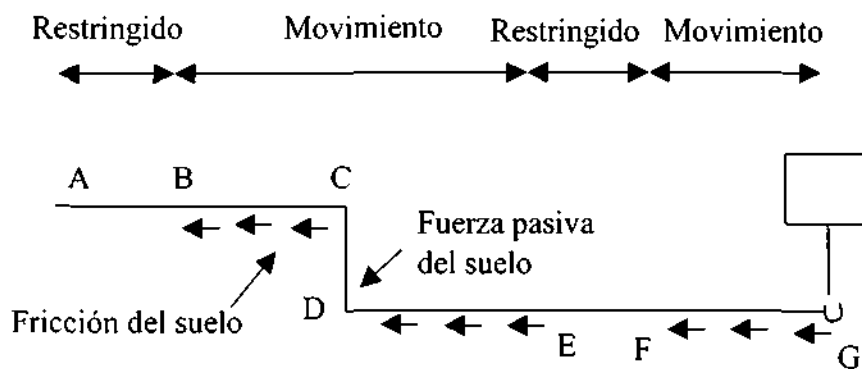


Fig. 4.1(b) Tubería enterrada

4.2.2. Tramos Restringidos.

Para prevenir movimientos, se requiere una fuerza que devuelva al tubo de su posición expandida o contraída a la original. Como se muestra en la figura 4.2(a), en una línea completamente restringida, el esfuerzo de la presión longitudinal se absorbe por las anclas o la fricción del suelo.

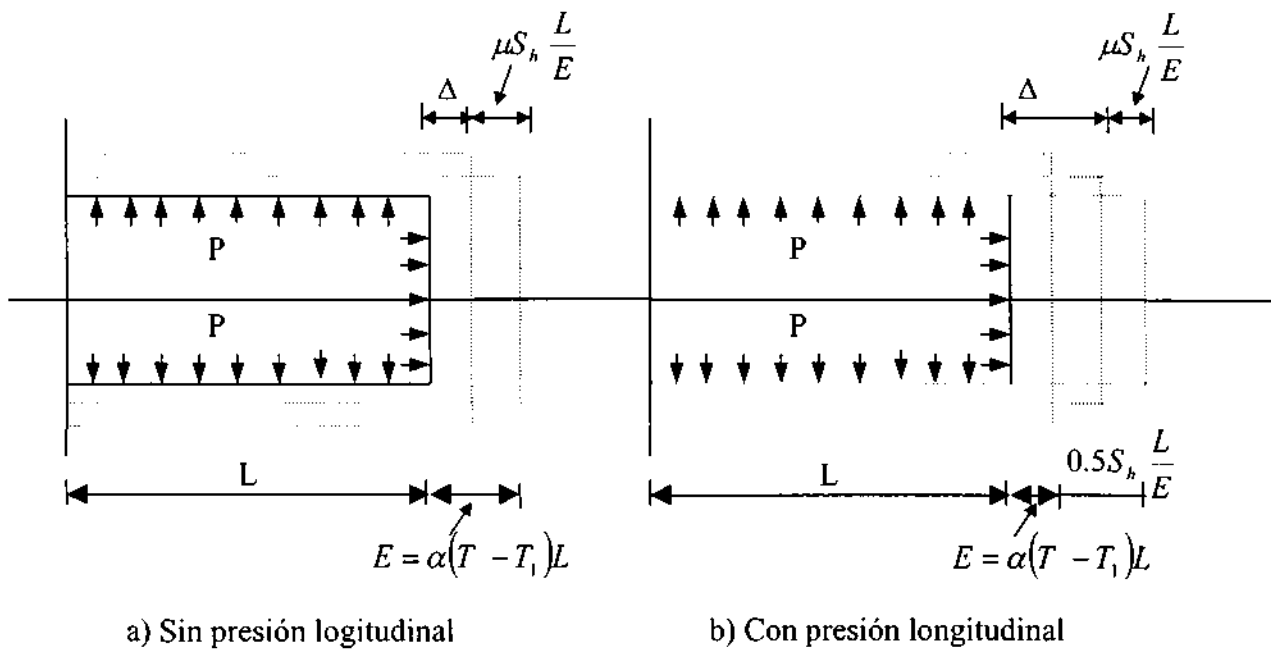


Fig. 4.2 Expansión libre del tubo

4.3. LASTRADO EN TUBERÍAS.

En aquellos tramos de tubería que atraviesen zonas pantanosas o inundables y zonas susceptibles a deslaves, deben lastrarse, a fin de evitar inestabilidades y riesgos por desplazamientos transversales, es decir por flotación de la tubería.

Para evitar la flotación y la inestabilidad de la tubería, se debe cumplir con el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$W_T + W_C - W_L = F_N \quad (4.1)$$

donde:

W_T = Peso de la tubería

W_C = Peso del lastre de concreto

W_L = Peso del líquido desalojado por el tubo

F_N = Flotación negativa del tubo lastrado

sí:

t_c = Espesor del lastre de concreto (pulgadas)

ρ_L = Densidad del líquido desalojado. Se recomienda 1.15 Kg/dm³ para zonas pantanosas

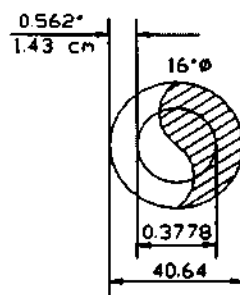
ρ_c = Densidad del lastre de concreto. Concreto común 2,25 Kg/dm³.

ϕ_E = Diámetro exterior incluyendo anticorrosivos (plg.)

Al subsistir en la ecuación de equilibrio se obtiene:

$$t_c = \left(\frac{1.98(F_N - W_T) + \rho_c \phi_E^2}{\rho_c - \rho_L} \right)^{1/2} - \phi_E \quad (4.2)$$

4.4. REVISIÓN POR FLOTABILIDAD.



Para un tubo:

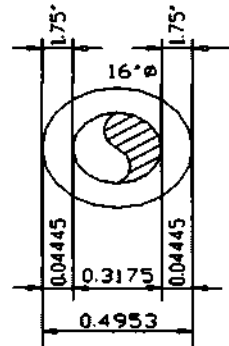
$$\phi = 16" = 0.4064m$$

$$t = 0.562" = 0.1042m$$

$$\gamma_{acero} = 7856 \frac{Kg}{m^3}$$

$$W_{tubo} = 7856 * 175.796cm^2 / 10,000 = 138.10Kg / m$$

Peso del lastre:



$$A = \frac{\pi}{4} [0.4953^2 - 0.4064^2]$$

$$A = 0.06296m^2$$

$$P_{Lastre} = 2600Kg / m^3 * 0.06296m^2$$

$$P_{Lastre} = 163.69Kg / m$$

$$P_{Seco} = P_{Lastre} + P_{Tubo} = 163.69 + 138.10$$

$$P_{Seco} = 301.79Kg$$

$$\gamma_{agua} = 1000Kg / m^3$$

$$A_{agua} = \frac{\pi}{4} (0.4953)^2 = 0.193m^2$$

$$W_{agua} = 1000 * 0.193 = 193Kg / m$$

Peso sumergido:

$$W_{sumergido} = W_{Seco} - W_{Agua}$$

$$W_{sumergido} = 301.79 - 193 = 108.69Kg / m$$

$$Coef. de Flot. Neg. = \frac{W_{Seco}}{W_{Agua}} = \frac{301.79}{193.00} = 1.56 > 1.0$$

4.5. LOCALIZACIÓN DE ANCLAS.

La localización de anclas o “muertos de anclaje” resulta uno de los aspectos más importantes a considerar en el análisis de flexibilidad de tuberías enterradas, pues el comportamiento estructural de la tubería depende en gran medida de una buena localización de ellas. Un exceso de anclas, además de costoso, puede dar lugar a que se tengan tramos demasiado esforzados, lo cual pone en riesgo su comportamiento, por el contrario, también una falta de anclajes puede dar lugar, principalmente cuando se tienen suelos muy pobres, que la tubería tenga un comportamiento estructural inestable y que se tengan grandes tramos sin apoyo o sin contacto con el suelo, sobre todo en aquellas zonas donde la tubería emerge por condiciones naturales y necesarias para su operación, lo cual también da lugar a grandes deformaciones y esfuerzos que ponen en riesgo su confiabilidad de operación.

La localización de las anclas depende de la trayectoria y de los cambios de dirección que tenga la tubería a lo largo de su recorrido, así como de los accidentes topográficos y obras civiles que sea necesario cruzar.

Existen en general varias alternativas de número y localización, pero la más adecuada será aquella en que las fuerzas sobre los muertos de anclaje y los esfuerzos a lo largo de la tubería, son bajos, lo cual es una garantía de un buen comportamiento.

Para lograr una selección adecuada tanto en su número como en su localización en general se deberá seguir un proceso iterativo, es decir, con base en la experiencia y en el conocimiento de algunos parámetros como: longitud activa y cambios de dirección horizontal y de nivel; se propondrá una localización y número de anclas, se realizará el análisis de flexibilidad, y en base a los resultados de fuerzas y esfuerzos obtenidos, se realizarán los ajustes y correcciones necesarias; llevando a cabo nuevos análisis de flexibilidad hasta lograr el objetivo. Esto en principio podría parecer muy costoso, sin embargo, ello realmente no tiene efectos significativos respecto al costo de construcción y de fabricación, sí garantizará una operación confiable y sin riesgos.

4.6. INTERPRETACIÓN Y ALCANCES DE CÓDIGOS.

Los códigos que usualmente se emplean para el diseño de tuberías son: el Código ASME/ANSI B31.3, ASME/ANSI B31.4, ASME/ANSI B31.8

4.6.1. Código ASME/ANSI B31.3.

El código ANSI B31.3 abarca lo que son tuberías para plantas químicas y refinerías de petróleo.

Él describe los requisitos para los materiales, diseño, fabricación, ensamble, montaje, erección, examen inspección y prueba de los sistemas de tubería sujetos a presión o vacío.

Este código aplica a sistemas de tuberías que manejan cualquier fluido, incluyendo sólidos fluidizados y a todo tipo de servicios, incluyendo productos químicos brutos, intermedios y terminados, aceites y otros productos del petróleo, gas, vapor, aire, agua y refrigerantes, excepto los indicados en **(a)** o **(b)**.

Excepto los sistemas excluidos en **(b)**, este código cubre todas las tuberías dentro de los límites de propiedad de las instalaciones empleadas en el procesamiento o manejo de productos químicos, petroleros o similares. Por ejemplo, plantas químicas, refinerías de petróleo, terminales de carga, plantas procesadoras de gas natural (incluyendo instalaciones para gas natural líquido), plantas de almacenamiento de crudo, plantas de derivados y patios de tanques.

Tubería para gases (incluyendo aire) no incluidas en el alcance de cualquier sección del Código, pueden ser diseñadas, fabricadas, inspeccionadas y probadas de acuerdo con los requisitos de este código, cuando la tubería esté en plantas, edificios e instalaciones similares.

(a) Tubería de equipo paquete

La tubería que interconecta piezas individuales o pasos de equipo dentro de un ensamble de equipo paquete, debe estar de acuerdo con B31.3 excepto que la tubería de refrigeración paquete pueda cumplir, ya sea con B31.3 o B31.4.

(b) Este código excluye lo siguiente:

- Sistemas de tuberías diseñadas para presión manométrica interna de cero a arriba de cero pero menor de 15 psi, a condición que el fluido manejado no sea flamable, tóxico o dañino al cuerpo humano y su temperatura de diseño sea de -20°F (-29°C) a 366°F (186°C).
- Tuberías, cabezales, cruce en arco y distribuidores de calentadores a fuego directo, los cuales son internos al recinto del calentador.
- Recipientes a presión, cambiadores de calor, bombas compresores y otros equipos para el manejo y procesamiento de fluidos, incluyendo tuberías internas y conexiones para tuberías exteriores.
- Líneas localizadas dentro de las propiedades de la compañía que se regulan con el Código B31.4 o B31.8 donde aplican normas gubernamentales.
- Sistemas de protección contra incendio construidas en acuerdo con las compañías aseguradoras u otros estándares de ingeniería de protección reconocidos.

4.6.2. Código ASME/ANSI B31.4.

El código ANSI B31.4 abarca lo que son sistemas de transporte de líquidos para hidrocarburos, gas de petróleo, amoniaco anhidro y alcoholes.

Este código prescribe requisitos mínimos para el diseño, materiales, construcción, ensamble, inspección y pruebas de tuberías que transportan líquidos tales como aceite crudo, gas de petróleo licuado, alcohol líquido, amoníaco anhidro líquido, y productos del petróleo líquidos, entre las instalaciones del producto, patio de tanques, plantas procesadoras de gas natural, refinerías, estaciones, plantas de amoníaco, terminales (marinas, de ferrocarril, de camiones) y otros puntos de entrega y recibo.

La tubería consiste de tubo, bridas, tornillerías, empaque, válvulas, piezas de alivio, accesorios y otros componentes de tuberías. También incluye suspensores, soportes y otros equipos necesarios para prevenir el sobreesfuerzo de partes contenedoras de presión. No incluye estructuras de soporte como marcos de edificios, cimentaciones, etc.

Tuberías primarias y auxiliares de amoníaco anhidro y petróleo líquido en terminales (marinas, de ferrocarril y de camiones) patios de tanques, estaciones de bombeo, estaciones reductoras de presión, estaciones medidoras, incluyendo trampas, filtros y curvas de expansión.

Tanques de almacenamiento y trabajo, incluyendo tubería para almacenamiento fabricada de tubos y accesorios y tubería interconectando estas instalaciones.

Tuberías de amoníaco anhidro y petróleo líquido localizados en lugares designados para tales líneas dentro de las refinerías de petróleo y plantas de gasolina naturales, procesamiento de gas y amoníacos.

Aquellos aspectos de operación y mantenimiento de los sistemas de tubería de transporte de amoníaco anhidro y petróleo líquidos relacionados con la seguridad y protección del público general y personal de las compañías de operación, medio ambiente, propiedades y sistemas de tubería

Este código no aplica a:

Líneas auxiliares como tuberías de agua, aire, vapor, aceites lubricantes, gas y combustibles.

Recipientes a presión, cambiadores de calor, bombas, medidores y equipos semejantes incluyendo tuberías internas y conexiones

Tuberías diseñadas para presión interna:

- (1) Igual o debajo de 15 psi (1 bar) de presión manométrica sin importar la temperatura.
- (2) Arriba de 15 psi de presión manométrica si la temperatura de diseño es debajo de menos 20°F (-30°C) o arriba de 250°F (120°C).

Tuberías usadas en los pozos de aceite, cabezales de pozos separadores de gas y de aceite, tanque de producción de aceite crudo, otras instalaciones de producción y tuberías interconectando estas instalaciones.

Refinerías de petróleo, gasolina natural, plantas de proceso de gas y amoníaco.

Tuberías de transporte y distribución de gas.

Diseño y fabricación de piezas patentadas de equipos aparatos o instrumentos.

4.6.3. Código ASME/ANSI B31.8.

El código ANSI B31.8 abarca lo que son sistemas de tuberías para transporte y distribución de gas.

Este código cubre el diseño, fabricación, instalación, inspección, pruebas y aspectos de seguridad de la operación y mantenimiento de sistemas de transporte y distribución de gas, incluyendo gasoductos, estaciones de compresión de gas, estaciones de regulación y medición de gas, tuberías de gas y líneas de servicio hasta el medidor del consumidor. Se incluyen en el alcance de este código, equipos de almacenamiento de gas del tipo de tubería cerrada, fabricada o forjada del tubo o del tubo y accesorios y líneas de almacenamiento de gas.

Los requisitos de este código también cubren las condiciones para el uso de los elementos de los sistemas de tubería, incluyendo tornillerías, empaques, reguladores, recipientes a presión, amortiguadores de pulsación y válvulas de alivio.

Este código no es aplicable para:

El diseño y manufactura de recipientes a presión cubiertos por el código ASME, calderas y recipientes a presión.

Tuberías con temperaturas del metal arriba de 450°F (232°C) o debajo de -20°F (-30°C).

Tuberías después del medidor del consumidor.

Tuberías de refinерías de petróleo o plantas de extracción de gasolina natural, tuberías en plantas de tratamiento de gas diferentes a la tubería troncal de gas y otros tipos de plantas procesadoras instaladas como parte del sistema de transporte de gas, plantas manufactureras de gas, plantas industriales o minas.

Tuberías de venteo para operar a presiones atmosféricas para gases de desecho de cualquier tipo.

Cabezales de pozo, incluyendo válvulas de control, líneas de flujo entre el cabezal del pozo y la trampa o separador y tubería de revestimiento o tuberías en pozos de gas o petróleo.

Diseño y manufactura de piezas patentadas de equipos, aparatos e instrumentos.

Diseño y manufactura de cambiadores de calor.

Sistemas de tuberías para el transporte de petróleo líquido.

**ALCANCE DE LOS CODIGOS ASME
B31.3, B34.4 y B31.8**

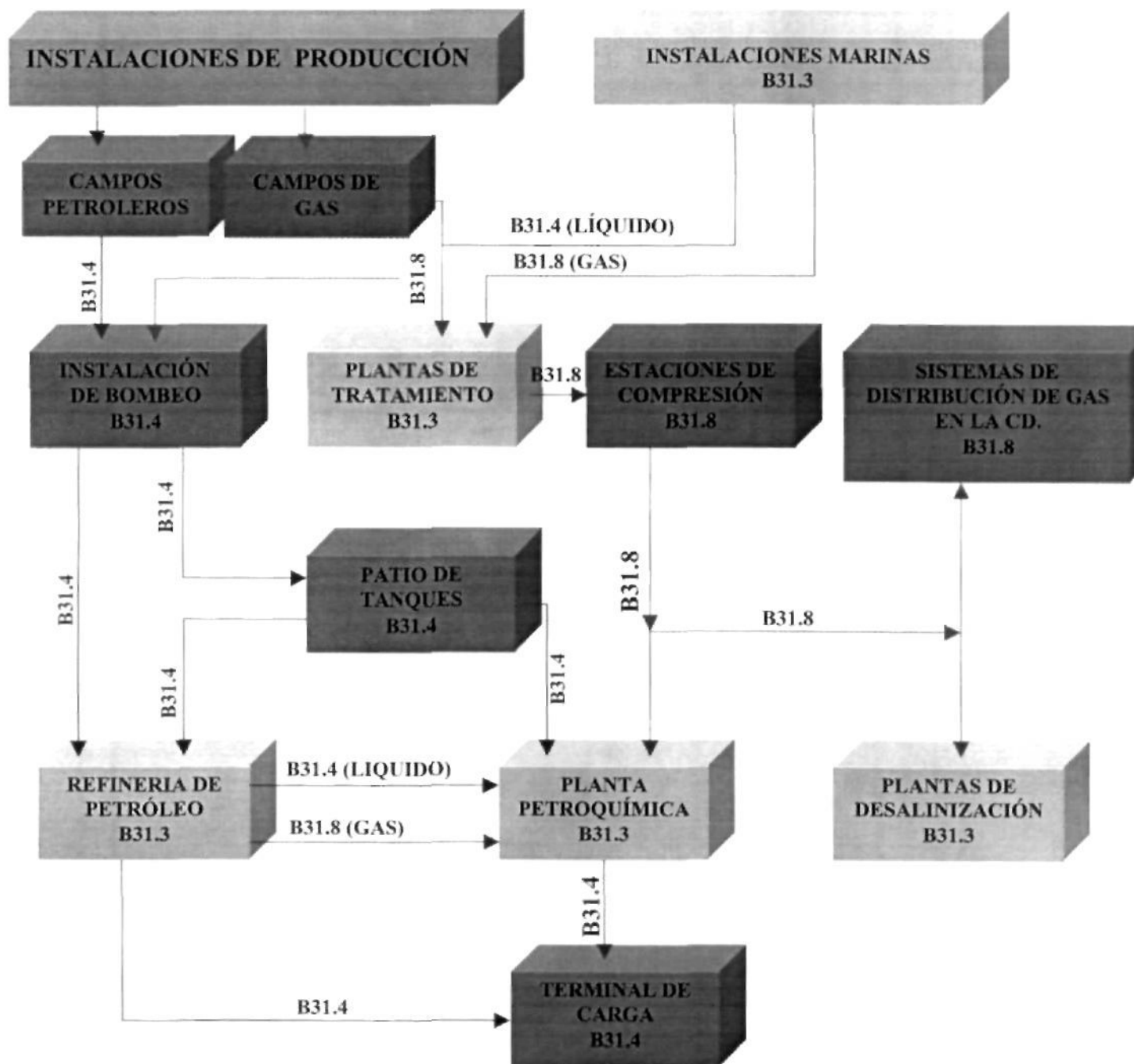


Fig.4.3 Alcances de Códigos

4.7. ESFUERZOS PERMISIBLES Y FACTORES DE DISEÑO.

Con el propósito de establecer una comparación que pueda conducirnos a definir con la mayor claridad posible las áreas de aplicación de los códigos ANSI B31.3, ANSI B31.4 y ANSI B31.8, en este capítulo se presentan las ecuaciones utilizadas para el cálculo de los esfuerzos actuantes, así como también los diferentes límites de esfuerzos permisibles establecidos por cada código.

