



**UNIVERSIDAD POPULAR AUTONOMA
DEL ESTADO DE PUEBLA**

MAESTRIA EN ESTRUCTURAS

**CURSO INTRODUCTORIO
AL ANALISIS PLASTICO**

TRABAJO DE INVESTIGACION

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

P R E S E N T A

ING. MARCO ANTONIO ZAGO MERLO



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyla**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Página

1.	INTRODUCCIÓN	1
	1.1 Generalidades	1
	1.2 Ventajas y desventajas	3
2.	BASES DE LA TEORÍA PLÁSTICA	5
	2.1 Antecedentes	5
	2.2 Módulo plástico Z	8
	2.3 Factor de forma plástico	9
	2.4 Factor de carga última	10
3.	VIGAS HIPERESTÁTICAS DE UN SOLO CLARO	12
	3.1 Mecanismo de colapso	12
	3.2 Método de equilibrio de análisis	13
	3.3 Método del trabajo virtual	25
	3.4 Carga uniforme	27
4.	ANÁLISIS DE VIGAS CONTÍNUAS	31
	4.1 Vigas continuas	31
	4.2 Vigas de sección variable	34
	4.3 Método del trabajo virtual	39
	4.4 Vigas continuas de más de dos claros	39
	4.5 Vigas sin apoyo lateral	43
	4.6 Constante torsional K	44
5.	MARCO DE UN PISO Y UNA CRUJÍA	46
	5.1 Marco rectangular articulado	46
	5.2 Diagrama de momentos	51
	5.3 Factor de carga reducido	53
	5.4 Marcos de sección variable	53
	5.5 Marco rectangular empotrado	57
	5.6 Marco de cabezal acodado	59
	5.7 Centro instantáneo de giro	59
	5.8 Carga uniforme	63
	5.9 Fórmulas de Estes	68
	5.10 Cargas de viento	68
6.	MARCOS DE UN PISO Y DE VARIOS CLAROS	71
	6.1 Combinación de mecanismos	72
	6.2 Pandeo lateral	76
7.	DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS PLÁSTICOS	78
	7.1 Métodos de distribución	78
	7.2 Comparación con el método de Cross	79

INDICE

Página

7.3 Momentos preliminares	79
7.4 Procedimiento de balanceo	80
8. CONEXIONES SOLDADAS	97
8.1 Ventajas de la soldadura	98
8.2 Clasificación de soldaduras	100
9. EJEMPLOS DE ANÁLISIS PLÁSTICO	119
10. PROPUESTA DEL TRABAJO, PARA IMPLEMENTARLO EN LOS CURSOS DE ESTRUCTURAS DE ACERO EN EL PLAN DE ESTUDIO DE LA LICENCIATURA DE INGENIERIA CIVIL Y LA MAESTRIA EN INGENIERIA, ESPECIALIDAD ESTRUCTURAS.	170
11. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	181
12. REFERENCIAS	183
TABLAS	184

1.INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

La Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, en el esfuerzo constante de preparar a profesionistas con mejor calidad se ha preocupado por estar al día en los cursos que se imparten y forman parte del Plan de estudios de cada carrera. De igual forma la Facultad de Ingeniería Civil de acuerdo a este objetivo procura ofrecer al alumno más y mejores herramientas en busca de la mejora continua.

Por esta razón este trabajo para obtener el grado de maestro en estructuras pretende apoyar al alumno y al catedrático de las materias de Diseño Avanzado de Estructuras de Acero en licenciatura y en maestría a la materia de Estructuras de Acero, para que sirvan de apuntes en las mismas. Particularmente a la parte de análisis y diseño plástico.

Las estructuras que se diseñaron bajo la Teoría de la Elasticidad, esto es, la carga máxima que una estructura puede resistir es igual a la carga que primero ocasione en alguna parte de la estructura, un esfuerzo igual al esfuerzo correspondiente al punto de fluencia del material. Durante varias décadas, las estructuras utilizadas en Ingeniería han sido diseñadas por este método con resultados satisfactorios. Sin embargo, desde hace algún tiempo, los calculistas están conscientes de que los materiales dúctiles no fallen sino hasta después de sobrepasar el esfuerzo del punto de fluencia, al presentarse deformaciones no proporcionales al esfuerzo en razón directa y lineal este trabajo está dedicado al estudio del comportamiento de las estructuras de acero dúctil en la zona plástica.

Cuando el esfuerzo en un punto de una estructura de acero dúctil alcanza el límite de fluencia, esa parte de la estructura cede localmente, permitiendo cierto reajuste de esfuerzos. Si se incrementa la carga, el esfuerzo en el punto en cuestión permanecerá aproximadamente constante, y el incremento de carga será resistido por las partes cuyos esfuerzos son menores. Las estructuras estáticamente determinadas sólo pueden resistir incrementos pequeños en el valor de la carga, mismos que ocasionan en algún punto la aparición del esfuerzo de fluencia. Sin embargo, para las estructuras estáticamente indeterminadas, el incremento de carga puede ser grande, por lo que se dice que estas estructuras, debido a la ductilidad del acero, tienen la feliz facultad de distribuir sobrecarga.