4.7.1. Cálculo de esfuerzos actuantes para los códigos B31.3, B31.4 y B31.8.

Para el caso de los **esfuerzos actuantes** para los tres códigos son los mismos, los cuales se presentan a continuación:

a) Cálculo de esfuerzos circunferenciales (σ_H)

Los esfuerzos circunferenciales debidos a presión interna, serán calculados con la siguiente expresión:

$$\sigma_H = \frac{PD}{2t} \quad (4.3)$$

donde:

σ_H = Esfuerzo circunferencial

P = Presión interna de diseño

D = Diámetro nominal de tubería

t = Espesor de tubo

b) Cálculo de esfuerzos longitudinales (σ_L)

Los esfuerzos longitudinales serán calculados con la siguiente expresión:

$$\sigma_L = \sigma_{axial} \pm \sigma_b \quad (4.4)$$

donde:

σ_L = Esfuerzo longitudinal actuante en un punto de la tubería

σ_{axial} = Esfuerzo axial en el punto

σ_b = Resultante de esfuerzos flexionantes

$$= \frac{\sqrt{(i_i M_i)^2 + (i_o M_o)^2}}{Z} \quad (4.5)$$

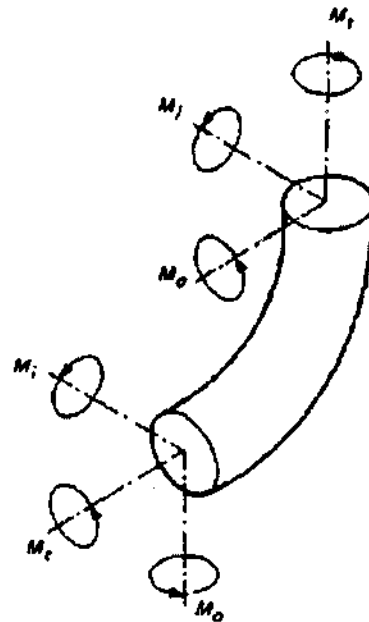


Fig. 4.4 Momentos en un codo

i_i = Factor de intensificación de esfuerzos en el plano

i_o = Factor de intensificación de esfuerzos fuera del plano

M_i = Momento flexionante en el plano

M_o = Momento flexionante fuera del plano

Z = Módulo de sección

c) Cálculo de esfuerzos por efectos de temperatura (σ_E)

El rango de esfuerzos combinados por efectos de temperatura, será calculado con la siguiente expresión:

$$\sigma_E = \sqrt{\sigma_b^2 + 4\sigma_t^2} \quad (4.6)$$

donde:

σ_E = Esfuerzo combinado debido a efectos de temperatura

σ_b = Resultante de esfuerzos flexionantes

$\sigma_t = Mt / 2Z$ = Esfuerzo torsionante

Mt = Momento torsional

4.7.2. Cálculo de esfuerzos permisibles para los códigos B31.3, B31.4 y B31.8.

En el caso de los esfuerzos permisibles no son los mismos para cada código, los cuales se presentarán a continuación:

• CÓDIGO B31.3

a) Esfuerzos permisibles circunferenciales

Los esfuerzos permisibles circunferenciales por presión interna no excederán el valor de lo siguiente:

$$\sigma_H \leq \sigma * E + 0.4P$$

donde:

σ = Esfuerzo básico permisible

E = Factor de calidad de junta

P = Presión interna de diseño

b) Esfuerzos permisibles longitudinales

La suma de los esfuerzos longitudinales debidos a presión, peso propio y otras cargas sostenidas, no excederá el valor del esfuerzo permisibles para el material a la temperatura máxima esperada durante la operación (σ_h).

$$\sigma_L \leq \sigma_h$$

c) Esfuerzos permisibles para efectos de temperatura

El rango de esfuerzos permisibles que representa la suma de los esfuerzos para las temperaturas máximas y mínimas que se puedan presentar en cualquier punto de la tubería durante un ciclo cualquiera de operación, está definido por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{EP} = f(1.25\sigma_c + 0.25\sigma_h)$$

donde:

σ_{EP} = Rango de esfuerzos permisibles por efectos de temperatura.

σ_c = Esfuerzo permisible a la temperatura mínima

σ_h = Esfuerzo permisible a la temperatura máxima de operación

f = Factor de reducción del rango de esfuerzos por condiciones cíclicas de operación

Cuando $\sigma_h > \sigma_L$, la diferencia entre ellos puede ser adicionada al término $0.25\sigma_h$ de la ecuación anterior, quedando de la siguiente manera:

$$\sigma_{EP} = f[1.25(\sigma_c + \sigma_h) - \sigma_L]$$

Por lo que el esfuerzo actuante por temperatura (σ_E) no excederá del valor permisible (σ_{EP}).

$$\sigma_E \leq \sigma_{EP}$$

d) Otros límites de esfuerzos

La suma de esfuerzos longitudinales debidos a presión, peso propio y otras cargas sostenidas (σ_L) y los esfuerzos producidos por cargas ocasionales tales como viento y sismo, no será mayor que 1.33 veces que el esfuerzo básico admisible indicado en apéndice "A" del código ANSI B31.3.

• CÓDIGO B31.4

a) Esfuerzos permisibles circunferenciales

Los esfuerzos permisibles circunferenciales por presión interna no excederán el valor de lo siguiente:

$$\sigma_H \leq 0.72E * \sigma_S$$

donde:

E = Factor de calidad de junta

σ_S = Esfuerzo de cedencia mínimo especificado (Specified minimum yield strength - SMYS)

b) Esfuerzos permisibles longitudinales

La suma de los esfuerzos longitudinales debidos a presión, peso y otras cargas externas sostenidas, no excederán de $0.75\sigma_A$.

$$\sigma_L \leq 0.75\sigma_A$$

donde:

$\sigma_A = 0.72$ (SMYS) esfuerzo de cedencia mínimo especificado

c) Esfuerzos permisibles por efectos de temperatura

El máximo rango de esfuerzos calculados (σ_E) no excederá el valor del permisible

σ_A .

$$\sigma_E \leq \sigma_A$$

d) Otros límites de esfuerzos

La suma de los esfuerzos longitudinales debidos a presión, cargas vivas, cargas muertas y cargas ocasionales tales como viento y sismo, no excederán del 80% del esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS).

• CÓDIGO B31.8

a) Esfuerzos permisibles circunferenciales

Los esfuerzos permisibles circunferenciales por presión interna no excederán el valor de lo siguiente:

$$\sigma_H \leq F * E * T * \sigma_S$$

donde:

E = Factor de calidad de junta

T = Factor que depende de la temperatura de operación

σ_s = Esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS)

F = Factor de diseño por tipo de construcción [ver tabla No.2]

b) Esfuerzos permisibles longitudinales

La suma de los esfuerzos longitudinales debidos a presión, peso propio y cargas externas como viento, etc., no excederá del 75% del esfuerzo permisible a la temperatura de operación máxima ($\sigma_s * F * T$).

$$\sigma_t \leq (\sigma_s * F * T) 0.75$$

donde:

σ_s = Esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS)

F = Factor de diseño por tipo de construcción tipo de construcción [ver tabla No.2]

T = Factor que varía dependiendo de la temperatura

c) Esfuerzos permisibles por efectos de temperatura

El máximo valor del esfuerzo debido a efectos de temperatura no será mayor de 0.725 del esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS).

$$S_E \leq 0.725 \sigma_s$$

d) Otros límites de esfuerzos

El total de los esfuerzos siguientes, no será mayor que el valor del esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS).

- Esfuerzo combinado debido a efectos de temperatura (σ_E)

- El esfuerzo longitudinal debido a presión (σ_L)
- El esfuerzo longitudinal flexionante debido a cargas externas (σ_L)

$$\sigma_L + \sigma_E \leq \sigma_S$$

Notas:

Para comparaciones condensada de ecuaciones para cálculo de esfuerzos permisibles, ver tabla No. 1.

Para comparación gráfica de esfuerzos permisibles ver tabla No. 2.

TIPO DE ESFUERZO	B31.3	B31.4	B31.8
CIRCUNFERENCIAL	$\sigma_H \leq \sigma * E + 0.4P$	$\sigma_H \leq 0.72E * \sigma_S$	$\sigma_H \leq F * E * T * \sigma_S$
LINGITUDINAL	$\sigma_L \leq \sigma_h$	$\sigma_L \leq 0.75\sigma_A$	$\sigma_L \leq (\sigma_S * F * T)0.75$
EXPANSIÓN	$\sigma_E \leq \sigma_{EP}$	$\sigma_E \leq \sigma_A$	$S_E \leq 0.725\sigma_S$

Tabla No. 1 (Ecuaciones para el cálculo de esfuerzos permisibles)

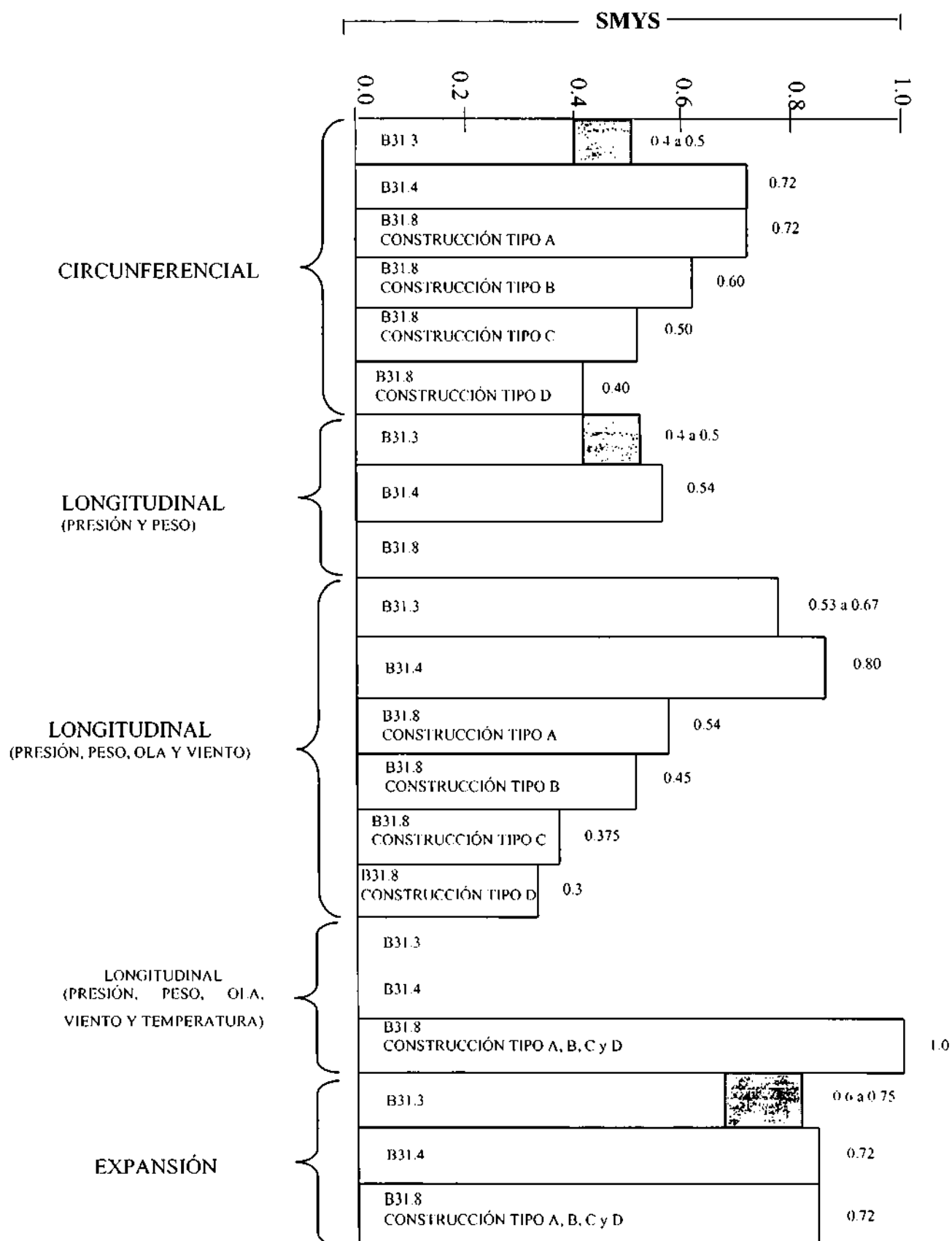


Tabla No.2 (Comparación de esfuerzos permisibles para una tubería API)

Enseguida se describen los lugares donde se aplicarán los tipos de construcción:

Construcción Tipo A:

- a) En derechos de vía privados en localizaciones Clase 1
- b) Invasiones paralelas en:
 - 1) caminos privados en localizaciones Clase 1
 - 2) caminos no mejorados en localizaciones Clase 1
- a) Cruces sin encamisados en caminos privados en localizaciones Clase 1
- b) Cruces encamisados de caminos públicos no mejorados, caminos de superficie dura, carreteras o calles públicas y vías férreas en localizaciones Clase 1

Construcciones Tipo B:

- a) En derechos de vía privados en localizaciones Clase 2
- b) Invasiones paralelas en:
 - 1) Caminos privados en localizaciones Clase 2
 - 2) Caminos públicos no mejorados en localizaciones Clase 2
 - 3) Caminos de superficie dura, carreteras o calles públicas y vías férreas en localizaciones Clase 1 y Clase 2
- c) Cruces sin encamisados de:
 - 1) Caminos públicos en localizaciones Clase 2
 - 2) Caminos públicos no mejorados en localización Clase 1 y Clase 2
 - 3) Caminos de superficie dura, carreteras o calles públicas y vías férreas en localizaciones clase 1
- d) Cruces encamisados de caminos de superficie dura, carreteras o calles públicas y ferrocarriles en localizaciones Clase 2
- e) En puentes en localizaciones Clase 1 y Clase 2
- f) Accesorios prefabricados para la tubería en localizaciones Clase 1 y Clase 2

Construcciones Tipo C:

- a) En derechos de vía privados en localizaciones Clase 3
- b) Invasiones paralelas en:

- 1) Caminos privados en localizaciones Clase 3
- 2) Caminos públicos no mejorados en localizaciones Clase 3
- 3) Caminos de superficie dura, carreteras o calles públicas y vías férreas en localizaciones Clase 3

Localizaciones Clase 1.

Las localizaciones Clase 1 es una sección de 1 milla que tiene 10 o menos edificios destinados a ocupación humana. La localización Clase 1 está destinada para reflejar áreas como tierras de desecho, desiertos, montañas, pastizales, granjas y áreas escasamente habitadas.

Localizaciones Clase 2.

Las localizaciones Clase 2 es cualquier sección de 1 milla que tiene más de 10 pero menos de 46 edificios destinados a ocupación humana. Una localización Clase 2 está destinada a áreas con un grado de población intermedia entre la localización Clase 1 y localización Clase 3 tales como áreas periféricas de ciudades y pueblos, áreas industriales, ranchos o propiedades campestre, etc.

Localizaciones Clase 3.

Las localizaciones Clase 3 es cualquier sección de 1 milla que tiene 46 o más edificios destinado a ocupación humana, excepto cuando prevalece la localización Clase 4. Una localización Clase 3 está destinada para reflejar áreas tales como desarrollo de habitación suburbana, centros comerciales, áreas residenciales, áreas industriales y otras áreas pobladas que no cumplen con los requerimientos de las localizaciones Clase 4.

Localizaciones Clase 4.

Las localizaciones Clase 4, incluyen áreas donde prevalecen construcciones de varios pisos, donde se tiene un tráfico denso y donde puedan encontrarse otras obras bajo del terreno. Varios pisos quieren decir edificios de 4 o más pisos arriba del terreno, incluyendo el primer piso o planta baja. La profundidad del sótano o número de sótanos es indiferente.

Para determinar la densidad de población se define una zona de ¼ milla de ancho, a lo largo de la ruta de la línea, quedando la tubería al centro de esta área. La longitud de la línea se divide en secciones de 1 milla de largo. Finalmente, se cuentan las construcciones destinadas a ocupación humana dentro de cada franja de ¼ milla de ancho por 1 milla de largo.

Cuando se vayan a instalar juegos de piezas tales como conectores para separadores, válvulas para la línea principal, conexiones en cruces, cabezales en los cruces con ríos, etc., en lugares definidos como localizaciones Clase 1, se requiere de una construcción Tipo B a lo largo de la conexión y se debe extender una distancia de 5 diámetros de la tubería en cada dirección después del último accesorio.

De lo anterior se concluye que el factor de diseño para un cruce con ríos, es de 0.6.

4.8. REVISIÓN DE ESPESORES.

A continuación se presentará el cálculo de espesores de acuerdo a los códigos ANSI B31.3, B31.4 y B31.8.

4.8.1. Cálculo de espesores para el código ANSI B31.3

El espesor requerido para tuberías de secciones rectas, deberá determinarse de acuerdo a la ecuación:

$$t_m = t + c \quad (4.7)$$

El espesor mínimo para la tubería seleccionada, considerando el espesor del fabricante menos la tolerancia, no debe ser menor de t_m .

El espesor de diseño de la tubería por presión interna, no deberá ser menor del calculado por la siguiente ecuación, cuando t sea menor de $D/6$.

$$t = \frac{P \cdot D}{2(\sigma \cdot E + P \cdot Y)} \quad (4.8)$$

Se puede utilizar alguna de las siguientes tres ecuaciones en el cálculo del espesor en lugar de la expresión anterior:

$$t = \frac{P \cdot D}{2 \cdot \sigma} \quad (4.9)$$

$$t = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma \cdot E - P}{\sigma \cdot E + P}} \right) \quad (4.10)$$

$$t = \frac{P(d + 2c)}{2(\sigma \cdot E - P(1 - Y))} \quad (4.11)$$

Las tuberías con espesor t igual o mayor que $D/6$, o con relación $P/\sigma E$ mayor que 0.385, requieren de una consideración especial en la que se contemplen aspectos como teorías de falla, de fatiga y esfuerzos térmicos.

La siguiente nomenclatura aplica a las ecuaciones anteriores:

t_m = Espesor mínimo requerido, incluyendo tolerancias mecánicas, por corrosión y erosión

t = Espesor de diseño por presión

c = Suma de tolerancias mecánicas (profundidad de las ranuras o filetes) más las tolerancias por corrosión y erosión. Cuando no es especificada se tomará el valor de **0.02 pulg**

d = Diámetro interior de la tubería

P = Presión interna de diseño

D = Diámetro exterior de la tubería

E = Factor de calidad de junta

σ = Esfuerzo básico permisible para una tubería

Y = Coeficiente por tipo de material y temperatura.