Hacia 1914, el Dr. Gabor Kazinsczy, de Hungría, percibió que la ductilidad del acero permitía una redistribución de esfuerzos cuando se sobrecargaban las estructuras estáticamente indeterminadas. En los Estados Unidos, el Prof., J. A. Van den Broek, introdujo su teoría de la plasticidad que llamó diseño al límite. Esta teoría fue publicada en un artículo titulado "Theory of Limit Design" ("Teoría del Diseño al Límite"), en Febrero de 1939, en los Proceedings of the ASCE ("Procedimientos de la ASCE").

1.2 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

En la teoría de la plasticidad, en lugar de basarse el diseño en el método del esfuerzo permisible el problema se aborda considerando la máxima carga que puede soportar una estructura actuando como una unidad. Los diseños obtenidos son sumamente interesantes para el ingeniero de estructuras, ya que ofrecen diversas ventajas, incluyendo las siguientes:

1. Cuando se utiliza el procedimiento de diseño plástico, puede haber ahorros considerables de acero (en algunas estructuras, quizás 10 al 15 por ciento), en comparación con diseños similares utilizando el procedimiento de cálculo elástico. Cuando se diseña por plasticidad, las conexiones que se requieren por continuidad, pueden reducir un poco el ahorro mencionado.
2. El diseño plástico permite al calculista realizar una estimación más exacta de la carga máxima que puede soportar la estructura, lo que le permite tener una mejor idea del factor de seguridad real de la estructura. El método elástico es adecuado para el cálculo de esfuerzos y deformaciones por cargas dentro de la zona elástica, pero da una estimación muy deficiente de la resistencia real de la estructura antes de que falle.
3. Para muchas estructuras complicadas, el análisis plástico es más fácil de efectuar, que el análisis elástico.
4. Las estructuras están sujetas frecuentemente a grandes esfuerzos difíciles de predecir, tales como los ocasionados por asentamiento, montaje, etc. El diseño plástico previene tales situaciones, permitiendo deformaciones plásticas.

A pesar de estas ventajas importantes, la aceptación del diseño plástico ha sido lenta. Hasta hace unos cuantos años, no había suficiente información disponible referente a la ductilidad del acero. Si un acero en particular, es frágil, la teoría de la

plasticidad no es aplicable. Hace algunas décadas, cuando los diseñadores profesionales empezaban a interesarse en dicha teoría, hubo algunas faltas desastrosas, por fragilidad, en tanques y barcos soldados. (También era el tiempo en que las estructuras soldadas empezaban a ganar popularidad). Durante un período de tiempo más o menos largo, la aceptación del diseño plástico decayó bastante, pero en años recientes se han investigado mucho sus posibilidades y actualmente está logrando cierta aceptación.

A pesar del gran progreso realizado en el área del diseño plástico, hay aún algunas desventajas con las que el calculista debe estar absolutamente familiarizado, y son las siguientes:

1. El diseño plástico es de escaso valor en el caso de aceros frágiles de alta resistencia. (El método es justamente aplicable, tanto a aceros de alta resistencia, como a aquéllos de baja resistencia estructural, con tal que dichos aceros posean la ductilidad necesaria).
2. El diseño plástico no es aún satisfactorio para los casos en que son problema los esfuerzos por fatiga.
3. En columnas diseñadas plásticamente, es poco el ahorro.
4. Aunque para muchas estructuras indeterminadas, el análisis plástico es más simple que el análisis elástico, debe tenerse en cuenta que las estructuras plásticas inestables son más difíciles de detectar que las estructuras elásticas inestables.

2. BASES DE LA TEORÍA PLÁSTICA

2.1 ANTECEDENTES

Cualquier estudiante de ingeniería que haya llevado un curso de laboratorio de resistencia de materiales, habrá hecho una prueba de tensión en una muestra de acero y estará familiarizado con la curva de esfuerzo-deformación mostrada en la figura 2.1. El acero dulce tiene la propiedad especial de comportarse con estricto apego a la ley de Hooke, hasta llegar a un esfuerzo llamado frecuentemente límite de proporcionalidad y, una vez rebasado éste, la deformación aumenta rápidamente con pequeños cambios en el esfuerzo. Esta propiedad se aprecia claramente en la curva esfuerzo-deformación de la figura 2.1, así como el hecho de que queda una reserva adicional de resistencia, después del mínimo esfuerzo de fluencia que se garantiza.

Desde el principio hacerse hincapié en que la vida del acero no mengua por las cargas estáticas que lo esfuerzan dentro del rango plástico. Recuérdese que, durante muchos años, los ingenieros, a sabiendas y deliberadamente, han diseñado empalmes

remachados cuyos remaches externos tienen esfuerzos superiores al del punto de fluencia.