Para $t < D/6$

$$\text{Para } t \geq D/6 \quad \gamma = \frac{d + 2c}{D + d + 2c}$$

4.8.2. Cálculo de espesores para el código ANSI B31.4.

El espesor nominal de pared de tuberías de acero de secciones rectas deberá ser igual o mayor que t_n determinado con la siguiente ecuación:

$$t_n = t + A \quad (4.12)$$

El diseño del espesor de pared t por presión interna de una tubería de acero deberá calcularse con la siguiente ecuación:

$$t = \frac{P_i D}{2 \cdot \sigma} \quad (4.13)$$

La nomenclatura descrita a continuación, se utiliza en las ecuaciones anteriores:

t_n = Espesor de pared nominal que satisface los requerimientos por presión

t = Espesor de pared de diseño por presión interna

A = Suma de tolerancias por ranuras y filetes, así como por corrosión y erosión

P_i = Presión interna de diseño

σ = Valor del esfuerzo permisible aplicable y que para una tubería nueva de especificación conocida se calcula con la siguiente expresión:

$$\sigma = 0.72 * E * \sigma_s \quad (4.14)$$

donde:

0.72 = Factor de diseño basado en el espesor nominal de pared.

E = Factor de calidad de junta

σ_s = Esfuerzo de cedencia mínimo especificado (SMYS)

4.8.3. Cálculo de espesores para el código ANSI B31.8.

La presión de diseño para tuberías de acero que transportan gas o el espesor de pared nominal para una presión de diseño dada, deberá determinarse con la siguiente fórmula:

$$P = \frac{2 \cdot \sigma_s \cdot t}{D} * F * E * T \quad (4.15)$$

$$t = \frac{PD}{2 \cdot \sigma_s * F * E * T} \quad (4.16)$$

donde:

P = Presión de diseño

σ_s = Esfuerzo de cedencia mínimo especificado

D = Diámetro exterior nominal de la tubería

t = Espesor de pared nominal

F = Factor de diseño por tipo de construcción

E = factor de calidad de junta

T = factor de reducción por temperatura

Se deberá usar construcción tipo C en el diseño de tuberías en plataformas, así como en ductos ascendentes y se extenderá una distancia de por lo menos cinco diámetros de tubería después del codo, curva o accesorio inferior.

Las piezas de transición al final de esta tubería, no se consideran accesorios para efectos de este código.

5. ANÁLISIS DE FLEXIBILIDAD PARA UNA TUBERÍA ENTERRADA.

5.1. DESCRIPCIÓN DEL EJEMPLO.

El propósito del sistema del ejemplo siguiente es demostrar el procedimiento requerido para el cálculo de propiedades del suelo; para la determinación de la localización de los puntos críticos de la tubería definido debajo del suelo (transición) y para el cálculo de los esfuerzos de acuerdo al código ASME B31.4 por el programa AutoPIPE. La tubería se muestra en la **figura 5.1**.

En este ejemplo, el sistema de tubería se sujeta a una elevación a temperatura de 140°F (60°C), con una presión interna de 100 psi. Por simplicidad, un sólo tipo de suelo se conecta con la tubería.

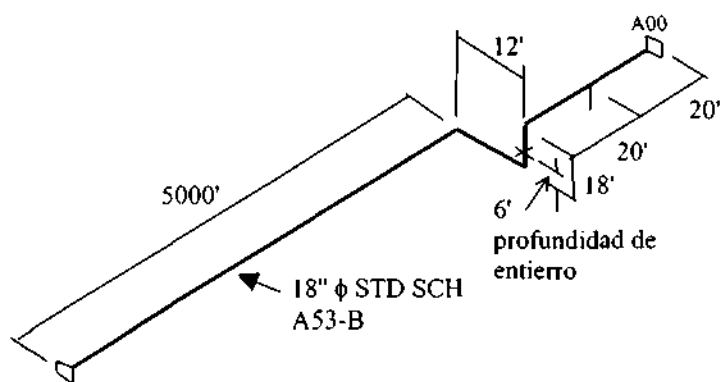


Fig. 5.1. Esquema de la línea enterrada

El sistema se analizará para la temperatura y para los casos de carga de presión (estando la tubería enterrada restringida en la dirección axial, donde los esfuerzos de presión longitudinales pueden ser significantes). Por esta razón un análisis de Presión debe ser considerado siempre para el análisis estático no lineal de la tubería enterrada.

A través de investigaciones limitadas se ha encontrado que el suelo es una mezcla grava-arenas (SW) con compactación de mediana a densa del relleno (las condiciones del sitio son densas), y que el índice de agua es aceptable abajo del tubo.

Los parámetros relevantes son:

- Diámetro de la tubería (d) 18.0 pulg = 45.72 cm
- Profundidad de entierro al centro de la tubería (Z) 6.0 ft. = 72 pulg = 182.88 cm
- Profundidad de entierro hasta la parte inferior del tubo (H) 81 pulg = 205.74 cm
- Peso de la unidad del suelo (γ) 125 lb/ft³ = 0.002 Kg/cm³

La primera tarea es cuantificar los valores de propiedad del suelo requeridos por AutoPipe. En una verdadera situación del diseño, sería necesario calcular los niveles de propiedades de la restricción del suelo y realizando un análisis limitado para determinar la sensibilidad de los valores estimados.

Muy poco es conocido sobre las características reales del comportamiento del suelo (sólo el tipo del suelo, consolidación relativa y peso de la unidad). Así, se empleó el **Apéndice A** para determinar estos valores. Esto asume una fuerza del suelo elástico-plástico vs. la relación de respuesta de desplazamiento ($k_2 = 0$). Recuerde, un ingeniero geotécnico competente debe consultarse para verificar cualquier valor de propiedad determinado para el modelo.

5.2. CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DEL SUELO.

La tubería puede estar orientada tanto horizontal como vertical en donde para considerar la rigidez que ejerce contra el suelo se realizan cálculos independientes. En donde para el caso de la rigidez para cuando la tubería está orientada horizontal y vertical se consideran cuatro tipos de posibles desplazamientos. Para el cálculo de la rigidez en el sentido transversal cuando la tubería se encuentra orientada vertical se considerarán los mismos ya que la fuerza que necesita para desplazarse es la misma en todas sus direcciones.

Transversal horizontal.- éste se refiere a la rigidez que ejerce contra el suelo horizontal y transversal a la tubería.

Longitudinal.- éste se refiere a la rigidez que ejerce contra el suelo longitudinalmente en el tubo.

Transversal vertical abajo.- éste se refiere a la rigidez que ejerce contra el suelo transversal con dirección vertical y por debajo de la tubería.

Transversal vertical arriba.- éste se refiere a la rigidez que ejerce contra el suelo transversal con dirección vertical y por arriba de la tubería.

Propiedades para una tubería orientada horizontalmente

• Transversal horizontal

De la tabla A-6, asumimos $k_i = 150 \text{ lb/in}^3$ (**densa - arriba del agua**)

$$H/d = 81/18 = 4.5$$

de la tabla A-8, $R_s = 11.9$ (**densa**) Así, por la ecuación A-8 y A-10

$$K_1 = Z * k_i = (72 \text{ in}) * \left(150 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} / \text{in} \right) * \left(\frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \right) = 129,600 \frac{\text{lb}}{\text{in}} / \text{ft} \approx 130,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \text{ ft}$$

$$P_1 = R_s * d * Z * \gamma' = (11.9) * (18 \text{ in}) * (72 \text{ in}) * \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) * \left(\frac{\text{ft}^2}{144 \text{ in}^2} \right) = 13,388 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

- **Longitudinal**

Usando las Tablas A-9 y A-10, asumimos $\delta = 25^\circ$, estimado $k_s = 0.75$. Así por la ecuación A-14:

$$P_1 = \pi * d * k_s * Z * \gamma' * \tan \delta$$

$$= (3.14)(18 \text{ in})(.75)(72 \text{ in}) \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) \left(\tan 25^\circ \right) \left(\frac{\text{ft}^2}{144 \text{ in}^2} \right) = 1,235 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

Basado en el rango definido por la ecuación A-13 estimamos K_1 como sigue:

$$K_1 = \frac{45 P_1}{d} = \frac{(45) \left(1235 \frac{\text{lb}}{\text{ft}} \right)}{18 \text{ in}} = 3,088 \frac{\text{lb}}{\text{in} / \text{ft}}$$

- **Transversal vertical abajo**

Usando la **Tabla A-3** asumimos que $\phi = 38^\circ$ (sw). Entonces, por extrapolación de la curva Meyerhof en la **Figura A-11**, asumimos que $N_\gamma = 80$, $N_c = 60$ y $N_q = 50$. Así, por la **ecuación A-15** (para suelos no cohesivos $C = 0$)

$$P_1 = d * \gamma' * \left(\frac{1}{2} * d * N_\gamma + H * N_q \right)$$

$$= (1.50 \text{ ft}) \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) * \left[\frac{1}{2} * (1.50 \text{ ft}) * (80) + (6.75 \text{ ft}) * (50) \right] = 74,530 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

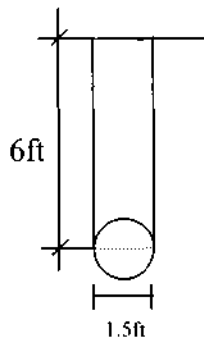
Basado en el rango definido por la **ecuación A-18**, estimamos K_1 como sigue:

$$K_1 = \frac{8 * P_1}{d} = \frac{8 * \left(74,530 \frac{\text{lb}}{\text{ft}} \right)}{18 \text{ in}} = 33,124 \frac{\text{lb}}{\text{in} / \text{ft}}$$

- **Transversal vertical arriba**

Primero determine el peso del suelo contenido en la supuesta cuña de falla (**ver la figura A-13(A)**). El área total (por unidad de longitud) consiste de un rectángulo, y un complemento de un medio círculo.

Usando la **Figura A-15**, asumimos $F_q = 2.5$. Así, por la **ecuación A-19** (para un suelo no cohesivo $c = 0$)



$$\gamma = 125$$

$$A = 9$$

$$A = 0.883$$

$$A_T = 9 - 0.883 = 8.117$$

$$W_s = (8.117) (125) = 1014 \text{ lb/ft}$$

$$P_1 = W_s + d * D * \gamma' * F_q$$

$$= 1,014 \frac{\text{lb}}{\text{ft}} + (1.50 \text{ ft}) * (5.25 \text{ ft}) * \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) * (2.5) = 3,475 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

Basado en el rango definido por la **ecuación A-23**, estimamos K_1 como sigue:

$$K_1 = \frac{75 * P_1}{D} = \frac{75 * \left(3,475 \frac{\text{lb}}{\text{ft}} \right)}{5.25 \text{ ft}} * \left(\frac{\text{ft}}{12 \text{ in}} \right) = 4,137 \frac{\text{lb}}{\text{in}} / \text{ft}$$

La tabla de abajo resume las propiedades del suelo a ser definidas por la porción enterrada del sistema estando orientada en el plano horizontal.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DEL SUELO "HORIZONTAL"		
ORIENTACIÓN	K_1 (LB/IN/FT)	P_1 (LB/FT)
Trans Horizontal	130,000	13,388
Longitudinal	3,088	1,235
Trans Vertical arriba	4,137	3,475
Trans Vertical abajo	33,125	74,530

Tabla 5.1 Propiedades del suelo con la tubería orientada horizontalmente

Propiedades para una tubería orientada verticalmente.

• **Transversal horizontal**

Con $k_i = 150 \text{ lb/in}^3$,

$H/d = 4.5$

de la **Tabla A-8** $R_s = 7.2$ (medio densa)

Ecuación A-8 y A-10 da los siguientes resultados:

$$K_1 = Z * k_i = (24 \text{ in}) * \left(150 \frac{\text{lb}}{\text{in}^3} / \text{in} \right) * \left(\frac{12 \text{ in}}{\text{ft}} \right) = 43,200 \frac{\text{lb}}{\text{in}} / \text{ft}$$

$$P_1 = R_s * d * Z * \gamma' = (7.2) * (18 \text{ in}) * (24 \text{ in}) * \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) * \left(\frac{\text{ft}^2}{144 \text{ in}^2} \right) = 2,700 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

• **Longitudinal**

Con $\delta = 25^\circ$, pero usando $k_s = 0.60$ **ecuación A-14** da el siguiente resultado:

$$P_1 = \pi * d * k_s * Z * \gamma' * \tan \delta$$

$$= (3.14) * (18 \text{ in}) * (0.60) * (24 \text{ in}) * \left(125 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) * (\tan 25^\circ) * \left(\frac{\text{ft}^2}{144 \text{ in}^2} \right) = 329 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

Basado en el rango definido por la **ecuación A-13**, estimamos K_1 como sigue:

$$K_1 = \frac{45 * P_1}{d} = \frac{45 * \left(329 \frac{lb}{ft}\right)}{18in} = 823 \frac{lb}{in} / ft$$

- **Transversal vertical abajo**

El **Apéndice A** no es aplicable para el caso vertical. Usar los valores transversales horizontales, las propiedades del suelo restringido son las mismas en todas las direcciones del plano horizontal.

- **Transversal vertical arriba**

El **Apéndice A** no es aplicable para el caso vertical. Usa los valores transversales horizontales, las propiedades del suelo restringido son las mismas en todas las direcciones del plano horizontal.

La tabla de abajo resume las propiedades del suelo a ser definidas por la porción enterrada del sistema estando orientada en el plano vertical.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DEL SUELO "VERTICAL"		
ORIENTACIÓN	K_1 (LB/IN/FT)	P_1 (LB/FT)
Trans Horizontal	43,200	2,700
Longitudinal	823	329
Trans Vertical Arriba	43,200	2,700
Trans Vertical Abajo	43,200	2,700

Tabla 5.2 Propiedades del suelo con la tubería orientada verticalmente

5.3. DETERMINACIÓN DE LA ZONA DE LOCALIZACIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS.

Para la sección discutida en el **Apéndice A**, ciertos puntos importantes se definen en la región de la tubería enterrada en orden propiamente definida las zonas de interacción suelo-tubo. El primer paso requiere determinación del espacio de presión y la máxima longitud de desprendimiento. Estas variables están basadas en las propiedades de la tubería enterrada, suelo cercano y magnitud (relativa) de la tensión suelo-tubo debido a las cargas de diseño. Los datos relevantes son mostrados en la tabla de abajo:

Tubería enterrada		Condiciones ambientales	Cargas de operación	
18"φStd. Sch.	A53-B		T1	P1
d = 18.00"	E = 29000 ksi (en T1)	70° F	140° F	100 psi
t = 0.375"	α = 0.61 in/ft	0 psi		
A = 20.80 in ²	ε = 1.5167 * 10 ⁻³ in/in			
I = 807 in ⁴				

Determinación del apoyo del tramo (L_b) requiere el uso del valor del suelo rígido. Así ambos la tubería horizontal y vertical deben ser evaluadas por separado desde diferente rigidez. Porque el apoyo del tramo es la región de mayor desplazamiento lateral usando K , desde la orientación horizontal para ambas tuberías, horizontal y vertical

Usando la **ecuación A-2 y A-3 del Apéndice A**, el apoyo del tramo para el plano horizontal es dado por:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\bar{K}}{4 * E * I}} = \sqrt[4]{\frac{\left(130,000 \frac{lb}{in} / ft\right) * \left(\frac{ft}{12in}\right)}{4 * \left(29.0 * 10^6 \frac{lb}{in^2}\right) (807 in^4)}} = 1.1844 in^{-2}$$

$$L_b = \frac{3 * \pi}{4 * \beta} = \frac{3 * (3.14)}{4 * (1.1844 in^{-2})} = 128 in \quad (10.5 ft)$$

Igualmente, el apoyo del tramo para el plano vertical está dada por:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\left(43200 \frac{lb}{in} / ft\right) * \left(\frac{ft}{12in}\right)}{4 * \left(29.0 * 10^6 \frac{lb}{in^2}\right) (807in^4)}} = 1.3987in^{-2}$$

$$L_b = \frac{3 * (3.14)}{4 * (1.3987in^{-2})} = 168.0in \quad (14.0ft)$$

L_b para el plano vertical (14.0ft) es mayor que la profundidad de entierro (6 ft) la sección vertical de la tubería enterrada es toda la zona 1. Además, L_b para el plano horizontal (10.5 ft) es mayor que la mitad de la distancia entre los codos (6ft), la sección de 12 pies del plano horizontal es también toda la zona 1.

Después, la longitud del máximo desprendimiento (L_m) es calculada en orden para estimar la longitud virtual de anclaje (L_a). L_a está determinado así que el punto de tensión relativa cero suelo-tubo puede ser determinado. Este es el punto donde el modelo puede ser determinado físicamente así cualquier pérdida de exactitud para el análisis de resultado. Así, por la **ecuación A-5** (donde P_1 es para la dirección longitudinal):

$$L_m = \frac{\varepsilon * A * E}{P_1} = \frac{(1.52 * 10^{-3}) * (20.81in^2) * \left(29.0 * 10^6 \frac{lb}{in^2}\right)}{1,235 \frac{lb}{ft}} = 742ft$$

asumiendo que los valores calculados del suelo corresponden a una respuesta fuerza-desplazamiento suave ($c_0=2.0$), la **ecuación A-6** define la longitud virtual de anclaje como sigue:

$$L_a = c_0 * L_m = 2.0(742.0ft) = 1484ft$$

L_a es menos que la longitud de 5000 pies de tubo recto, se puede observar que no es necesario definir uno completo. El último paso requiere previo definir el modelo en Autopipe, es para establecer los puntos de la tubería dentro de la zona 2 a lo largo de tubería enterrada, así el espacio entre los puntos de la tubería pueden ajustarse conformemente. Dos puntos

pueden definirse para este propósito. El primero a una distancia de " $3 \cdot L_b$ ", y el segundo a una distancia de " $0.5 \cdot L_a$ " desde el segundo punto del codo.

La figura de abajo muestran los puntos requeridos de la tubería después el segundo codo para el ancla virtual y el máximo espacio que pueden especificarse para el suelo entre cada de estos puntos.

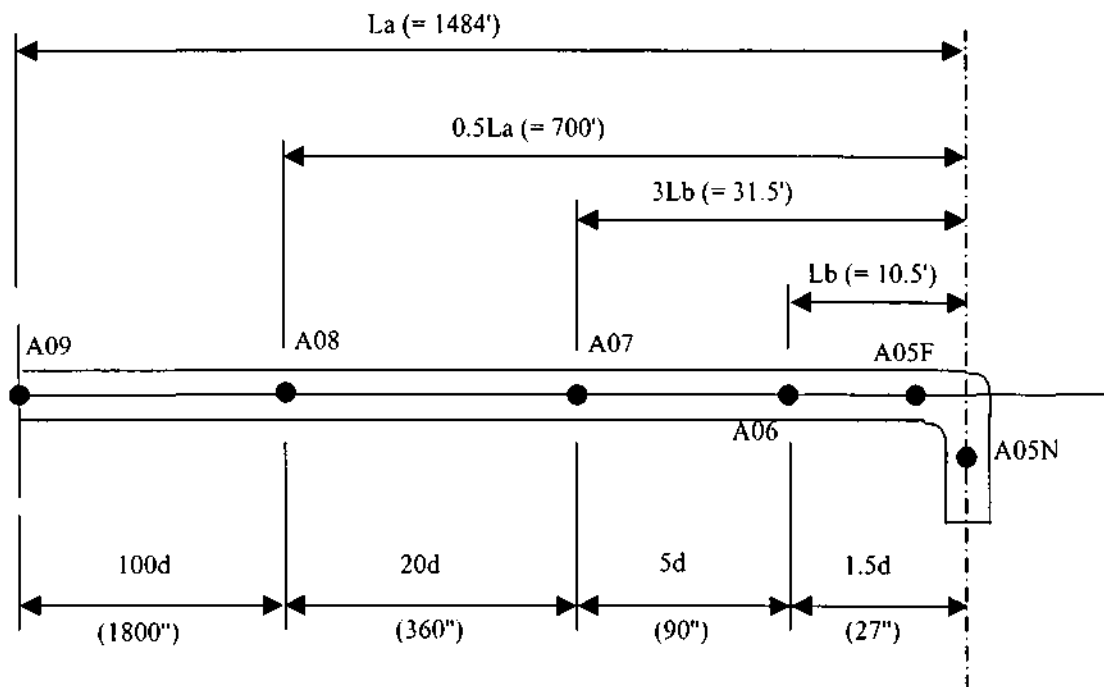


Fig. 5.2 Longitud virtual del ancla y espaciamiento máximo

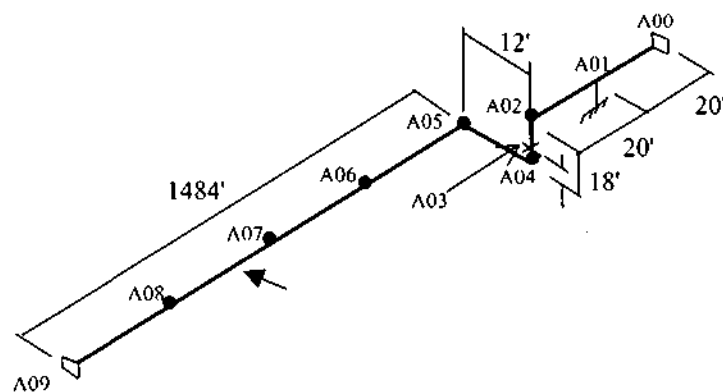


Fig. 5.3 Esquema de la línea enterrada tomando en cuenta la longitud virtual del ancla

5.4. CÁLCULO DE ESFUERZOS.

A continuación se presentarán los resultados de algunos puntos de la línea realizados por el programa AutoPIPE.

Descripción de los tipos de carga:

HOOP.- Esfuerzo permisible circunferencial

SUST.- Esfuerzo permisible longitudinal

DISP.- Esfuerzo permisible por efectos de temperatura

EQTN.- Esfuerzo permisible de Tresca

REACCIONES							
PUNTO	COMBINACIÓN DE CARGA	FUERZA (lb)			MOMENTO (ft-lb)		
		x	y	z	x	y	z
A04F	GR	-1826	-1109	31	-338	110	-1654
	T1	-16774	-756	-23122	-2494	30592	20764
	P1	-545	-36	-765	-103	1421	679
	GR+T1+P1	-19114	-1901	-23856	-2936	32123	19790
A05N	GR	-1598	664	386	-338	-737	-1345
	T1	-18063	-2042	51170	-2494	50133	3962
	P1	-786	-80	626	-103	694	158
	GR+T1+P1	-20446	-1458	52182	-2936	50090	2775
A05F	GR	-339	177	816	765	1009	-13
	T1	-1165	-171	73432	-5427	-52106	56
	P1	-225	-8	985	-222	-3100	3
	GR+T1+P1	-1790	-2	75233	-4884	-54196	46
A09	GR	0	0	0	-23	0	-13
	T1	0	0	272568	0	0	56
	P1	0	0	9043	0	0	3
	GR+T1+P1	0	0	281611	-23	0	46

Tabla 5.3 Resultados de las reacciones (fuerzas y momentos)

DESPLAZAMIENTOS							
PUNTO	COMBINACIÓN DE CARGA	TRASLACIONAL (in)			ROTACIONAL (grados)		
		x	y	z	x	y	z
A04F	GR	-0.007	-0.030	0.000	0.004	0.000	-0.022
	T1	0.260	0.062	0.036	-0.057	-0.134	0.074
	P1	0.011	0.003	0.001	-0.002	-0.009	0.003
	GR+T1+P1	0.264	0.036	0.036	-0.055	-0.143	0.055
A05N	GR	-0.006	-0.002	0.000	0.005	0.001	-0.014
	T1	0.223	-0.017	-0.327	-0.048	-0.345	0.037
	P1	0.009	0.000	-0.018	-0.002	-0.014	0.002
	GR+T1+P1	0.226	-0.020	-0.345	-0.045	-0.359	0.025
A05F	GR	-0.003	-0.001	0.002	0.004	0.004	-0.009
	T1	0.053	-0.013	-0.517	-0.016	-0.099	0.037
	P1	0.002	-0.001	-0.025	-0.001	-0.005	0.002
	GR+T1+P1	0.052	-0.015	-0.540	-0.013	-0.099	0.031
A09	GR	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	T1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	P1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	GR+T1+P1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabla 5.4 Resultados de los desplazamientos (traslacional y rotacional)

PUNTO	COMBINACIÓN DE CARGA	(Momentos en ft-lb)			(Esfuerzos en psi)		
		Momento In-Pi	Momento Out-Pi	Momento de Torsión	Tipo de Carga	Esfuerzo de Código	Esfuerzo Permisible
A04F	Max P				HOOP	2400	25200
	GR + Max P	1654	110		SUST	19876	18900
	T1	20764	30592	2494	DISP	15413	25200
	Max Equiv	19110	30702	2832	EQTN	17051	31500
A05N	Max P				HOOP	2400	25200
	GR + Max P	737	1345		SUST	18900	18900
	T1	50133	3962	3220	DISP	23549	25200
	Max Equiv	49396	2617	2832	EQTN	25397	31500
A05F	Max P				HOOP	2400	25200
	GR + Max P	1009	765		SUST	1759	18900
	T1	52106	5427	56	DISP	24512	25200
	Max Equiv	51097	4663	43	EQTN	28518	31500
A09	Max P				HOOP	2400	25200
	GR + Max P	23	0		SUST	1203	18900
	T1	0	0	56	DISP	7	25200
	Max Equiv	23	0	43	EQTN	14405	31500

Tabla 5.5 Resultados de momentos y esfuerzos

6. APLICACIÓN DE CONFIABILIDAD EN ANÁLISIS DE ESFUERZOS.

6.1. INTRODUCCIÓN.

En el presente capítulo se mostrará una aplicación del método de confiabilidad aplicado al análisis de esfuerzos de tuberías de conducción de hidrocarburos. Para fines de la aplicación se considera que la tubería forma parte de un sistema de distribución y que esta está en parte enterrada y en parte superficial. Es simplemente un ejemplo ilustrativo con datos que podrían ser reales. No es parte de una línea de distribución existente ni futura.

En el capítulo anterior describimos el ejemplo desde el punto de vista del análisis de esfuerzos determinista, es decir, sin considerar la parte aleatoria de sus variables de base. Ahí se describe en detalle la manera de evaluar una línea, así como la forma para obtener los parámetros del suelo, necesarios para los análisis. Se presentan además los resultados y se describen para algunos de los nudos que se eligieron, como los más críticos.

En este capítulo describiremos los parámetros estadísticos y la manera de aplicar el método de confiabilidad.

6.2. DESCRIPCIÓN DEL EJEMPLO.

La tubería está dada en la **figura 5.1**. Los nudos de interés son los indicados en el ejemplo de referencia, estos son (A04F, A05N, A05F y A09) y están dados en la **figura (6.1)**. Las variables que consideramos como aleatorias son, la presión, la temperatura de operación, el espesor y el valor del esfuerzo resistente (esfuerzo de cedencia mínimo especificado SMYS).

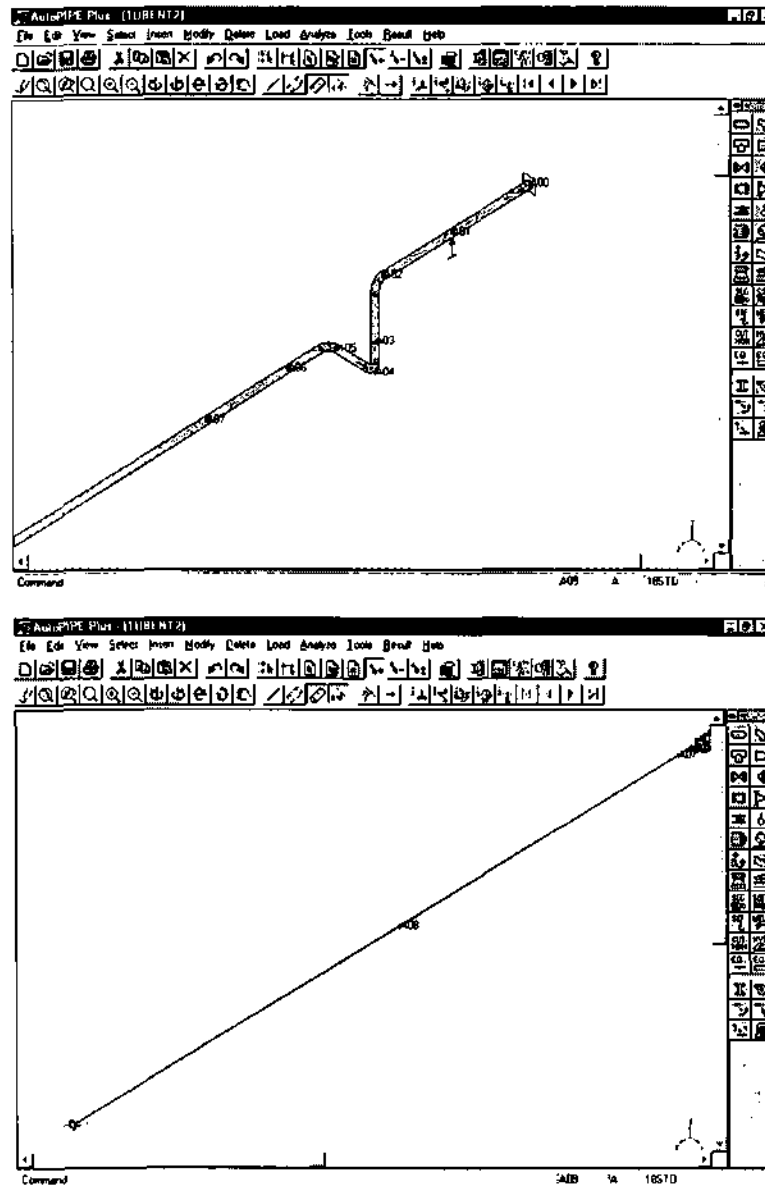


Fig. 6.1 Tubería enterrada

La función de estado límite que se consideró para fines del ejemplo compara el esfuerzo de fluencia con el esfuerzo resistente (SMYS), esto es:

$$G_i = SMYS - \sigma_i$$

donde σ_i , es el esfuerzo actuante calculado con el programa AutoPipe. De acuerdo a lo descrito en el **capítulo 5** la función de estado límite no es explícita, función de variables aleatorias de base. Desde luego que el esfuerzo actuante es función de la temperatura, del espesor y de la presión, sin embargo, no es función directa. Para obtener σ_i debemos utilizar un programa de computadora. Un determinado juego de valores de las variables aleatorias, nos dará, un determinado valor de σ_i .

Por lo anterior, debemos utilizar un método de confiabilidad que nos permita calcular un estimado de la probabilidad de falla de manera simple y con un buen nivel de aproximación. Para ello utilizamos el método SRQ, descrito con anterioridad, el cual nos permite tener una aproximación de la función de estado límite y con ella poder evaluar índices de confiabilidad y una aproximación de la probabilidad de falla.

Los parámetros estadísticos para fines de nuestra aplicación están dados en la **tabla 6.1**. Utilizamos dos tipos de variables para fines ilustrativos. Podemos definir los valores medios a partir de los valores nominales o de diseño directamente, o podemos obtener valores medios mediante un cálculo estadístico. Este último es la manera en que los experimentadores nos dan valores nominales (o de diseño), mediante intervalos de confianza.

Como primera instancia consideremos los valores medios definidos a través de sus intervalos de confianza. Para ello, sean las variables aleatorias:

Presión (x_1)

temperatura de operación (x_2)

espesor (x_3)

SMYS (x_4)

Regularmente los ingenieros o investigadores que realizan experimentación en las propiedades de los materiales, obtienen valores medios, desviaciones y aproximan funciones de distribución de probabilidades. Si elegimos los valores medios para diseñar, tendremos

aproximadamente 50 % de acertar al valor de la variable y aproximadamente 50 % de no hacerlo. Si queremos disminuir el posible porcentaje de error debemos alejarnos del valor medio. Para una variable de resistencia tendríamos que disminuir nuestro valor de diseño hasta un cierto valor, para lograr que sólo un pequeño porcentaje de los valores sea inferior al nominal. Para las variables de sollicitación, por el contrario, tendríamos que aumentar nuestro valor de diseño hasta un cierto valor, para lograr que sólo un pequeño porcentaje de los valores sea inferior al nominal. Si queremos equivocarnos en nuestra variable sólo α de las veces, esto corresponde a alejarnos de la media de nuestra variable un valor de K veces la desviación estándar, el signo más o menos depende de si la variable es sollicitación o resistencia.

La relación entre las variables Nominales y los valores medios es la siguiente:

$$V.N. = V_x \pm K\sigma_x$$

en donde $V.N.$ es el valor nominal y V_x el valor medio. K es un factor que depende del intervalo de confianza que utilicemos. Regularmente se emplea $\alpha = 2.5\%$, tenemos $K = 2$.

Si lo que conocemos es el valor nominal debemos despejar el Valor medio y conocer (en muchos casos suponer) el coeficiente de variación, definido como:

$$c.v. = \frac{\sigma_x}{V_x}$$

sustituyendo esta en la anterior y despejando el valor medio tenemos:

$$V_x = \frac{V.N.}{(1 \pm K * c.v.)}$$

lo que para resistencia resulta:

$$V_{x \text{ RESIS}} = \frac{V.N.}{(1 - K * c.v.)}$$

y para sollicitación tenemos

$$V_{x \text{ SOLIC}} = \frac{V.N.}{(1 + K * c.v.)}$$

Utilizando la relación anterior definimos los parámetros estadísticos, los cuales se muestran en la tabla 6.1.

Variables	Valores nominales (V.N.)	Coefficiente de variación (c.v.)	K	Valores medios (μ_x)	Desviación estándar (σ_x)	f. d. P.
Presión	100 lb/in ²	0.20	2.0	71.43	14.28	normal
Temp. operación	140°F	0.30	2.0	87.50	26.25	normal
Temp. ambiente	70°F					determ.
Z (profundidad de entierro de la tubería)	6 ft					determ.
γ (peso de la unidad del suelo)	125 lb/ft ³					determ.
d (diámetro)	18 in					determ.
t (espesor)	0.375 in	0.10	2.0	0.469	0.047	normal
E (módulo de elasticidad)	29*10 ⁶ lb/in ²					determ.
α (coef. de expansión térmica)	0.61 in/100ft					determ.
ϵ (deformación térmica)	1.5167*10 ⁻³					determ.
SMYS	35000 lb/in ²	0.15	2.0	50000	7500	normal

Tabla 6.1 Parámetros estadísticos

En las siguientes tablas se determinará si las variables son de resistencia o sollicitación, a partir de la primera derivada de la función de estado límite con respecto a la variable de interés.

NODO	ESFUERZO (σ)	G_x
A04F	17051	17949
A05N	25397	9603
A05F	28518	6482
A09	14405	20595

Tabla 6.2 Cálculo de los valores de G_x

Los esfuerzos que se tomaron son de acuerdo al tipo de carga EQTN descrita en la tabla 5.5.

Para el nodo A04F tenemos:

x_j	Δx_j	σ^+	G^+	$\frac{\Delta G}{\Delta x_j}$	
P	1.0	17064	17936	-13	solicitud
$T_{oper.}$	1.1	17432	17568	-272.14	
t	0.00375	17048	17952	800	resistencia
SMYS	350		35350	1.0	

Tabla 6.3 Determinación si las variables son de resistencia o solicitud p/nodo A04F

Para el nodo A05N tenemos:

x_j	Δx_j	σ^+	G^+	$\frac{\Delta G}{\Delta x_j}$	
P	1.0	15409	9591	-12	solicitud
$T_{oper.}$	1.1	25445	9555	-34.3	
t	0.00375	24979	10021	11466.7	resistencia
SMYS	350		35350	1.0	

Tabla 6.4 Determinación si las variables son de resistencia o solicitud p/nodo A05N

Para el nodo A05F tenemos:

x_j	Δx_j	σ^+	G^+	$\frac{\Delta G}{\Delta x_j}$	
P	1.0	28531	6469	-13	solicitud
$T_{oper.}$	1.1	28866	6134	-248.6	
t	0.00375	28401	6599	31200	resistencia
SMYS	350		35350	1.0	

Tabla 6.5 Determinación si las variables son de resistencia o solicitud p/nodo A05F

Para el nodo A09 tenemos:

x_j	Δx_j	σ^+	G^+	$\frac{\Delta G}{\Delta x_j}$	
P	1.0	14417	20583	-12	solicitud
T _{oper.}	1.1	14666	20334	-186.4	
t	0.00375	14393	20607	3200	resistencia
SMYS	350		35350	1.0	

Tabla 6.6 Determinación si las variables son de resistencia o sollicitación p/nodo A09

donde:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta G}{\Delta x_i} = \frac{G^+ - G^-}{\Delta x_i}$$

$$G^+ = SMYS - \sigma^+$$

$$\Delta x_j = \frac{x_j}{100}$$

$$\Delta G = G^+ - G^-$$

Aproximación de la función del estado límite por el método SRQ.

De acuerdo a la ecuación 3.47 obtenemos la aproximación a la función de estado límite. Dado que se tomarán cuatro variables aleatorias la función queda de la siguiente manera:

$$Q(X) = c + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{44} x_4^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4$$

Las derivadas parciales de la aproximación de la función del estado límite de acuerdo a cada variable queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_1} = a_1 + 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4$$

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_2} = a_2 + 2b_{22}x_2 + b_{12}x_1 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4$$

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_3} = a_3 + 2b_{33}x_3 + b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{34}x_4$$

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_4} = a_4 + 2b_{44}x_4 + b_{14}x_1 + b_{24}x_2 + b_{34}x_3$$

Las realizaciones de las variables de base obtenidas por el método SRQ están dadas en la **tabla 6.7**.

VARIABLES			
X_1	X_2	X_3	X_4
.714300E+02	.875000E+02	.469000E+00	.500000E+05
.785730E+02	.875000E+02	.469000E+00	.500000E+05
.714300E+02	.962500E+02	.469000E+00	.500000E+05
.714300E+02	.875000E+02	.422100E+00	.500000E+05
.714300E+02	.875000E+02	.469000E+00	.450000E+05
.857160E+02	.875000E+02	.469000E+00	.500000E+05
.714300E+02	.105000E+03	.469000E+00	.500000E+05
.714300E+02	.875000E+02	.375200E+00	.500000E+05
.714300E+02	.875000E+02	.469000E+00	.400000E+05
.785730E+02	.962500E+02	.469000E+00	.500000E+05
.785730E+02	.875000E+02	.422100E+00	.500000E+05
.785730E+02	.875000E+02	.469000E+00	.450000E+05
.714300E+02	.962500E+02	.422100E+00	.500000E+05
.714300E+02	.962500E+02	.469000E+00	.450000E+05
.714300E+02	.875000E+02	.422100E+00	.450000E+05

Tabla 6.7 Realizaciones de las variables de base

Para cada una de las realizaciones obtenemos, mediante el programa Autopipe, un valor del esfuerzo actuante para cada uno de los nudos en estudio de la tubería que estamos evaluando. Las realizaciones de la función de estado límite para aproximar la función cuadrática están dadas en la tabla 6.8.

	Esfuerzos (σ)				G			
	NODOS				NODOS			
	A04F	A05N	A05F	A09	A04F	A05N	A05F	A09
G₁	4293	8349	8963	4040	45707	41651	41037	45960
G₂	4367	8422	9036	4114	45633	41578	40964	45886
G₃	6235	12293	13263	5689	43765	37707	36737	44311
G₄	4366	9048	9118	4116	45634	40952	40882	45884
G₅	4293	8349	8963	4040	40707	36651	36037	40960
G₆	441	8496	9110	4188	45559	41504	40890	45812
G₇	8195	15077	16671	7330	41805	34923	33329	42670
G₈	4435	9815	9269	4211	45565	40185	40731	45789
G₉	4293	8349	8963	4040	35707	31651	31037	35960
G₁₀	6309	12367	13337	5763	43691	37633	36663	44237
G₁₁	4447	9130	9200	4197	45553	40870	40800	45803
G₁₂	4367	8422	9036	4114	40633	36578	35964	40803
G₁₃	6344	13310	13487	5765	43765	36690	36513	44311
G₁₄	6235	12293	13263	5689	38765	32707	31737	39311
G₁₅	4366	9048	9118	4116	40634	35952	35882	40884

Tabla 6.8 Realizaciones de la función de estado límite

Los coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada obtenidos de acuerdo al procedimiento descrito en la **sección 3.5**, se muestran en la **tabla 6.9**.