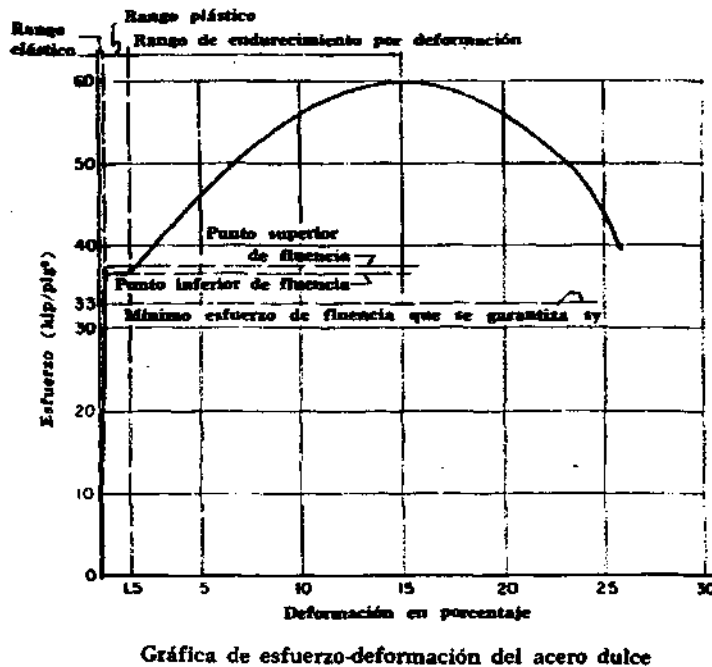
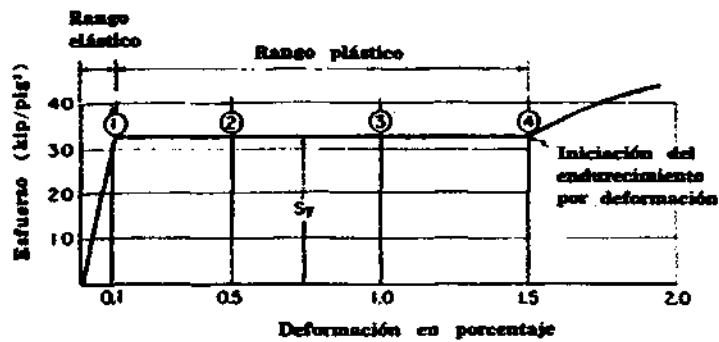


Fig. 2.1

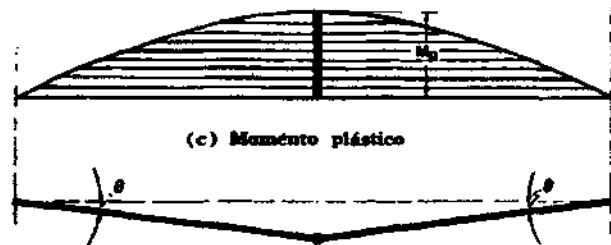
La figura 2.2. (b) representa una viga simplemente apoyada, con su carga de colapso o carga última W_u , uniformemente distribuida. La parte ennegrecida, cerca del centro del claro, representa las fibras que están esforzadas dentro del rango plástico. En el punto 1 sólo las fibras exteriores están esforzadas hasta el esfuerzo de fluencia permisible, S_y , y, en ese punto, toda la sección se comporta de acuerdo con la ley de Hooke. Por lo tanto, se dice que, en esta sección, la viga está trabajando en el rango elástico. En el punto 2, las fibras exteriores que ya había alcanzado el punto de fluencia, se deforman a esfuerzo constante, S_y , y las fibras adyacentes han venido en su auxilio, tomando un esfuerzo adicional, hasta que también ellas se esfuerzan hasta S_y . Al llegar al punto 3, el efecto anterior se ha propagado aún más hacia el eje neutro,



(a) Curva idealizada de esfuerzo-deformación

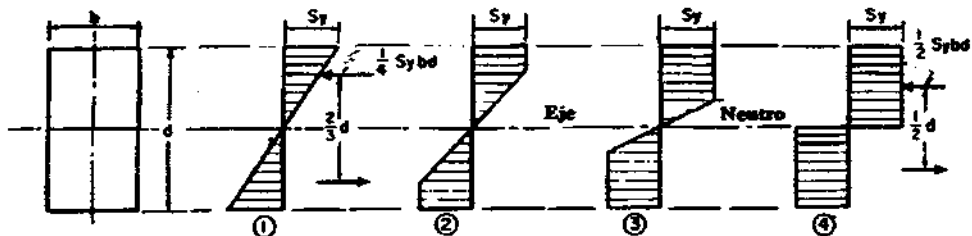


(b) Viga simplemente apoyada con carga uniforme de colapso o carga última

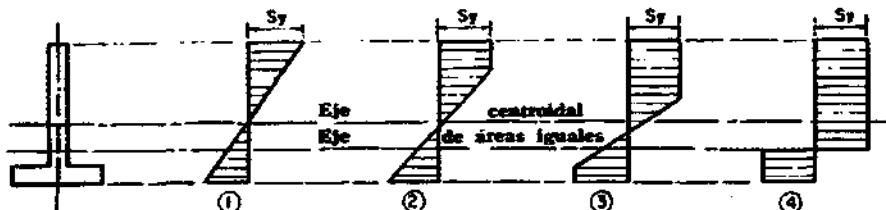


(c) Momento plástico

(d) Articulación plástica



(e) Distribución de esfuerzos en una sección rectangular



(f) Distribución de esfuerzos en una sección asimétrica con respecto a su eje de flexión

Distribución de esfuerzos dentro del rango plástico

Fig. 2.2

y finalmente, en el punto 4, la sección toda se esfuerza hasta el punto de fluencia. El momento que corresponde al punto 4 es el momento plástico que, en adelante, se designará como **M_y** . Además, en este punto se ha formado un fenómeno conocido como la articulación plástica.