Coeficiente	NODO			
	A04F	A05N	A05F	A09
c	.7727000E+04	.1181160E+06	.9010200E+05	.5115000E+04
a₁	-.2015960E+02	-.1994960E+02	-.1994960E+02	-.2015960E+02
a₂	-.1169143E+03	-.2205029E+04	-.1639543E+04	-.1112000E+03
a₃	.1481876E+05	-.4104478E+05	-.1413646E+05	.2018124E+05
a₄	.1000000E+01	.1000000E+01	.1000000E+01	.1000000E+01
b₁₁	.9366000E-09	-.9800000E-02	-.9800000E-02	-.1414000E-09
b₂₂	-.1176000E+00	.7576000E+01	.5825000E+01	.5224000E-01
b₃₃	.9093000E+03	-.1546000E+05	.9093000E+03	-.4319000E+04
b₄₄	.1230000E-14	.6556000E-15	.1482000E-14	.9614000E-15
b₁₂	.1624000E-08	-.1600000E-01	-.1600000E-01	-.6451000E-10
b₁₃	.2090000E+02	.2687000E+02	.2687000E+02	.2090000E+02
b₁₄	-.2311000E-11	.7506000E-12	-.1211000E-11	-.5838000E-12
b₂₃	-.1779000E+03	.7749000E+03	.1681000E+03	-.1852000E+03
b₂₄	-.1636000E-11	-.2232000E-11	-.3365000E-11	-.3416000E-14
b₃₄	.2908000E-09	.2184000E-09	.3353000E-09	.1901000E-09

Tabla 6.9 Coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada

Resultados

A continuación se presentarán los resultados de los cuatro puntos analizados en la tubería de acuerdo a los valores medios.

NODO A04F					
U^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.27864E-01	.70431E+02	-.73173E-02	3.80802	.00007	.00006
.36023E+01	.24130E+03	-.94598E+00			
.24206E+00	.47809E+00	-.63565E-01			
-.12103E+01	.412789E+05	.31784E+00			

Tabla 6.10 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A04F

NODO A05N					
U^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.52379E-01	.72178E+02	-.18634E-01	?	?	?
-.14300E+01	.49963E+02	.50871E+00			
-.75550E+00	.43349E+00	.26877E+00			
-.22985E+01	.32761E+05	.81770E+00			

Tabla 6.11 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05N

NODO A05F					
U^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.15204E-01	.70255E+02	-.91749E-02	?	?	?
.16107E+01	.13448E+03	-.97200E+00			
-.40931E-02	.46647E+00	.24700E-02			
-.38911E+00	.32686E+05	.23481E+00			

Tabla 6.12 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05F

NODO A09					
u^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.16537E-11	.10000E+03	.15468E-10	5.13183	0.0000014	.00000
-.12468E-04	.14000E+03	-.11662E-03			
.13598E-11	.37500E+00	.12719E-10			
.10691E+00	.35561E+05	.10000E+01			

Tabla 6.13 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A09

Tablas y resultados de acuerdo a los valores nominales.

En la **tabla 6.14** se presentarán los parámetros estadísticos de acuerdo a los valores nominales, en donde podemos apreciar que no necesitaremos el valor de K , por lo tanto los valores medios tomarán el de los valores nominales.

Variables	Valores nominales (V.N.)	Coefficiente de variación (c.v.)	Valores medios ($\bar{V}_K$)	Desviación estándar (σ_v)	f. d. P.
Presión	100 lb/in ²	0.20	100	20	NORMAL
Temp. operación	140°F	0.30	140	42	NORMAL
Temp. ambiente	70°F				DETERM.
Z (profundidad de enterramiento de la tubería)	6 ft				DETERM.
γ (peso de la unidad del suelo)	125 lb/ft ³				DETERM.
d (diámetro)	18 in				DETERM.
T (espesor)	0.375 in	0.10	0.375	0.0375	NORMAL
E (módulo de elasticidad)	29×10^6 lb/in ²				DETERM.
α (coef. de expansión térmica)	0.61 in/100ft				DETERM.
ϵ (deformación térmica)	1.5167×10^{-3}				DETERM.
SMYS	35000 lb/in ²	0.15	35000	5250	NORMAL

Tabla 6.14 Parámetros estadísticos

Las realizaciones de las variables de base están dadas en la **tabla 6.15**

VARIABLES			
X_1	X_2	X_3	X_4
.100000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.110000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.100000E+03	.154000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.100000E+03	.140000E+03	.337500E+00	.350000E+05
.100000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.315000E+05
.120000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.100000E+03	.168000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.100000E+03	.140000E+03	.300000E+00	.350000E+05
.100000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.315000E+05
.110000E+03	.154000E+03	.375000E+00	.350000E+05
.110000E+03	.140000E+03	.337500E+00	.350000E+05
.110000E+03	.140000E+03	.375000E+00	.315000E+05
.100000E+03	.154000E+03	.337500E+00	.350000E+05
.100000E+03	.154000E+03	.375000E+00	.315000E+05
.100000E+03	.140000E+03	.337500E+00	.315000E+05

Tabla 6.15 Realizaciones de las variables de base

Las realizaciones de la función de estado límite para aproximar la función cuadrática están dadas en la **tabla 6.16**.

	Esfuerzos (σ)				G			
	NODOS				NODOS			
	A04F	A05N	A05F	A09	A04F	A05N	A05F	A09
G₁	17051	25397	28518	11405	17949	9603	6482	20595
G₂	17179	25524	28645	14532	17821	9476	6355	20468
G₃	21159	25743	33314	17020	13841	9257	1686	17980
G₄	17044	30080	29869	14538	17956	4920	8131	20462
G₅	17051	25397	25518	14405	14449	6103	5982	17099
G₆	17036	25652	28773	14659	17694	9348	6227	20341
G₇	25736	23905	36918	19636	9264	11095	-1918	15364
G₈	16963	32245	31249	14705	18037	-245	3751	20295
G₉	17051	25397	28518	14405	10949	2603	-518	13595
G₁₀	21287	25870	33442	17148	13713	9130	1558	17852
G₁₁	17185	30221	30010	14679	17815	4779	4990	20321
G₁₂	17179	25524	28645	14532	14321	5976	2855	16968
G₁₃	21059	30928	34578	14153	13941	4072	422	17847
G₁₄	21159	25743	33314	17020	10341	5757	-1814	14480
G₁₅	17044	30080	29869	14538	14456	1420	1631	16962

Tabla 6.16 Realizaciones de la función de estado límite

Los coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada se muestran en la **tabla 6.17**

Coeficiente	NODO			
	A04F	A05N	A05F	A09
c	-.5031000E+04	.8247800E+05	.1240020E+06	.1148000E+05
a₁	-.2685000E+02	-.2565000E+02	-.3024650E+04	-.2970000E+02
a₂	.1247500E+03	-.2021286E+04	-.3316571E+04	-.1881786E+03
a₃	.2400000E+04	.1093867E+06	.8628400E+06	.9493333E+04
a₄	.1000000E+01	.1000000E+01	.7857143E+01	.1009143E+01
b₁₁	.5000000E-02	-.5000000E-02	-.5000000E-02	.4051000E-13
b₂₂	-.1196000E+01	.5571000E+01	.3041000E+01	-.2551000E-02
b₃₃	.2631000E+05	-.1714000E+06	-.1031000E+05	-.1209000E+05
b₄₄	.1263000E-14	-.01506000E-14	-.2449000E-03	-.3265000E-06
b₁₂	.2727000E-09	-.4577000E-09	-.7143000E-02	-.7143000E-02
b₁₃	.3467000E+02	.3733000E+02	.3733000E+02	.3733000E+02
b₁₄	-.7498000E-12	-.1458000E-11	.8571000E-01	.1143000E-03
b₂₃	-.1771000E+03	.9562000E+03	-.16557000E+03	-.5456000E-07
b₂₄	-.1843000E-12	-.3380000E-11	.6122000E-01	.8163000E-04
b₃₄	.2234000E-09	-.3207000E-09	-.2286000E+02	-.3048000E-01

Tabla 6.17 Coeficientes de la ecuación cuadrática aproximada

A continuación se presentarán los resultados de los cuatro puntos analizados en la tubería de acuerdo a los valores nominales.

NODO A04F					
u^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.86663E-10	.10000E+03	-.76442E-10	1.13372	.12845	.08398
.99877E+00	.18195E+03	-.88097E+00			
.23863E-01	.37589E+00	-.21049E-01			
-.53592E+00	.32186E+05	.47271E+00			

Tabla 6.18 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A04F

NODO A05N					
u^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
-.47680E-10	.10000E+03	.73872E-10	?	?	.02437
.49004E+00	.16058E+03	-.75924E+00			
-.21110E+00	.36746E+00	.31156E+00			
-.36880E+00	.33064E+05	.57139E+00			

Tabla 6.19 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05N

NODO A05F					
u^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.16742E-10	.10000E+03	-.28981E-10	.57769	.28173	.16381
.43251E+00	.15817E+03	-.74868E+00			
-.38935E-01	.37354E+00	.67399E-01			
-.38098E+00	.33000E+05	.65949E+00			

Tabla 6.20 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A05F

NODO A09					
u^*	x^*	α	FORM		MONTE CARLO
			BETA	PROBABILIDAD DE FALLA	PROBABILIDAD DE FALLA
.16537E-11	.10000E+03	.15468E-10	?	?	?
-.12468E-04	.10000E+03	-.11662E-03			
.13598E-11	.37500E+00	.12719E-10			
.10691E+00	.35561E+05	.10000E+01			

Tabla 6.21 Resultados de las probabilidades de acuerdo al nodo A09

6.3. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

El método de Superficie de Respuesta Cuadrática resulta un poco tedioso ya que consta de varios pasos, sin embargo es una alternativa poco costosa (desde el punto de vista computacional) para realizar análisis de confiabilidad cuando no disponemos de la función de estado límite de manera explícita. Recordando los pasos que son:

- Seleccionar las variables y el conjunto de puntos (X_i)
- Para cada conjunto obtener una realización de la función límite ($G(X)^i$)
- Obtener los coeficientes para aproximar la función de estado límite ($Q(X)$)
- Realizar el análisis de confiabilidad a la superficie aproximada β
- Analizar los resultados

Además, su aproximación es buena y resulta fácil la programación del método en algún lenguaje de programación. Debemos señalar que el método requiere de la obtención de una segunda iteración que debe partir de los valores X^* , que son parte de los resultados de la evaluación de β .

De acuerdo a los resultados que obtuvimos podemos notar que no para todos los puntos el método dio resultados. Actualmente no sabemos la razón por la cual no converge el algoritmo de optimización. No sabemos si es la función aproximada, si es el algoritmo o si existe alguna otra razón. Quedará para desarrollos posteriores al presente trabajo.

En el método de Monte Carlo directo resulta muy difícil y muy caro desde el punto de vista computacional. Para su realización tendríamos que correr el programa AutoPipe para cada una de las simulaciones. Como se indicó en capítulos anteriores, para obtener una buena aproximación podríamos necesitar en algunos casos 10,000 o más simulaciones. Lo que quiere decir demasiado esfuerzo computacional. Sin embargo, el método es bueno y regularmente se utiliza para calibrar los métodos aproximados.

El método de Monte Carlo con Superficie de Respuesta Cuadrática resultó muy rápido y no caro, dado que las simulaciones se realizan únicamente para la superficie aproximada y no es necesario realizar análisis con el programa Autopipe para cada simulación. Es decir, la simulación se realiza directamente en la función cuadrática aproximada. Sin embargo sus

resultados no funcionaron para todos los puntos, muy probablemente por problemas en la programación. Esta parte no era parte central en el trabajo y también quedará como parte de desarrollos posteriores.

Para la obtención de los resultados de β se utilizaron valores medios y valores nominales. Para la obtención de los valores medios es mucho mejor partir de datos estadísticos. Cuando no contamos con ellos suponemos un coeficiente de variación y obtenemos los valores medios a partir de los valores nominales, como se describió anteriormente.

Los resultados muestran que los niveles de seguridad con los que se diseñan las tuberías son grandes. Los valores de probabilidad de falla calculados son pequeños. Para el tipo de estructuras que estamos estudiando, esto resulta en un alto nivel de seguridad. Cuando utilizamos valores medios apreciamos que estamos cerca de la falla lo que implica la idea de que nuestro diseño, utilizando valores nominales, está del lado de la seguridad.

Los resultados adicionales del método FORM podemos interpretarlos de la manera siguiente: Los cosenos directores son una medida del peso estocástico de cada una de las variables en la función límite. Además estos valores son valores relativos dado que la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados debe ser igual a uno.

En los casos en donde obtuvimos resultados el método brinda un resultado suficientemente aproximado de la probabilidad de falla. Esto se aprecia al comparar la probabilidad de falla obtenida por FORM y la obtenida con Monte Carlo.

7. CONCLUSIONES.

El objetivo central del presente trabajo fue mostrar algunas aplicaciones posibles de los métodos de confiabilidad en los análisis de flexibilidad de tuberías de conducción de hidrocarburos. Para ello presentamos en el segundo capítulo, algunos conceptos básicos de probabilidad, estadística y confiabilidad para introducir el vocabulario y algunos conceptos elementales.

En el capítulo tres se realizó una somera presentación de algunos de los métodos de Confiabilidad. Presentamos el método de simulación de Monte Carlo, pero también presentamos algunos métodos aproximados de gran auge en el mundo en nuestros días, este es el método FORM-SORM. Asimismo presentamos un método que nos permite realizar los análisis para los casos donde no conocemos la superficie de estado límite de manera explícita, función de variables aleatorias de base, este es el método de Superficie de Respuesta Cuadrática

Los métodos de análisis de esfuerzos para tuberías enterradas se presentaron en el capítulo cuatro. Para evaluar y diseñar tuberías podemos considerar las líneas de conducción como vigas tridimensionales sujetas a diferentes tipos de sollicitaciones. Para evaluarlas existen prácticas comunes de utilización internacional, basadas en la mecánica de materiales y en los métodos de análisis estructural matricial o en el método de elementos finitos. El

capítulo presentó una breve descripción de los diferentes tipos de análisis y de las normas técnicas que se utilizan en la especialidad de diseño mecánico de tuberías de conducción.

Se realizó en el capítulo cinco un análisis de flexibilidad para una tubería enterrada con el fin de mostrar la manera de aplicar los métodos de análisis y para sensibilizarnos respecto a lo complicado que puede ser una análisis debido al gran número de variables que intervienen y a lo complejo del sistema.

Para mostrar los potenciales de los métodos de confiabilidad en el capítulo seis se realizó la aplicación de confiabilidad en análisis de esfuerzos, es decir, aplicado al mismo análisis de la tubería enterrada del capítulo anterior, haciendo énfasis en el método de la superficie de respuesta cuadrática, que es el que permite realizar las evaluaciones de confiabilidad en los casos que nos ocupan.

De acuerdo a los resultados que obtuvimos podemos concluir que:

- a) El método no dio resultados para todos los casos estudiados. Actualmente no sabemos la razón por la cual no converge y puede que sea por que el algoritmo de optimización no llegue a la convergencia.
- b) El método de Monte Carlo directo resulta muy difícil y muy caro desde el punto de vista computacional. Para su realización tendríamos que correr el programa AutoPipe para cada una de las simulaciones. Sin embargo, el método es bueno y regularmente se utiliza para calibrar los métodos aproximados.
- c) El método de Monte Carlo para evaluar la Superficie de Respuesta Cuadrática resultó muy rápido y económico, dado que las simulaciones se realizan únicamente para la superficie aproximada y no es necesario realizar análisis con el programa Autopipe para cada simulación.
- d) Para la obtención de los resultados de β se utilizaron valores medios y valores nominales. Como se indicó la obtención de los valores medios es mucho mejor partir de datos estadísticos. Pero como no contamos para este trabajo con dichos datos, se supusieron a partir del coeficiente de variación y de los valores nominales.
- e) Los resultados muestran que los niveles de seguridad con los que se diseñan las tuberías son grandes. Los valores calculados de probabilidad de falla son pequeños, o lo que es lo mismo, los valores de beta son grandes. Para el tipo de estructuras que estamos estudiando,

esto resulta en un alto nivel de seguridad. La utilización de valores nominales se hizo únicamente para fines comparativos.

- f) Los resultados adicionales del método FORM nos dan información referente a la importancia relativa de las variables que participan en la función límite. La variable de mayor pesos para los casos estudiados es la temperatura, lo que se refleja por el mayor valor de los cosenos directores (alfa) para el nodo A04F, mientras que para el nodo A09 resulta ser el SMYS.

Los métodos descritos y utilizados, no dan resultados en todos los casos. Su evaluación y aplicación quedará para trabajos posteriores, en los que además debemos tomar en cuenta otras variables como aleatorias, así como evaluar otras posibilidades de evaluación de probabilidad de falla, como por ejemplo: los métodos de simulación condicionada o los métodos de simulación direccional. Además debemos de evaluar la posibilidad de mejorar los procedimientos para garantizar el buen funcionamiento de los métodos. De igual manera se deberá evaluar la posibilidad de automatizar el método SRQ, para disminuir el riesgo de error, una vez probados los programas que resulten.

Se ha mostrado una aplicación práctica de los métodos de confiabilidad en el área de análisis de esfuerzos de tuberías de conducción de hidrocarburos. Si bien los datos no corresponden a una tubería real que exista en México, son datos realistas, lo único que muestran es la factibilidad de la aplicación de métodos avanzados para la evaluación de la seguridad de tuberías. Resta, además de lo indicado arriba, desarrollar trabajos de investigación o de desarrollo tecnológico para aplicar los métodos de confiabilidad en programas de mantenimiento preventivo y correctivo de ductos, además de utilizar los métodos para que sus resultados se utilicen en programas integrales de evaluación de riesgo en instalaciones petroleras completas.

REFERENCIAS

- [INFANTE] Métodos Estadísticos. Said Infante Gil, Guillermo P. Zárate de Lara. Editorial Trillas 1990.
- [FREUND] Estadística Elemental. John E. Freund, Gary A. Simon. Editorial/production: Nick Romanelli 1994.
- [MENDENHALL] Estadística Matemática con Aplicaciones. William Mendenhall, Richard, L. Scheaffer, Dennis D. Wackerly. Grupo Editorial Iberoamérica 1986
- [DITLEVSEN] John Wiley & Sons Ltd. Structural Reliability Methods, O. Ditlevsen, H. O. Madsen, 1996.
- [OFM TESIS] O. Flores-Macias. Modèles fiabilistes et mécaniques : élément finis stochastiques. Méthodes de couplage et applications. Tesis doctoral de la Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Francia, 15 Novembre 1994.
- [RJASHEKHAR] M. R. Rajashekhar and B. R. Ellingwood, A new look at the response surface approach for reliability analysis, Structural Safety 1993.
- [B31.3] ASME Code for Pressure Piping, B31 An American National Estándar, CHEMICAL PLANT AND PETROLEUM REFINERY PIPING, 1993.
- [B31.4] ASME Code for Pressure Piping, B31 An American National Estándar, LIQUID TRANSPORTATION SYSTEMS FOR HYDROCARBONS, LIQUID PETROLEUM GAS, ANHYDROUS AMMONIA, AND ALCOHOLS, 1992.
- [B31.8] ASME Code for Pressure Piping, B31 An American National Estándar, GAS TRANSMISSION AND DISTRIBUTION PIPING SYSTEMS, 1992.
- [APENDICE] AutoPIPE, Pipe stress Analysis Version 5.0, Appendices.
- [KELLOGG] THE M. W. KELLOGG COMPANY, Design of Piping Systems, John Wiley & Sons, Inc. The M. W. Kellogg Company 1941, 1956
- [RUBENSTEIN-A] R. Y. RUBENSTEIN. Simulation and the Monte Carlo Method. Jhon Wiley & Sons Edition, USA, 1981
- [ABDO] T. Abdo and R. Rackwitz. A new b-point algorithm for large time-invariant and time-variant reliability problems. In Reliability and Optimisation of Structures 90 Proc. of the 3th WG 7.5 IFIP Conference, Berkeley, 1990.
- [HASOFER] A.M. Hasofer and N.C. Lind. Exact and invariant second-moment code format. Engineering Mechanics Division, ASCE, 100, 1974.
- [KIUREGHIAN-A] A. Der Kiureghian and J.B. Ke. The stochastic finite element method in structural reliability. Probabilistic Engineering Mechanics, 3(2), 1988.
- [KIUREGHIAN-B] A. Der Kiureghian and P.L. Liu. Structural reliability under incomplete probability information. Journal of Engineering Mechanics, 112(1), 1986.
- [LEMAIRE] M. Lemaire. Evaluation des indices de fiabilité associés à des modèles de mécanique des structures. Revue Française de Mécanique, 3, 1992.
- [LIU] P.L. Liu and A. Der Kiureghian. Optimization algorithms for structural reliability. Structural Safety, 9(3):161-117, 1990.
- [RACKWITS] R. Rackwitz and B. Fiessler. Structural reliability under combined random load sequence. Computers and Structures, 9(5), 1978.