Como la viga simplemente apoyada sólo puede tener una articulación plástica, cualquier carga adicional ocasionaría que las dos mitades de la viga giraran con centros en la articulación; las deformaciones progresarían rápidamente y luego sobrevendría el colapso. Además, los estados de esfuerzo de los puntos 2 y 3, figura 2.2, no tienen aplicación práctica en el análisis plástico y se mencionaron con el único propósito de describir detalladamente lo que sucede entre las condiciones de carga de los estados elástico y plástico. En el análisis plástico, la primera y más difícil tarea consiste en localizar las articulaciones plásticas en todos los puntos en que se aplica el momento plástico **M_p** . A esta investigación se le llama el establecimiento del mecanismo de colapso. **M_p** es el momento de diseño que se encuentra rápidamente con el mecanismo de colapso. El esfuerzo permisible, **S_y** , es el esfuerzo de fluencia supuesto que, en los Estados Unidos, es de 33 Kips/pulg².

Según la figura 2.2 se observará que, conforme aumenta la carga, el eje neutro se desplaza desde el eje centroidal bajo cargas elásticas hasta el eje de áreas iguales, bajo cargas plásticas. Esta última condición resulta de que, al igualarse los esfuerzos de toda la sección en el rango plástico, la suma de fuerzas horizontales sólo puede ser cero si las áreas arriba y abajo del eje son iguales.

2.2 El módulo plástico **Z** .

De acuerdo con el análisis elástico, el momento de fluencia **M_y** es igual a **$S_y S$** , donde **S** es el módulo de sección. Es decir

(2.1)

$$My = S_y S$$

S se define como I_c y para una sección rectangular es $\frac{1}{6}bd^2$. Refiérase a la figura 2.2(e) y considere la distribución de los esfuerzos elásticos en el punto 1.

El esfuerzo promedio de la sección es $\frac{1}{2}S_y$ y las dos fuerzas del par resistente, aplicadas en los centroides de sus respectivos prismas de esfuerzos, tienen un brazo de $\frac{2}{3}d$. Cada una de estas dos fuerzas resistentes (volumen del prisma de esfuerzos) es $\frac{1}{4}S_y bd$. Por lo tanto, el momento resistente de la viga se puede encontrar multiplicando una de las fuerzas resistentes por su brazo. Entonces, el momento elástico resistente de una sección rectangular es.

(2.2)

$$My = \frac{1}{6}S_y bd^2$$

Considérese ahora la distribución de esfuerzos plásticos del punto 4. Figura 2.2.(e). En este caso, el brazo de las dos fuerzas resistentes es $\frac{1}{2}d$ y cada fuerza (volumen del prisma de esfuerzos) es $\frac{1}{2}S_y bd$. Por lo tanto, el momento plástico resistente de una sección rectangular es.

(2.3).

$$Mp = \frac{1}{4}S_y db^2$$

2.3 FACTOR DE FORMA PLÁSTICO.

Se ha observado que al pasar de la condición elástica a la plástica, el módulo de sección de una viga rectangular ha cambiado de $\frac{1}{6}bd^2$ a $\frac{1}{4}bd^2$. Este último se conoce como módulo plástico y se le designa como la letra Z . Entonces,

(2.4)

$$M_p = S_y Z$$

La relación Z/S se denomina factor de forma plástica, y, como se demostró anteriormente, es **1.5** para una sección rectangular. El factor de forma plástico no debe confundirse con el factor de forma de las vigas de madera.

El módulo plástico Z puede definirse como la suma de los momentos estáticos de las áreas de tensión y compresión de la sección de la viga, tomadas con respecto al eje neutro. Si se divide un perfil de acero en rectángulos y triángulos, se puede determinar un valor aproximado de Z . En los perfiles de vigas de acero de los Estados Unidos, el factor de forma plástico, promedio, es **1.14**. Este valor se usará en todos los ejemplos y problemas de diseño plástico, de este capítulo. Entonces, se sustituye **1.14S** por Z en la Ecuación 2.4

(2.5)

$$S = \frac{M_p}{1.14S_y}$$

2.4 FACTOR DE CARGA ÚLTIMA.

Con el método elástico tradicional, el momento de trabajo M_w de cualquier sección de acero es sS , en el cual s es **20kip/plg²** para edificio es y **18Kip/plg²** para puentes. En el diseño plástico se usa el momento plástico M_p , lo que significa que la

estructura debe recibir la carga última o de colapso. Por lo tanto , es necesario multiplicar la carga de trabajo, por el factor apropiado, para convertirla en la carga última deseada.

Este factor es igual a la relación entre ***M_p*** y ***M_w*** . Entonces, según las especificaciones AISC, el factor de carga última de un perfil laminado es .

(2.6)

$$\frac{M_p}{M_w} = \frac{S_y Z}{s S} = \frac{1.14 S_y S}{s S} = \frac{1.14 \times 33}{20} = 1.88$$

3. VIGAS HIPERESTÁTICAS DE UN SOLO CLARO

La teoría plástica tiene una aplicación práctica muy reducida en las vigas simplemente apoyadas. La viga con reacciones hiperestáticas, por otro lado, constituyen un ejemplo perfecto para demostrar su técnica y ventajas.

3.1 MECANISMO DE COLAPSO

Algunas de las ventajas de la teoría plástica reside en esa propiedad del acero dulce, discutida en los artículos anteriores, que permite que los esfuerzos, cuando pasan el límite de proporcionalidad en el punto más esforzado de la estructura, se transmitan a otros puntos menos críticos de la misma, hasta que al menos uno de ellos haya desarrollado una articulación plástica. A estos se les denomina una redistribución de esfuerzos o de momentos. En términos de teoría plástica, al arreglo

de las articulaciones plásticas (junto con las reales), que funcionan durante el colapso, se le conoce como el mecanismo de colapso o como mecanismo, simplemente. Está claramente definido en cualquier tipo de estructura y carga, y el número de articulaciones plásticas, que varía con el tipo de estructura, nunca es menor de dos vigas hiperestáticas. La determinación del mecanismo necesario de colapso, de cualquier estructura, constituye la mayor parte del trabajo del análisis plástico.

Hay dos métodos básicos para encontrar el mecanismo de colapso de una estructura. El método de equilibrio y el método del trabajo virtual.

3.2 MÉTODO DE EQUILIBRIO DE ANÁLISIS.

El método de equilibrio de análisis se explica con mayor facilidad por medio de ejemplos. Agrandes rasgos, consiste en construir, en la estructura, un diagrama de momentos plástico, después de haberla hecho isostática con la sustitución de un número suficiente de momentos hiperestáticos por el momento plástico M_p . Ya que no es siempre posible escoger, con una simple inspección, las localizaciones correctas de todas las articulaciones plásticas, el método de equilibrio es infortunadamente un método de tanteos. El procedimiento consiste en suponer primeramente un número suficiente de articulaciones plásticas las cuales, en combinación con las articulaciones reales de la estructura, constituyen un mecanismo de colapso. Este último es isostático y se puede construir, con toda facilidad, el diagrama completo de momentos. Si M_p no está excedido en ningún punto del diagrama, el mecanismo correcto ha sido encontrado. Por otro lado, si un momento de valor mayor que M_p resultara en cualquier punto, sería necesario empezar de nuevo con otras localizaciones supuestas de las articulaciones plásticas. Cuando se conoce el mecanismo correcto de colapso, la carga última se puede encontrar en función de M_p (o viceversa), por medio de consideraciones estáticas elementales.

En los ejemplos y problemas siguientes se consideran despreciables el cortante, los esfuerzos axiales, el pandeo lateral y las deformaciones. Estos conceptos se tratarán posteriormente.

Ejemplo 3.2.1

La viga empotrada de la figura 3.1.(a) está cargada uniformemente con una carga de trabajo, W , de **2.0 Kip/pie** y su claro es de **60 pies**. La viga forma parte de un piso y, por lo tanto, tiene apoyo lateral adecuado. Deberá seleccionarse la sección más económica.

Solución.

El diagrama de momentos elásticos, de la carga de trabajo, se muestra en la figura 3.1.(b). Obsérvese que el momento que el momento de diseño $\frac{wL^2}{12}$.

En los extremos es el doble del centro del claro. Supóngase que la carga uniforme se incrementa gradualmente sobre la carga de trabajo; las primeras articulaciones aparecerán simultáneamente en los extremos. Los momentos extremos son ahora M_p y permanecerán constantes mientras se incrementa el del centro del claro. En este estado, la viga todavía es capaz de resistir carga adicional y, conforme ésta aumenta, el momento en el centro del claro se aproxima y finalmente, llega a M_p . La viga se ha convertido en un mecanismo de colapso y se dice que ha alcanzado el punto de colapso incipiente.

El momento de diseño M_p , para la carga última W_u ($1.88w$), es $W_u L^2/16$, como se muestra en la figura 3.1.(c), (usando 2.3.2)

$$S = \frac{1.88 \times 2.0 \times 60^2 \times 12}{16 \times 1.14 \times 33} = 270 \text{ in}^2$$

Pruebe la sección **30WF108**.

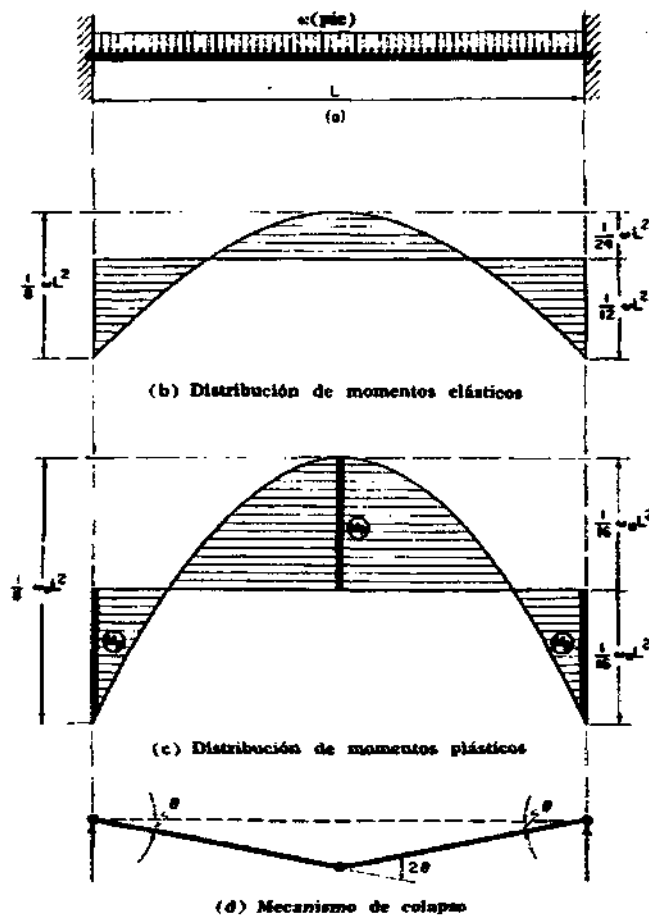
Adicional, (usando 2.2.3)

$$S = \frac{1.88 \times 0.108 \times 60^2 \times 12}{16 \times 1.14 \times 33} = 14.6 \text{ in}^3 \text{ ((299.2 - 270))}$$