- [MADSEN] H.O. Madsen, S. Krenk and N.C. Lind. Methods of structural safety. Prentice-Hall, 1986.
- [ROSENBLATT] M. Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. The annals of Mathematical Statistics, 23, 1952.
- [BREITUNG] K. Breitung. Asymptotic approximation for multinormal integrals. Journal of Engineering Mechanics, 110 (3), 1984.
- [HOHENBICHLER] M. Hohembichler and R. Rackwitz. Non-normal dependent vectors in structural safety. Journal of Engineering Mechanics, 107(EM6), 1981.
- [IMP] Instituto Mexicano del Petróleo, Análisis e interpretación de los códigos ANSI B.31.3, B.31.4 y B.31.8, Mayo 1989.

Apéndice A

ANÁLISIS DE TUBERÍAS ENTERRADAS⁴.

A.1. Discretización del modelo.

El análisis de un sistema de una tubería enterrada requiere para el modelo una consideración especial. Esto es porque la restricción (apoyo) proporcionada por el suelo que rodea una línea enterrada es continua. Como el análisis en AutoPipe está basado en puntos definidos discretamente, un modelo exacto de las capacidades de la restricción del suelo requeriría la definición de un número grande de puntos del tubo estrechamente espaciados. Cada punto del suelo requeriría un juego de resortes de apoyo que modelan la rigidez proporcionada por la tierra en ese punto. El esfuerzo requerido para construir un modelo semejante no es práctico. Por consiguiente, un método racional es necesario para determinar el número y distribución de puntos requeridos para el suelo al realizar un análisis que proporcione resultados bastante aproximados.

Cuando los codos (*i.e.* codos L, miters y tramos curvos) o T (incluyendo otras conexiones de tubería) están presentes en un sistema de tubería enterrada, pueden generarse momentos flexionantes significativos y las fuerzas axiales en la región de estos elementos geométricos bajo presión, temperatura o aplicación de cargas sísmicas. A una distancia lejos del codo (o T) el momento flexionante se volverá muy pequeño, dejando la tubería solo sujeta a fuerza axial. Para obtener en tiempo y costo un análisis de esfuerzo aproximado, el espacio entre los puntos del suelo cerca de los codos deben ser pequeño, para simular la interacción de la flexión del tubo y del apoyo del suelo transversal. Sin embargo, más allá del codo, el único efecto a ser modelado es la transferencia de la fricción del suelo a la carga axial del tubo. El efecto axial puede ser modelado adecuadamente usando espacios mas grandes entre los puntos del suelo.

La forma de escoger los espacios de los puntos del suelo en una tubería enterrada cualquiera se han desarrollado de consideraciones del comportamiento de una viga flexible en una cimentación elástica y efectos de anclaje de tubo.

⁴ El texto se tomó de la referencia [APENDICE]

La **figura A-1(A)** muestra una viga flexible en una cimentación continua elástica a una carga puntual R . La distribución de desplazamiento (y reacción de la presión), mostrada en la **figura A-1(B)**, está dada por:

$$r(x) = \frac{R\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (\text{A-1})$$

donde:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (\text{A-2})$$

Para una tubería enterrada con un codo (o T), el comportamiento de la presión lateral del suelo puede ser similar a la del caso de una viga flexible sobre una cimentación continua elástica. La **figura A-1(c)** muestra una vista del plano de esta situación, donde una fuerza axial en una pierna produce un momento lateral en la otra pierna.

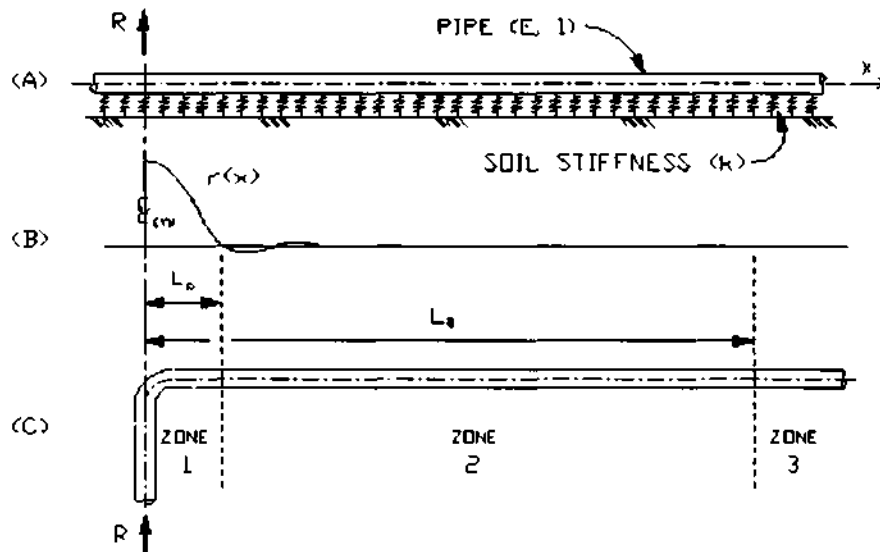


FIGURA A-1. Comparación de una tubería enterrada con un codo con una viga infinita sobre una cimentación elástica continua.

La forma de la curva del desplazamiento resultante es como se muestra en la **figura A-1(B)**, note que el desplazamiento disminuye con aumentar la distancia del codo. Así, tres zonas básicas de iteración suelo-tubo pueden ser definidas. Zona 1, es la más cercana al codo, es el área de mayor flexión efectiva la cual produce el mayor desplazamiento lateral de la tubería. Zona 2 es una región de transición donde los efectos de flexión son reducidos a pequeños niveles y cuando la distancia del codo aumenta se va haciendo cero y dejan sólo efectos axiales. Zona 3 es la región donde la tubería y el suelo indican desplazamientos (la tubería es efectiva o virtualmente fijado en el suelo).

La longitud de la zona 1 (L_b) es identificada como el punto donde el desplazamiento lateral primero se vuelve cero (cerca del codo). Esta longitud es conocida como el espacio de presión, está dada por:

$$L_b = \frac{3\pi}{4\beta} \quad (\text{A-3})$$

La longitud de la zona 1 más la Zona 2 es identificada como el punto donde la resistencia de fricción axial es proporcionada por el suelo disminuye a cero (Ningún desplazamiento del tubo relativo al suelo). Esta distancia es conocida como la longitud virtual de anclaje (L_a). La longitud virtual de anclaje no puede ser cuantificada directamente ya que su valor depende del tipo de respuesta de fuerza-desplazamiento del suelo. Sin embargo, puede estimarse bastante bien basado en otro término conocido como la longitud de desprendimiento máximo (L_m).

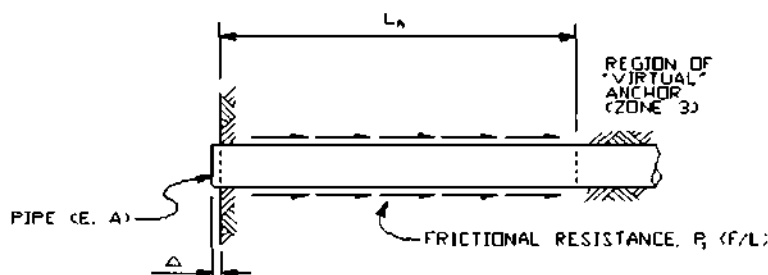


FIGURA A-2

Considere una tubería enterrada, como se muestra en la **figura A-2**, donde la fuerza del suelo vs. la respuesta del desplazamiento es rígido-plástico. Cuando la tubería está sujeta a una carga térmica (causando elongación), la fuerza de fluencia longitudinal del suelo (P_l) es generada para restringir el alargamiento de la tubería. La longitud de desprendimiento máximo puede ser determinada igualando la longitud del tubo sobre la fuerza de fluencia del suelo debe actuar para resistir la carga térmica del tubo. Así para lograr el equilibrio de fuerza.

$$P_l L_m = \varepsilon A E \quad (\text{A-4})$$

despejando:

$$L_m = \frac{\varepsilon A E}{P_l} \quad (\text{A-5})$$

donde:

L_m = Longitud máxima de desprendimiento (L).

ε = Deformación térmica de la tubería (adimensional)

A = Área del cruce seccional de la tubería enterrada (L^2)

E = Módulo de elasticidad de la tubería enterrada (F/L^2).

P_l = Fuerza de fluencia longitudinal del suelo (F/L). Ver la **sección A.4.2** para determinar los valores de estas variables.

La **ecuación A-5** es válida sin tener en cuenta el origen de la tensión ya que el desplazamiento suelo-tubo es relativo. Así, ε representa la deformación relativa total, que puede ser debido a cargas térmicas del tubo, o una onda sísmica (o una combinación de ambos). Como es notado, la base para la **ecuación A-5** es una respuesta rígida-plástica. Sin embargo, una correlación a la longitud virtual del ancla puede ser hecha por una evaluación de la gráfica fuerza del suelo vs. distancia, como se muestra en la **figura A-3**. Note que la

respuesta del suelo es rígida-plástica, la longitud de la región de tensión elástica tiende a cero. Así, L_m es igual a longitud de la región de tensión plástica, y también es igual a L_a .

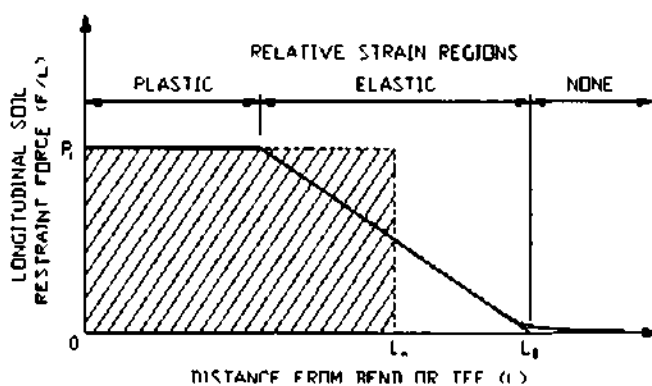


FIGURA A-3

La **figura A-3** muestra una distribución elástico-plástico de fuerza de restricción del suelo longitudinal como una función de la distancia de un codo (o T).

El área sombreada representa la fuerza total de restricción del suelo, calculada por la **ecuación A-5** igual a la fuerza de restricción del suelo actual representada por el área bajo la curva. La posición de la longitud de desprendimiento máximo (L_m) relativo a la región de tensión plástica depende sobre la forma de la fuerza del suelo vs la respuesta de la curva del desplazamiento. Sin embargo, el valor calculado de L_m siempre es menor que la longitud virtual del ancla (L_a) para elástico-plástico y la curva de la respuesta elástica. La siguiente fórmula (basada en estudios anteriores) debe ser usada para estimar L_a sin tener en cuenta el tipo de respuesta fuerza-desplazamiento del suelo.

$$L_a = C_0 L_m \quad (\text{A-6})$$

donde:

C_0 = constante adimensional que queda en el rango de 1.0 (suelo **rígido**) y sobre 2 (suelo **flexible**).

Nota: La magnitud de C_0 puede ser mayor que 2.0 si la longitud de fuerza de fluencia (P_f) no es alcanzada por el suelo. La comparación de los resultados de varios análisis para modelos de modelos de sistemas similares con varias longitudes virtuales del ancla indica que los valores estimados C_0 debe ser limitado al siguiente rango (a menos que un valor mayor puede justificarse).

$$1.5 \leq C_0 \leq 2.0$$

El modelo puede ser terminado y fijado a una distancia lejos de un codo (o T) igual a la longitud virtual del ancla (L_a) sin perder la exactitud para los resultados. Dependiendo en la configuración global del sistema de tubería y el tipo de análisis realizado la inclusión de la Zona 3 en el sistema puede o no puede ser necesario o deseable.

La **tabla A-1** puede servir como una guía para determinar el número de puntos del suelo, y los elementos enterrados requeridos en cada una de las tres zonas.

TABLA A-1		
Guidelines For Minimum Number of Soil Points		
Zone	Minimum Distance Between Soil Points	Minimum No. of Buried Pipe Elements
1	$\leq 1.5 \times D_0$	2, between the Near & Far tangents of a bend. And 3, between the tangent of a bend (or junction point of a tee) & the end of the bearing span.
2	$1.5 \times D_0$ near Zone 1 to $100 \times D_0$ near Zone 3; with a linear distribution of spacing lengths between these values.	4
3	$\geq 100 \times D_0$	0, piping system can be terminated & anchored.

A.2. Definiendo los puntos de suelo en AutoPipe.

El proceso de definición en un sistema de tubería enterrada, es una combinación de puntos de la tubería definidos por el usuario, generando los puntos internamente (por AutoPipe). El usuario sólo necesita definir los puntos de la tubería para identificar las siguientes partes críticas de un sistema de tubería enterrada:

Como se requiera en los cambios de la geometría del sistema.

Por especificación de los componentes de la tubería (e.g. válvulas, reductores, bridas, anclas, etc.).

Donde las propiedades del suelo cambia.

Donde el espaciamiento máximo (entre los puntos del suelo generados internamente) definido por el suelo cambie.

El primer y segundo punto son las más importantes. A menudo diferentes tipos de suelos son encontrados a lo largo de la tubería enterrada. Un punto de una tubería debe ser definido en la intersección de la tubería y el plano que divide el suelo. Esto permite relacionar una serie de propiedades del suelo con un rango específico de tubería (entre los puntos especificados de tubería). Donde se encuentre un nuevo tipo de suelo, un identificador del suelo y donde una serie de propiedades debe ser definido y aplicado desde ese punto en el sistema. Si una tubería enterrada tiene una orientación vertical, deben ser definidas propiedades nuevas. Esto es debido a que la orientación horizontal transversal hacia arriba y hacia abajo es relativo a los sistemas de coordenadas locales para una elemento recto de tubería. Sin embargo, si se cambia solamente el espacio máximo no es necesario cambiar el nuevo identificador del suelo. Simplemente modificando el valor del espacio para ser asociado con la porción marcada de la tubería enterrada (dentro de la región definida por ese identificador del suelo).

Un punto de la tubería debe ser definido también en cada localización donde el espacio máximo de un suelo será cambiado. Primero la longitud L_b y L_m debe ser calculado a mano para cada codo enterrado (o T). Entonces, la localización de los puntos requeridos de la tubería

puede ser identificada aplicando pautas racionales para el espacio de puntos del suelo en las tres zonas. Ya que AutoPipe no tiene la capacidad para especificar una linealización de espaciamiento en la zona de transición (zona 2), se deben de dar indicaciones además de las provistas en la **sección A-1**. La **figura A-4** muestra una aproximación para modelar los espacios en las tres zonas.

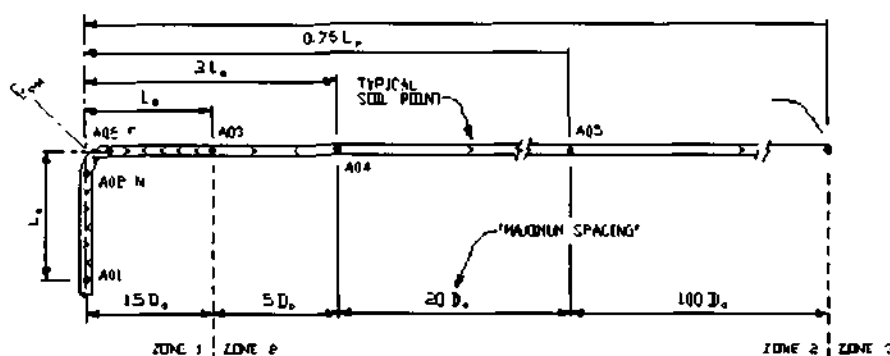


FIGURA A-4

Note que solo el punto A02 es requerido para la geometría del sistema. El punto A01 y A03 son definidos a una distancia de L_b del codo para marcar la región del espacio del apoyo en cada dirección. El punto A06 es definido y rígidamente fijado a una distancia de L_a ($= 1.5 L_m$) desde la interacción suelo-tubo va mas allá de este punto (zona 3) es mínimo. El punto A04 y A05 se ponen a una distancia lejos del codo así ese punto de espaciamiento del suelo puede ser especificado con señalar el rango aplicable de puntos del tubo. Las dimensiones basadas en la parte inferior de la **figura A-4** representa el máximo espacio (expresado como múltiplos del diámetro de la tubería) para ser especificado en cada grupo de puntos de la tubería.

El espacio máximo definido en el cuadro de diálogo de "SOIL" es usado por AutoPipe como un incremento para determinar el número de puntos del suelo, eso requiere que sea generado entre dos puntos adyacentes cualesquiera, sin tener en cuenta el espacio de esos puntos (e.g. un tubo, codo, válvula, etc.). Donde la distancia entre los puntos adyacentes no es igual al número de espaciamientos máximos, AutoPipe calcula un valor pequeño de espacios basado en el número total de espacios hallados entre los puntos de la tubería.

La **figura A-5** muestra una tubería enterrada donde la distancia de A05 a A06 es L . Si " L " no es totalmente divisible por el espacio máximo (S), el último intervalo puede ser menor que " S " (este último tramo será la longitud $c \cdot S$ donde " c " es una constante en el rango $0 < c < 1$).

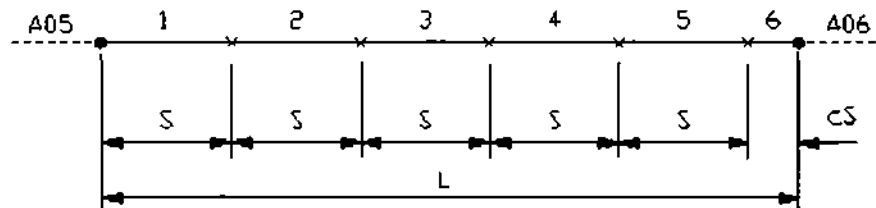


FIGURA A-5

AutoPipe compara la longitud del último espacio del intervalo (número 6 en la **Figura A-5**) donde es especificado el valor del espacio máximo. Si la longitud del último intervalo es menor que el valor del espacio máximo, el punto del espacio del suelo es recalculado por la siguiente ecuación:

$$S' = \frac{L}{n} \quad (\text{A-7})$$

donde:

- S' = Longitud del espacio actual usado por AutoPipe para generar puntos del suelo (L)
- L = Longitud entre los puntos adyacentes de la tubería (L)
- n = Número total de intervalos de puntos del suelo, basado en el espacio máximo " S " (adimensional)

Por otro lado, si el valor del espacio especificado (S) es mayor que la distancia entre los puntos adyacentes de la tubería (L), solamente un punto del suelo requiere ser generado a la mitad entre los puntos de la tubería. Otra vez está sin tener en cuenta lo que conecta esos puntos.

AutoPipe calcula los espaciamientos de los puntos del suelo, y genera los puntos actuales del suelo cuando el chequeo Global es ejecutado. Esto solo debe ser notado que los espaciamientos de los puntos del suelo usado por AutoPipe (S') no reemplazan los valores de espaciamientos máximos especificado por cada suelo definido.