Para revisar esta solución por medio de las tablas de momentos plásticos, procédase como sigue, (Usando 2.3):

$$M_p = \frac{1.88 \times 2.108 \times 60^2}{16} = 891 \text{ Kips} - \text{ft}$$

En las tablas de momentos plásticos se ve que la sección **30 WF 108** proporciona un **M_p de 950 Kips-ft** y que la sección más liviana que llena los requisitos de este ejemplo. Véase la tabla A.



Análisis plástico de la viga empotrada, carga uniformemente.

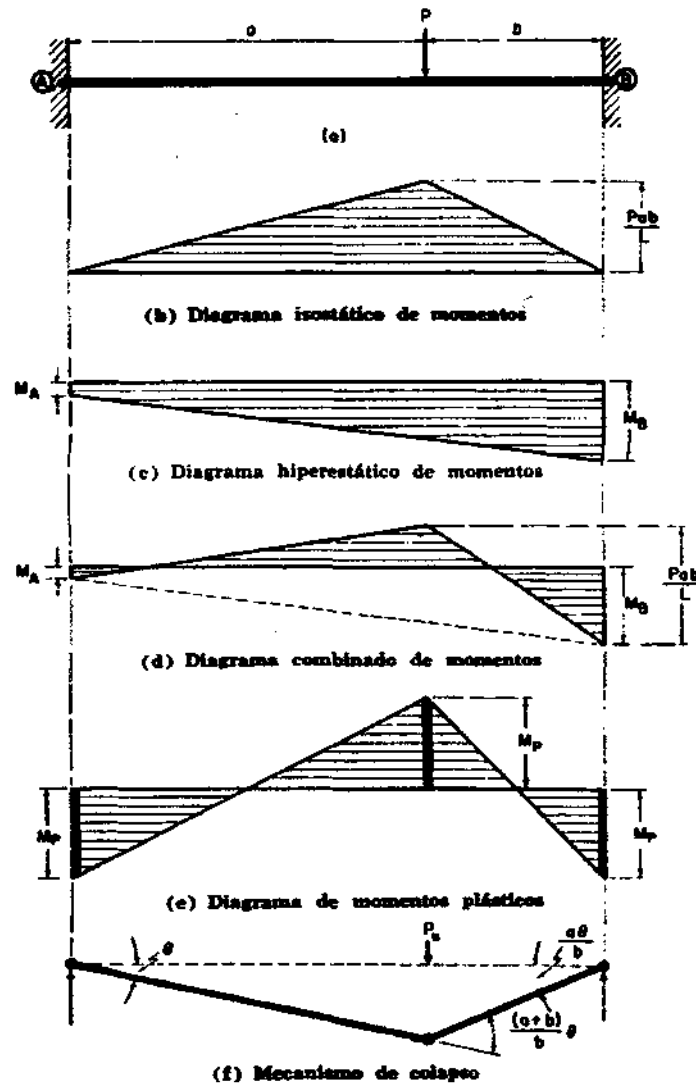
Fig. 3.1

Ejemplo 3.2.2

Se requiere determinar una expresión para el momento plástico M_p de la viga empotrada que se muestra en la figura 3.2(a).

Solución:

Si los momentos hiperestáticos e isostáticos se grafican separadamente y luego se combinan, se obtiene el diagrama compuesto que se muestra en la figura. Conforme se aumenta la carga de trabajo P , la primera articulación plástica aparece en B (suponiendo que A es mayor que b), la segunda bajo la carga concentrada y la última en A. Una excepción a la secuencia anterior de formación de las articulaciones plásticas ocurre cuando a y b son iguales. En este caso especial, se supone que las tres articulaciones se forman simultáneamente al alcanzar la carga de colapso y que el diagrama de momentos plásticos tienen las mismas proporciones que el elástico. Este es un caso excepcional y la economía que se logre con el método plástico es del mismo orden que la de la viga simplemente apoyada.



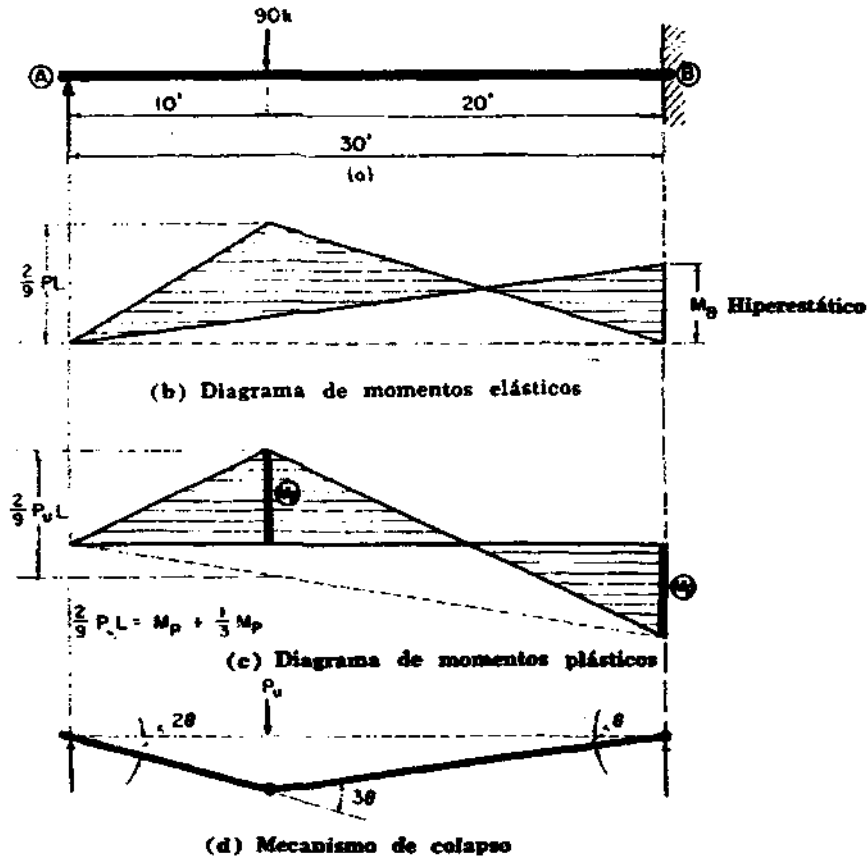
Análisis plástico de una viga empotrada con una carga concentrada.

Fig. 3.2

En la figura 3.2.(b), el momento isostático es $\frac{Pab}{L}$. Por lo tanto, la suma de los momentos plásticos positivo y negativo $\frac{Puab}{L}$. En la figura 3.2.(e), la suma de los momentos máximos positivos y negativos es también $2Mp$. Igualando estas dos expresiones y despejando a Mp .

Ejemplo 3.2.3

Una viga apoyada –empotrada de 30 *pies* de longitud tiene una carga concentrada de 90 *kips* a 10 *pies* del extremo simplemente apoyado. Determínese M_p en función de la carga última P_u y del claro L y, suponiendo que la viga esta apoyada lateralmente , encuéntrase la sección más ligera.



Una viga apoyada-empotrada con una carga concentrada.

Fig. 3.3

Solución.

En la figura 5(c) se puede ver que $\frac{2P_u L}{9}$ es igual a M_p más $\frac{M_p}{3}$; entonces, M_p es igual a $\frac{P_u L}{6}$.

Usando (2.5)

$$S = \frac{1.88 \times 90 \times 30 \times 12}{6 \times 1.14 \times 33} = 270 \text{ in}^3$$

Si se deja un margen para el peso de la viga, se requiere una **30 WF 108**.

Ejemplo 3.2.4.

Se requiere analizar y diseñar una viga apoyada-empotrada de **60 pies** de largo, cargada con dos concentraciones de **30 y 40 kips**, localizada a **20 y a 40 pies**, respectivamente, desde el apoyo libre; la viga tiene apoyo lateral completo.

Solución.

Para el análisis, hágase **P** igual a **10 kips** y llámese **L** al claro. Las cargas concentradas se convierten en **3P** y **4P**, con una separación de $\frac{L}{3}$.

Con dos cargas, la localización de las articulaciones plásticas no es tan obvia. En realidad, la única localización evidente es en D. Cuando menos debe haber una articulación adicional para formar un mecanismo de colapso que sea isostático y su posición (B o C) dependerá de las magnitudes relativas de las dos cargas. Esta relación puede ser tal que aparezcan articulaciones plásticas tanto en B como en C.

Según la figura 3.4.(b), se supone que el mecanismo de colapso consiste de la articulación real de A, naturalmente, y de las articulaciones plásticas en C y D. El diagrama de momentos plásticos se construirá con este mecanismo supuesto y, si el momento en B resultara mayor que **M_p**, sería una indicación de que la articulación plástica debe formarse en B, en lugar de en C y que, en consecuencia, se ha supuesto un mecanismo incorrecto.

Para determinar una expresión de la reacción R_A , súmense los momentos de todas las fuerzas a la izquierda, con respecto a C. Las flechas mostradas en las secciones B, C y D indican la dirección de rotación de los momentos resistentes, cuando la suma se hace en esas secciones. La dirección de la flecha debe ser consistente con la localización de las fuerzas de tensión y de compresión de la viga. Por ejemplo, en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.4.(c), las fibras inferiores de la viga inmediatamente a la derecha de la sección C debe flexionarse en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. El giro dextrórum se toma positivo y viceversa. Entonces, haciendo la suma de momentos a la izquierda de C (figura 3.4.(c)), resulta la siguiente ecuación:

$$-Mp + R_A \times \frac{2L}{3} - 3P_U \times \frac{L}{3} = 0 \quad (3.1)$$

$$R_A = \frac{3}{2L}(M_p + P_u L)$$

Se puede obtener una ecuación adicional sumando momentos con respecto a D.

$$+Mp + L \times \frac{3}{2L}(M_p + P_u L) - 3P_u \times \frac{2L}{3} - 4P_u \times \frac{L}{3} = 0 \quad (3.2)$$

$$M_p = \frac{11}{15} P_u L$$

Con el valor de $P_u L$ de la ecuación 3.2

(3.3)