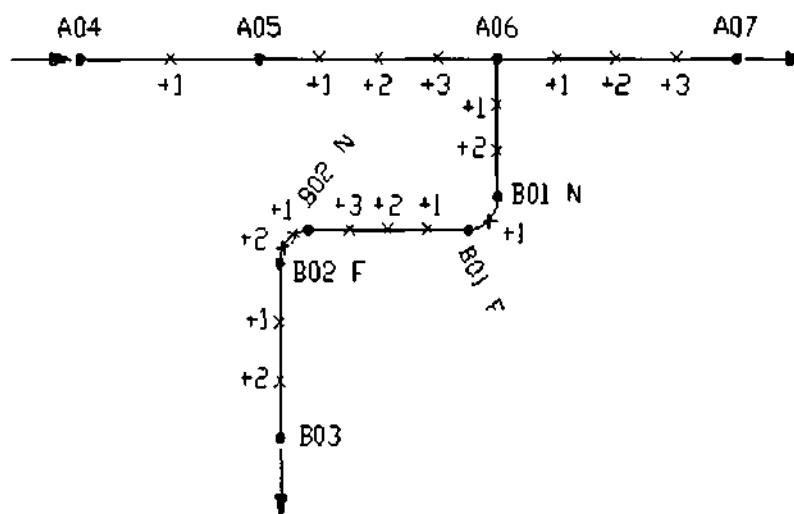
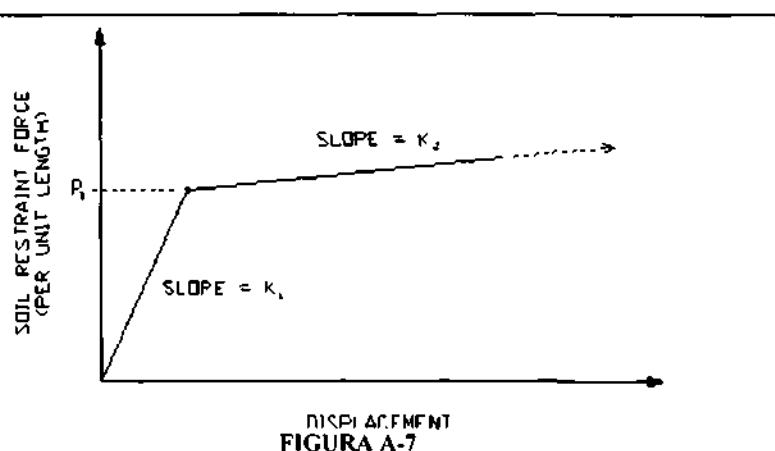


FIGURA A-6

A.3. Propiedades contenidas en AutoPipe.

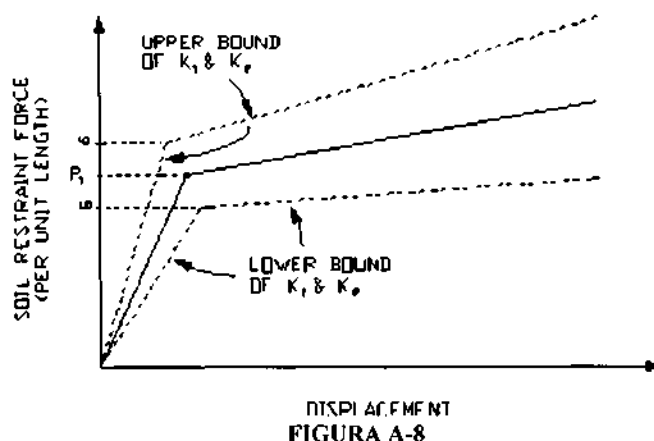
El cuadro de diálogo "SOIL" permite la especificación de la fuerza restringida del suelo vs. desplazamiento relacionado por cada dirección relativa a la orientación de una línea enterrada. Esto permite considerar la no-linealidad de la restricción inherente a una tubería enterrada que descansa al inferior de la zanja excavada. La **figura A-7** muestra un diagrama fuerza-desplazamiento con la entrada de variables requeridas identificadas por AutoPipe.

NOTA: Referencia a la sección 6.5 del manual *User Reference* para los detalles relacionados al desplazamiento bi-direccional suponiendo un análisis no lineal.



Este formato de entrada proporciona flexibilidad en el método usado para modelar la rigidez del suelo. Esa definición permite ir de la respuesta rígida - plástica a la aproximación de la forma actual de la curva de rigidez (en el rango de pequeños desplazamientos). Note que si el valor de K_2 es cero, P_1 se vuelve la última fuerza del suelo restringida para cualquier desplazamiento que es mayor que el desplazamiento de fluencia correspondiente. Recíprocamente, si K_2 no es cero, los desplazamientos grandes podrían causar cálculos menos exactos para la fuerza de restricción de suelo (no hay ningún punto del corte subsecuentemente para el extremo superior de la región de K_2).

Pueden esperarse diferencias en la resistencia del suelo ocurriendo de punto a punto a lo largo de un tubo enterrado debido a las variaciones en las propiedades de los suelos. Inevitable, hay también un poco de incertidumbre acerca de los valores más representativos de K_1 , P_1 , y K_2 para diseño. Con estas condiciones es a menudo realizar estudios paramétricos para determinar efectos que las variaciones en los valores supuestos llevan a la conducta de la tubería enterrada. Un rango de valores que producen un límite superior e inferior como se muestra en la **figura A-8** es conveniente para los estudios paramétricos.



Si se encuentran variaciones en la resistencia del suelo para tener un efecto importante en el comportamiento del tubo, el rango de incertidumbre puede ser disminuido por investigaciones en el sitio especificado de las propiedades del suelo. Si las variaciones de la resistencia del suelo no tienen un efecto significativo en el comportamiento de la tubería, no se garantizan estudios paramétricos detallados.

Debe aclararse que las orientaciones transversal horizontal, longitudinal, transversal vertical arriba y transversal vertical abajo (las categorías del parámetro de suelo se muestran en el cuadro de diálogo "SOIL") son relativos al sistema de coordenadas locales usada para los elementos de tubos rectos. Así, el parámetro del suelo longitudinal resiste el movimiento axial de la tubería (a lo largo del eje local x), mientras el parámetro transversal horizontal resiste el movimiento de la tubería a lo largo del eje local z. El momento de la tubería en la dirección del eje local +y es resistido por el parámetro transversal vertical superior, y el movimiento en la dirección del eje local -y es resistido por el parámetro por el parámetro transversal vertical abajo.

Esta convención es consistente para modelar una tubería enterrada que es colocada en el fondo de una zanja. Sin embargo, si una sección de una tubería enterrada se encuentra orientada verticalmente, la categoría hacia arriba y hacia abajo en el cuadro de diálogo de "SOIL" no corresponden a las direcciones físicas hacia arriba y hacia abajo (como es definido para la gravedad). Así un nuevo suelo debe ser definido para cambiar las orientaciones de las propiedades direccionales como para una tubería puesta horizontalmente.

A.4. Cálculo de las propiedades de las restricciones del suelo.

Un ingeniero geotécnico debe evaluar suelos para que sean modelados en AutoPipe, y los valores de diseño requeridos para las variables de entrada ($K1$, $P1$, y $K2$). Sin embargo, estas variables no siempre son incluidas en un informe del suelo. Por consiguiente, esta sección ofrece al diseñador estimar (rangos de) datos de entrada requeridos. Recuerde, éstas sólo son pautas, las condiciones del suelo pueden variar grandemente y cada situación debe ser repasada por un ingeniero geotécnico (ej. los suelos congelados requerirán consideración adicional).

Los usuarios de *PipeSOIL* no deben considerar cualquier propiedad del suelo asumida o estimada para modelar sitios del suelo específicos a menos que los valores publicados sean corroborados por un ingeniero geotécnico que conozca los tipos de suelo involucrado.

Típicamente, las pruebas del laboratorio y estudios del campo pueden proporcionar los datos de propiedad de suelo siguientes:

Peso de la unidad (g)

Volumen de agua

Compactación relativa

Fuerza cortante sin drenar (S_u)

Cohesión (c)

Angulo de fricción interna (ϕ)

Angulo de fricción de suelo contra la cara del tubo (δ)

Juntas, estas propiedades pueden usarse para construir una relación de fuerza-desplazamiento de restricción para el suelo que rodea un tubo enterrado. Donde algunos de estos datos no están disponibles a través de pruebas, se proporcionan tablas que dan estimaciones. El usuario debe ser consciente que las estimaciones generalmente requieren estudios paramétricos en orden para limitar la respuesta del suelo como se discutió en las Propiedades de Restricción de Suelo en el tema de AutoPipe.

Una respuesta elástico-plástico ($K_2 = 0$) se asume para la determinación de la fuerza de restricción del suelo vs. relación de desplazamiento. Esta es una suposición que es consistente con practica aceptada, y proporciona alguna conservación de diseño. También, cualquier sobrecarga (ej. una carga de la cimentación al nivel del suelo) efectuando propiedades del suelo deben ser considerados además de los métodos definidos en los sub-secciones siguientes.

Primero, el suelo (s) debe identificarse según un sistema de clasificación estándar. Donde sea aplicable, se hará referencia al Sistema Unificado de Clasificación del Suelo (vea **Tabla A-2**, y **Figura A-9**) para definir los tipos de suelo. Una vez que el suelo es clasificado, pueden seleccionarse ecuaciones para determinar las propiedades del suelo requeridas por AutoPipe. El conocimiento del tipo de suelo también ayuda cuando deben estimarse valores de propiedad. La **Tabla A-3** se ha proporcionado para mantener valores comparativos γ , c , y ϕ .

NOTAS

1. El área sombreada que se muestra en la gráfica de los límites de Atterberg, (vea **figura A-9**) son clasificaciones del suelo que requieren el uso de símbolos dobles de clasificación. La ecuación de la "línea - A" es como sigue: $I_p = 0.73 (WL - 20)$
2. Para suelos que tienen entre 5 y 12% de los suelos finos que pasan a través de la malla No. 200, usan símbolos dobles (ej. GW-GC).
3. Definición de Variables:

C_u = coeficiente de uniformidad

I_p = índice de plasticidad (%)

C_z = coeficiente de curvatura

W_L = límite líquido (%)

Las propiedades para el relleno del suelo alrededor de un tubo enterrado pueden variar y pueden depender grandemente del tipo de suelo y el grado de consolidación del relleno. Se resumen pautas generales por estimar propiedades del suelo basadas en estos factores en la **Tabla A-4**.

TABLE A-2

Unified Soil Classification System (ASTM D-2487)					
Major Divisions		Gp Sym	Soil Description	Lab Classification Criteria	
				General	% Finer than #200 Sieve (Note 2)
Coarse-Grained Soils (over 50% by weight retained on No. 200 sieve)	Gravelly Soils	GW	Well graded gravels, gravel-sand mixtures, little or no fines	$C_u > 4$ and $1 < C_c < 3$	Less than 5
	(over 50% of coarse fraction retained on No. 4 sieve)	GP	Poorly graded gravels, gravel-sand mixtures, little or no fines	not meeting both criteria for GW	Less than 5
		GM	Silty gravels, gravel-sand-silt mixtures	Atterberg limits plot below "A-line", or $I_p < 4$ (see Note 1)	More than 12
		GC	Clayey gravels, gravel-sand-clay mixtures	Atterberg limits plot above "A-line" and $I_p > 7$ (see Note 1)	More than 12
	Sandy Soils	SW	Well graded sands, gravelly sands, little or no fines	$C_u > 6$ and $1 < C_c < 3$	Less than 5
	(over 50% of coarse fraction passes thru No. 4 sieve)	SP	Poorly graded sands, gravelly sands, little or no fines	not meeting both criteria for SW	Less than 5
		SM	Silty sands, sand-silt mixtures	Atterberg limits plot below "A-line", or $I_p < 4$ (see Note 1)	More than 12
		SC	Clayey sands, sand-clay mixtures	Atterberg limits plot above "A-line" and $I_p > 7$ (see Note 1)	More than 12
Fine-Grained Soils (over 50% by weight passes thru No. 200 sieve)	Sils & Clays ($w_L < 50\%$)	ML	Inorganic silts & very fine sands, rock flour, silty or clayey fine sands, or clayey silts with slight plasticity	Use the Plasticity chart (Figure D-9) for classification of fine-grained soils and fine fraction of coarse-grained soils. (see Note 1)	
		CL	Inorganic clays of low to medium plasticity, gravelly clays, sandy clays, silty clays, lean clays		
		OL	Organic silts and organic silty clays of low plasticity		
	Sils & Clays ($w_L > 50\%$)	MH	Inorganic silts, micaceous or diatomaceous fine sandy or silty soils, elastic silts		
		CH	Inorganic clays of high plasticity, fat clays		
		OH	Organic clays of medium to high plasticity, organic silts		
	Highly Organic Soils	PT	Peat, muck and other highly organic soils	Visual-manual identification	

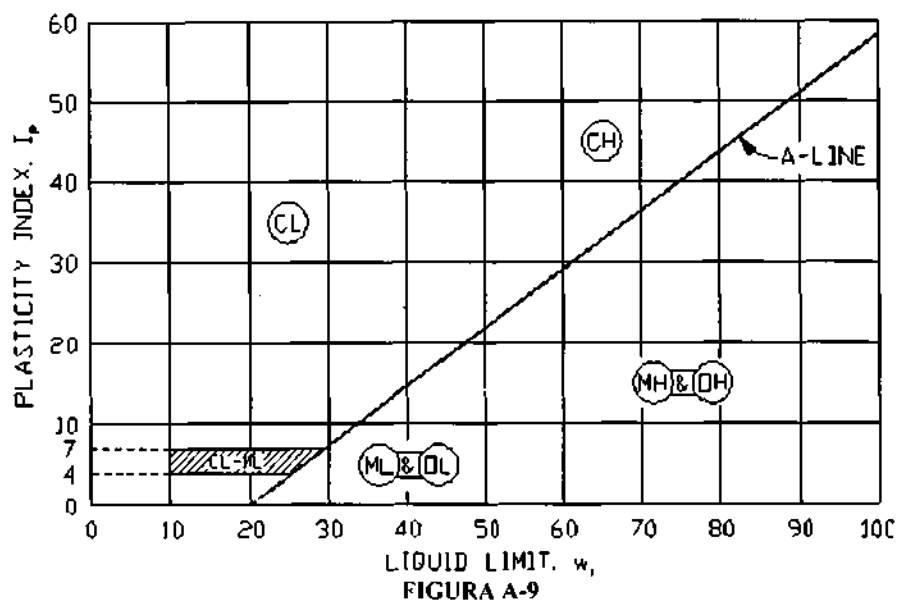


TABLA A-3

Summary of Estimated Soil Properties

Group Symbol	Coarse Material Content	$\alpha = 100\%$ comp		$\alpha = 94\%$ compaction				$\alpha = 90\%$ compaction				
		γ_{dry} (lb/ft ³)	Assumed		γ_{Tot} (lb/ft ³)	ϕ (°)	C (lb/ft ²)	Assumed		γ_{Tot} (lb/ft ³)	ϕ (°)	C (lb/ft ²)
			γ_{dry} (lb/ft ³)	H ₂ O Content (%)				γ_{dry} (lb/ft ³)	H ₂ O Content (%)			
ML	< 5%	105	99	18	117	32	1000	85	25	106	30	190
CL	< 5%	105	99	18	117	30	800	85	25	106	28	270
ML	5-25%	120	113	13	128	34	1000	95	20	114	30	190
CL	5-25%	120	113	13	128	30	800	95	20	114	28	270
ML	25-50%	130	122	9	133	34	1000	105	15	121	30	190
CL	25-50%	130	122	9	133	30	800	105	15	121	28	270
MH	< 5%	105	99	21	120	30	1000	85	30	111	28	400
CH	< 5%	105	99	21	120	21	900	85	30	111	19	300
MH	5-25%	120	113	16	131	32	1000	95	25	119	30	400
CH	5-25%	120	113	16	131	21	900	95	25	119	19	300
MH	25-50%	130	122	13	138	32	1000	105	20	126	28	400
CH	25-50%	130	122	13	138	21	900	105	20	126	19	300
SM		122	115	12	129	34	450	105	15	121	32	400
SC		122	115	12	129	32	300	105	15	121	29	230
SW		132	124	9	135	39		115	10	127	38	
SP		115	108	9	118	38		105	10	116	37	
GM		140	132	8	142	40		120	10	132	35	
GC		140	132	7	141	40		120	10	132	33	
GV		140	132	4	137	42		125	5	131	39	
GP		125	118	4	122	42		110	5	116	38	

TABLA A-4		
Properties of Backfill Around Pipes		
Method of Compaction	Approximate Undrained Strength of Clay S_u (lb/ft ²)	Approximate Relative Density of Sand
None (dumped backfill)	≤ 250	Loose
Jetting	N/A	Loose
Jetting & Vibrating	N/A	Loose to Medium
Light Mechanical Equipment	250 - 1000	Medium
Heavy Mechanical Equipment (good procedures)	500 - 2000	Dense
* = Only useful for clean sands & gravels.		

A.4.1. Propiedades del suelo transversal horizontal.

La resistencia a la deflexión transversal de una tubería enterrada puede ser estimada usando información derivada de estudios de comportamiento de cargas laterales y la resistencia pasiva de placas de anclas. El estudio muestra que el valor de K_1 incrementa aproximadamente lineal con una profundidad de los suelos arenosos y arcillosos. Así el valor de K_1 puede ser expresado en la siguiente forma:

$$K_1 = Zk_i \quad (A-8)$$

donde:

K_1 = es la inclinación inicial de la curva de la resistencia-desplazamiento transversal.

Z = profundidad del suelo al centro de la tubería (L).

k_i = parámetros de la rigidez del suelo (F/L^3), vea la **tabla A-5** para arcilla o la **tabla A-6** para arena.

Para la arcilla y la arena la resistencia a la deflexión transversal depende fuertemente si el relleno está compactado o no. El relleno no compactado ofrece pequeña resistencia al desplazamiento de la tubería, o tendría que ser representado por valores en el orden de 10 lb/in³. La compactación aumenta la fuerza de las arcillas y la densidad relativa de las arenas. El relleno bien compactado de cada arena o arcilla habría de ser caracterizado por valores en el orden de 100 lb/in³.

TABLA A-5		
Values of k , for Sands		
Relative Density	Range of k Values (lb/in ³)	
	Above Water	Below Water
Loose	8 - 25	5 - 20
Medium	25 - 90	16 - 60
Dense	65 - 225	40 - 125

TABLA A-6	
Values of k , for Clays	
Undrained Shear Strength S_u (lb/ft ²)	Range of k Values (lb/in ³)
250	10 - 30
500	30 - 100
1000	100 - 300
2000	300 - 1000
4000	1000 - 3000

La resistencia última (P_f) de un suelo relleno para un desplazamiento transversal de una tubería está influenciada por la resistencia del suelo. Una estimación de P_f se basa en la teoría de la presión pasiva del suelo para bloques de anclas. El siguiente punto describe la ecuación para P_f donde el suelo de relleno es basado en arcilla, y arena respectivamente.

Suelos arcillosos.

Para una tubería enterrada con relleno de arcilla, el valor de P_l puede ser calculado con la siguiente expresión:

$$P_l = R_c S_u d \quad (\text{A-9})$$

donde:

P_l = resistencia última del suelo para desplazamiento transversal del suelo, asumiendo $K_2 = 0$ (F/L)

R_c = coeficiente cuyo valor varía con la profundidad de recubrimiento (adimensional)
Referencia a la **tabla A-7**

S_u = resistencia al cortante sin drenar (F/L^2)

d = diámetro exterior del tubo (L).

TABLA A-7	
Transverse Resistance Coefficient R_c for Pipes in Clay	
H/d	R_c
1	2.0
2	3.5
3	4.5
4	5.3
5	6.0
6	6.7
8	8.0
10	8.2
≥ 12	9.0
H = depth from ground surface to bottom of pipe	
d = pipe diameter	

Suelo arenoso.

Para una tubería enterrada con relleno de arena, el valor de P_I puede ser calculado con la siguiente expresión:

$$P_I = R_s d Z \quad (\text{A-10})$$

donde:

P_I = resistencia última del suelo para desplazamiento transversal del suelo, asumiendo $K_2 = 0$ (F/L)

R_s = coeficiente cuyo valor varía con la profundidad de recubrimiento (adimensional)
Referencia a la **tabla A-8**

d = diámetro exterior del tubo (L).

Z = profundidad de la superficie del suelo al centro del tubo (L).

γ' = peso efectivo del suelo (F/L³)

= $\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ para profundidades debajo del agua.

= $\gamma_{\text{dry}} + W(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{dry}})$ para profundidades encima del agua.

TABLA A-8			
Transverse Resistance Coefficient R_s for Pipes in Sand			
R_s at Various Relative Densities			
H/d	Loose	Medium-Dense	Dense
1	2.7	3.9	5.7
2	3.0	4.5	6.9
3	3.8	5.9	9.6
4	4.5	7.2	11.9
5	5.0	8.2	13.7
6	5.4	8.9	15.2
8	6.0	10.0	17.2
10	6.4	10.7	18.6
12	6.6	11.3	19.6
H = depth from ground surface to bottom of pipe d = pipe diameter			

A.4.2. Propiedades longitudinales del suelo.

Basado en estudios de comportamientos de pilotes bajo condiciones de carga axial, una relación entre la superficie de fricción (o adhesión) y desplazamiento longitudinal de un tubo puede ser desarrollado. Valores para K_f y P_f dependen del diámetro de la tubería enterrada, la profundidad de entierro y las propiedades del suelo de relleno. El siguiente punto describe las ecuaciones para K_f y P_f basados en suelos arcillosos y arenosos respectivamente.

Suelos arcillosos

Para suelos arcillosos saturados ($\phi = 0$), la resistencia longitudinal última del suelo (P_f) puede ser calculada con la siguiente expresión:

$$P_f = \pi d \alpha S_u \quad (\text{A-11})$$

donde:

P_f = resistencia última del suelo para desplazamiento longitudinal de la tubería asumiendo que $K_2 = 0$ (F/L)

d = diámetro exterior de la tubería (L)

α = factor de adhesión (adimensional)

S_u = resistencia al cortante sin drenar (F/L^2)

La **figura A-10** muestra los valores de α que son sugeridos por varios investigadores. También vea la **tabla A-9** para estimar la adhesión ($\alpha * S_u$) de suelos cohesivos en contacto con varios materiales de tubería.

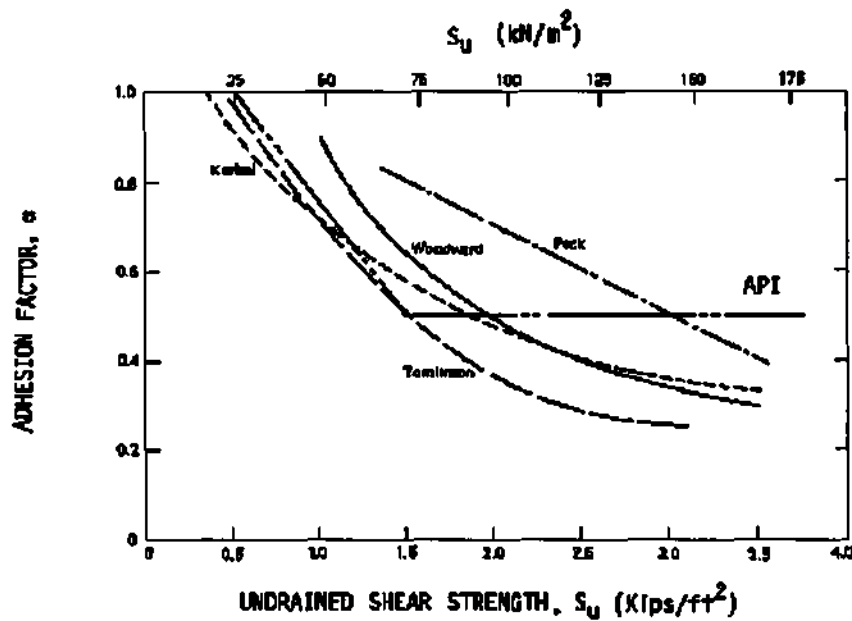


FIGURA A-10

Para pilotes, el desplazamiento requerido para movilizar toda la resistencia a la adhesión está en el orden de 0.2 a 0.5 pulgadas para pilotes de 12 pulgadas de diámetro. Sobre esta base, el desplazamiento que corresponde a P_l puede ser expresado como una función del diámetro de una tubería que se encuentra entre el siguiente rango:

$$\frac{d}{60} \leq y_1 \leq \frac{d}{25} \quad (\text{A-12})$$

Sin embargo, el valor de K_l puede ser estimado en el siguiente rango:

$$\frac{25P_l}{d} \leq K_l \leq \frac{60P_l}{d} \quad (\text{A-13})$$

Suelo arenoso

En el suelo arenoso, el valor de P_f puede ser expresado en función del ángulo de resistencia a la fricción entre la tubería y el relleno (δ). El valor de δ sugerido por dos investigadores, es dado en las **tablas A-9 y A-10**.

TABLA A-9			
Skin Friction or Sliding Resistance Soils Against Piles & Similar Structures (from laboratory tests, after Sowers)			
Material	Friction, Cohesionless Soil		Adhesion (αS_u), Cohesive Soil (Saturated, Undrained)
	$\tan \delta$	δ	
Wood	0.4	22°	$0.9 \times S_u$ to S_u
Rough concrete cast against soil	$\tan \phi$	ϕ	S_u
Smooth formed concrete	0.3 to 0.4	17°	$0.8 \times S_u$ to S_u
Clean steel	0.2	11°	$0.5 \times S_u$ to $0.9 \times S_u$
Rusty steel	0.4	22°	S_u
Corrugated metal	$\tan \phi$	ϕ	S_u

Como se muestra en la **tabla A-9**, los valores recomendados de δ depende solo en el tipo de material de la tubería en contacto con el suelo. La **tabla A-10** muestra las variaciones en los valores δ para varios tipos de suelos granulares.

TABLA A-10		
f and d for Medium Dense to Dense Granular Soil (after API-RP2A)		
Soil Type	ϕ	δ
Clean sand	35°	30°
Silty sand	30°	25°
Sandy silt	25°	20°
Silt	20°	15°
ϕ = angle of internal friction		
δ = angle of friction between soil & steel		

Para suelos arenosos, la resistencia longitudinal última del suelo (P_l) puede ser calculada con la siguiente expresión:

$$P_l = \pi d K_s Z \gamma' \tan \delta \quad (\text{A-14})$$

donde:

P_l = resistencia última del suelo para desplazamiento longitudinal de la tubería asumiendo que $K_2 = 0$ (F/L)

d = diámetro exterior del tubo (L)

K_s = coeficiente de la presión lateral del suelo (adimensional)

Z = profundidad desde la superficie del suelo al centro del tubo (L)

γ' = peso efectivo del suelo (F/L³)

= $\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ para profundidades debajo del agua.

= $\gamma_{\text{dry}} + W(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{dry}})$ para profundidades encima del agua.

δ = ángulo de fricción del suelo contra cara del tubo (°)

Los valores de K_s dependen ampliamente en la densidad relativa o compactación de relleno del suelo. Para arenas sueltas, K_s puede ser tan pequeño como 0.25; mientras para relleno compactado, K_s tiene un rango de 0.5 - 1.0. La magnitud del desplazamiento que corresponde a P_l está sobre el mismo que la arcilla (ver la **ecuación A-12**). Así, el valor de K_l puede ser estimado en el rango definido por la **ecuación A-13**.

Considerando posibles variaciones e incertidumbre en los valores estimados de la contribución de los parámetros del suelo, un rango de las variables de la resistencia del suelo (K_l y P_l) debe ser determinado.

A.4.3. Propiedades verticales del suelo.

Desde que la mayoría de los sistemas de tubería enterrado son construido por poner el tubo en una zanja, las características de la restricción del suelo pueden ser muy diferentes para movimientos del tubo que produce contra el fondo de la zanja (in-situ) comparado con el movimiento del tubo que se produce encima de la zanja (relleno). Por eso, AutoPipe permite la especificación de los parámetros de la resistencia del suelo hacia arriba y hacia abajo independientemente (ver la sección A.3).

Movimiento descendente de la tubería

$$P_1 = d * \left(\frac{1}{2} d \gamma_1' N_\gamma + c N_c + H \gamma_3' N_q \right) \quad (\text{A-15})$$

El soporte vertical proporcionado por un suelo en contra del movimiento descendente de una tubería enterrada puede ser expresado en función de la teoría de capacidad de presión convencional. La tubería es asumida para actuar como una forma cilíndrica continua. Así, la reacción última del suelo (P_1) para todos los tipos del suelo puede ser determinada con la expresión de arriba:

donde:

P_1 = resistencia última del suelo para el desplazamiento descendente del suelo, asumiendo que $K_2 = 0$ (F/L).

d = diámetro exterior del tubo (L)

c = cohesión (o S_u) del tubo bajo el suelo (F/L²)

H = profundidad desde la superficie del suelo hasta la parte inferior del tubo (L)

γ' = unidad de peso efectivo del suelo, no el relleno (F/L³)

Refiriéndose a la **tabla A-11** para la ecuación de peso unitario efectivo correspondiente a la profundidad del agua.

TABLA A-11		
Effective Unit Weight Terms as Required by the Location of Water Table		
(Z_w) Depth from Ground Surface to Water Table	$\gamma_1' =$	$\gamma_3' =$
$\geq (H+d)$	$\gamma_{dry} + w(\gamma_{sat} - \gamma_{dry})$	$\gamma_{dry} + w(\gamma_{sat} - \gamma_{dry})$
$H \leq Z_w < (H+d)$	$\gamma_{sat} - \gamma_{H_2O}$	$\gamma_{dry} + w(\gamma_{sat} - \gamma_{dry})$
$< H$	$\gamma_{sat} - \gamma_{H_2O}$	$\gamma_{sat} - \gamma_{H_2O}$

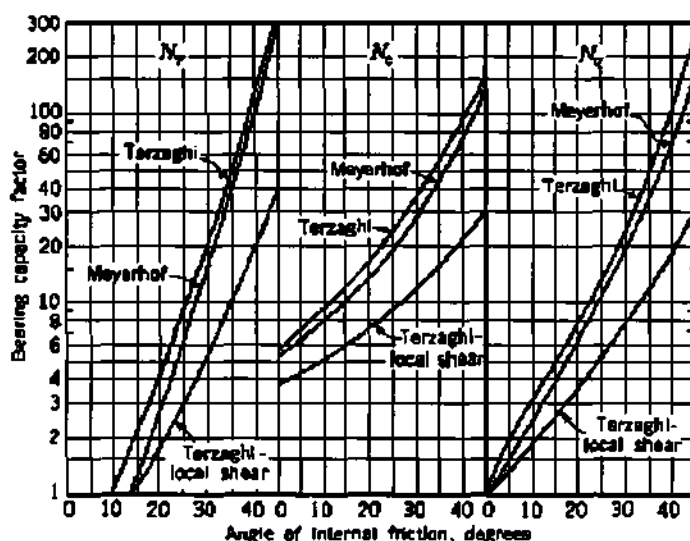


FIGURA A-11

La **figura A-11** se encuentran las curvas de Meyerhof o la de Terzaghi que se emplean para densidades, rigidez del suelo.

Considerando la curva de cortante de Terzaghi debe emplearse para suelos compresibles sueltos.

Si el ángulo de fricción interna (ϕ) es cero, para arcillas saturadas en cortante sin drenar, el primer y tercer término en la **ecuación A-15** se vuelve muy pequeño y solo la cohesión contribuye materialmente a la capacidad del apoyo. Así, para propósitos prácticos en una arcilla saturada.

$$A = dcN_c \quad (A-16)$$

Para este caso, el valor de N_c con respecto a la profundidad de empotramiento y el diámetro de la tubería puede ser desarrollado como se muestra en la **figura A-12**. En esta gráfica, el ancho (B) es igual al diámetro exterior del tubo (d).

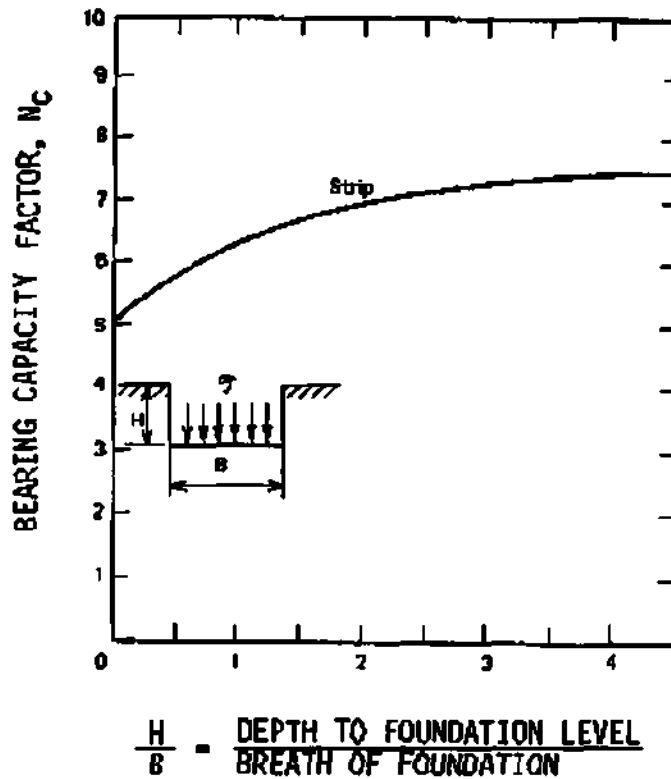


FIGURA A-12

El desplazamiento requerido para movilizar toda la resistencia del suelo está considerado generalmente entre el orden del 10% al 15% del el diámetro exterior de la tubería. El desplazamiento que corresponde a P_f puede ser expresado como una función del diámetro de la tubería y se encuentra entre el siguiente rango:

$$\frac{d}{10} \leq y_1 \leq \frac{d}{6.67} \quad (A-17)$$

Sin embargo, el valor de K_1 puede ser estimado en el rango:

$$\frac{6.67P_1}{d} \leq K_1 \leq \frac{10P_1}{d} \quad (\text{A-18})$$

Movimiento ascendente del tubo

El diseño aproximado para este tipo de movimiento es basado en estudios de anclas del suelo sujetado a fuerzas verticales de levantamiento. El levantamiento resistente consiste en dos partes: el peso de la cuña del suelo (W_s) sobre el ancla; y la resistencia al cortante de la cuña del suelo se mueve ascendentemente.

La forma de la cuña del suelo es un factor mayor en la resistencia total del levantamiento. La **figura A-13** muestra posibles formas de cuñas de falla que se observan en varias pruebas de varios tipos de suelo. La **figura A-13(A)** indica la condición para una cuña de un ancho uniforme que produce el valor del límite menor de la resistencia del levantamiento. La **figura A-13(B)** muestra una cuña estrecha que produce una resistencia alta de levantamiento; se ha encontrado que el ángulo de esta cuña está relacionado con el ángulo de fricción interna (ϕ). La forma mostrada en la **figura A-13(C)** se ha observado en pruebas que incluyen empotramiento profundo en arenas densas o arcillas. Para suelos débiles o remoldeados, como es el caso para un relleno no compactado, la forma de la cuña de falla corresponde a la **figura A-13(A)**. Es recomendado que la forma de la cuña se use para diseño.

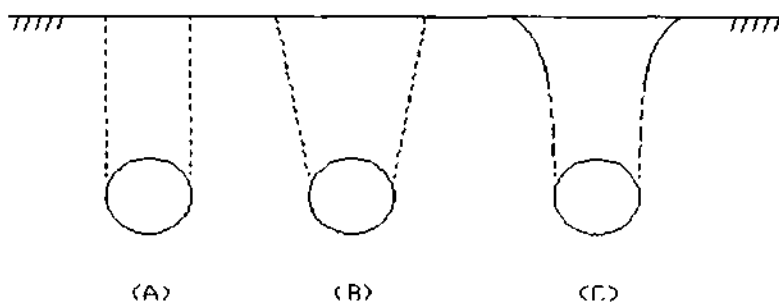


FIGURA A-13. Posibles formas de ruptura de una cuña

Así, la resistencia última del suelo (P_l), para todos los tipos de suelo, puede ser determinada con la siguiente expresión:

$$P_l = W_s + d(cF_c + D\gamma'F_q) \quad (\text{A-19})$$

donde:

P_l = resistencia última del suelo para un desplazamiento ascendente de la tubería, asumiendo $K_2 = 0$ (F/L).

W_s = peso efectivo de la cuña del suelo por unidad de longitud (F/L). Usando la ecuación para γ (mostrada abajo) donde se considera el contenido de agua del relleno.

d = diámetro exterior del tubo (L)

c = cohesión (o S_u) del suelo sobre el tubo (F/L^2)

γ' = peso efectivo del suelo (F/L^3)

= $\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ para profundidades debajo del agua.

= $\gamma_{\text{dry}} + W(\gamma_{\text{sat}} - \gamma_{\text{dry}})$ para profundidades encima del agua.

D = profundidad desde la superficie del suelo hasta encima del tubo (L)

F_c ,

F_q = factor de separación (adimensional) mostrada en la **figura A-14** y el la **figura A-15**.

Las curvas para F_c y F_q mostradas en la **figura A-14** y **A-15** son expresadas como función de la relación (D/d), y el ángulo de fricción interna (ϕ).

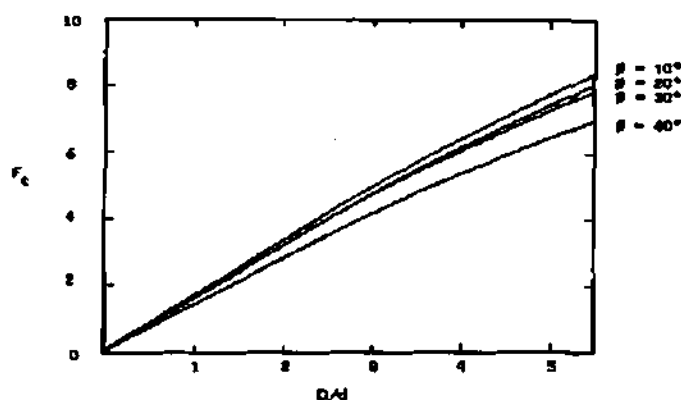


FIGURA A-14. Factor de ruptura (f_c)

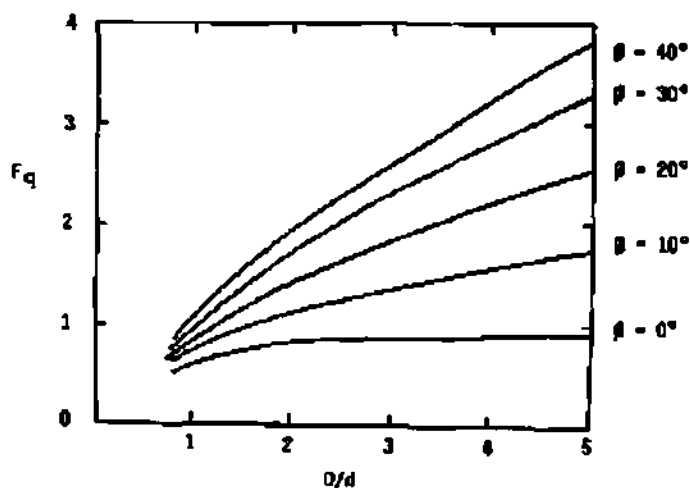


FIGURA A-15. Factor de ruptura (fg)

Suelos arcillosos

Las pruebas indican que el mayor desplazamiento relativo, se encuentran en el orden del 10% al 20% de la profundidad a la parte superior del tubo (D), son requeridas para movilizar la resistencia total del levantamiento. El desplazamiento que corresponde a P_1 puede ser expresado como una función de la profundidad " D ", y se encuentra entre el rango siguiente:

$$\frac{D}{10} \leq y_1 \leq \frac{D}{5} \quad (\text{A-20})$$

Sin embargo, el valor de K_1 puede ser estimado en el rango:

$$\frac{5P_1}{D} \leq K_1 \leq \frac{10P_1}{D} \quad (\text{A-21})$$

Suelos arenosos

Las pruebas indican que el menor desplazamiento relativo se encuentra en el orden de 1% a 2% de la profundidad a la parte superior del tubo (D), son requeridas para movilizar la resistencia total del levantamiento para la densidad de la arena baja. El desplazamiento que corresponde a P_1 puede ser expresado como una función de la profundidad " D ", y se encuentra entre el siguiente rango:

$$\frac{D}{100} \leq y_1 \leq \frac{D}{50} \quad (\text{A-22})$$

Sin embargo, el valor de K_1 puede ser estimado en el rango:

$$\frac{50P_1}{D} \leq K_1 \leq \frac{100P_1}{D} \quad (\text{A-23})$$