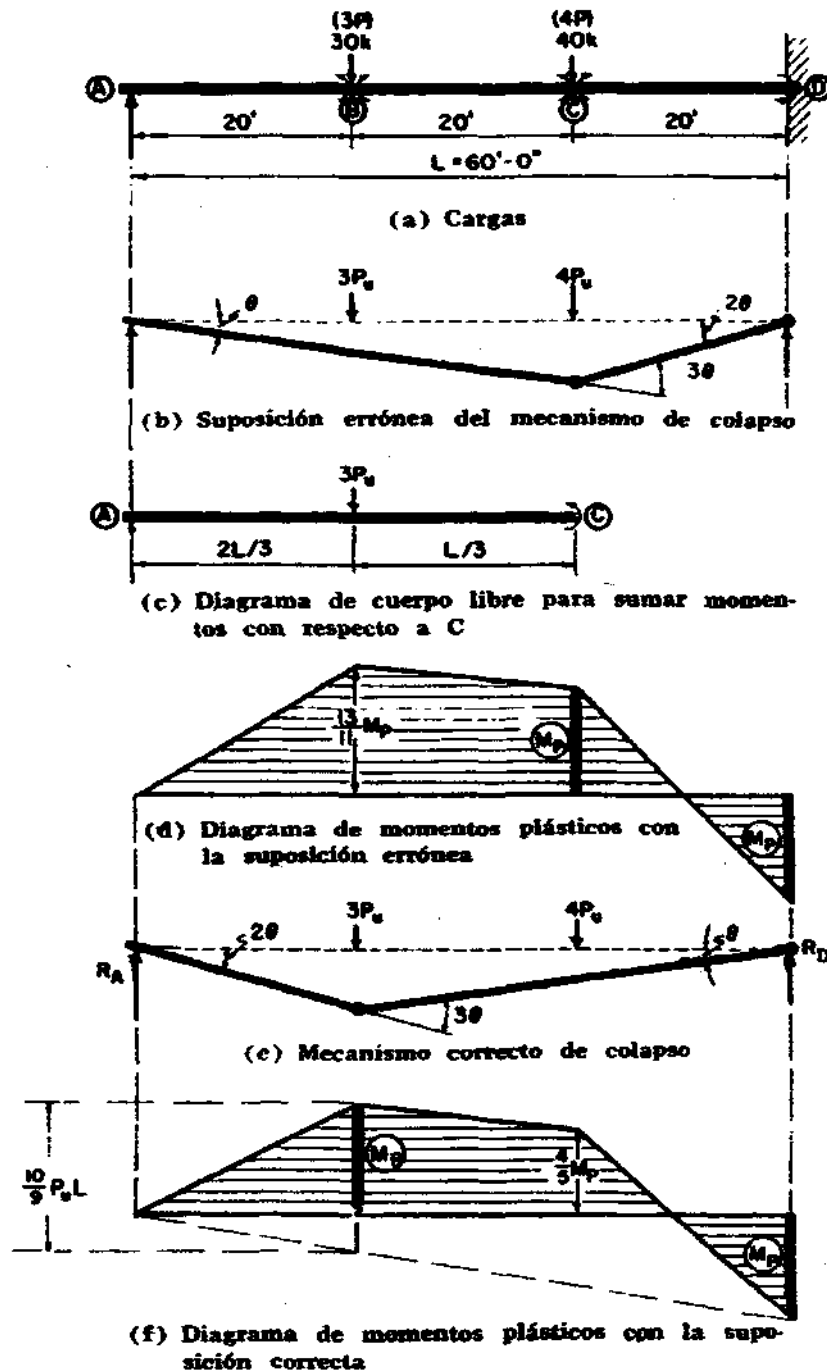
$$R_A = \frac{39M_p}{11L}$$

El momento en B se encuentra rápidamente sumando los momentos a la izquierda con respecto a B.

(3.4)

$$M_B = \frac{39Mp}{11L} \times \frac{L}{3} = \frac{13Mp}{11}$$

La ecuación 3.4 anterior constituye la primera indicación de que el mecanismo de colapso en (b), Figura 3.4, es una suposición errónea, al revelar que ***Mp*** esta excedido en B.



Una viga apoyada-empotrada con dos cargas concentradas.

Fig. 3.4

El otro mecanismo posible para este ejemplo se muestra en la figura 3.4(e). Otro método se empleará para verificar este mecanismo. Refiérase a la figura; el momento isostático en B es $\frac{10}{9} P_u L$. Por lo tanto,

$$M_p = \frac{10}{9} P_u L - \frac{1}{3} M_p \quad (3.5)$$

$$M_p = \frac{5}{6} P_u L$$

Análogamente,

(3.6)

$$M_c = \frac{11}{9} P_u L - \frac{2}{3} M_p$$

$$M_p = \frac{11}{9} \times \frac{6}{5} M_p - \frac{2}{3} M_p = \frac{4}{5} M_p < M_p$$

Entonces, el valor correcto de **M_p** está dado por la ecuación.

La forma más satisfactoria del método de equilibrio, consiste en trabajar con las cargas en lugar de con los símbolos.

En la figura 3.5(a) las cargas se han incrementado hasta su valor último, multiplicándolas por el factor de carga última. El diagrama de momentos isostáticos se sobrepone, en (B), en el diagrama desconocido de momentos plásticos. Si se supone que la segunda articulación plástica se formará en C,

(3.7)

$$1379 - \frac{2}{3} M_p = M_p$$

de donde

$$M_p = 827 \text{ Kips} - \text{ft}.$$

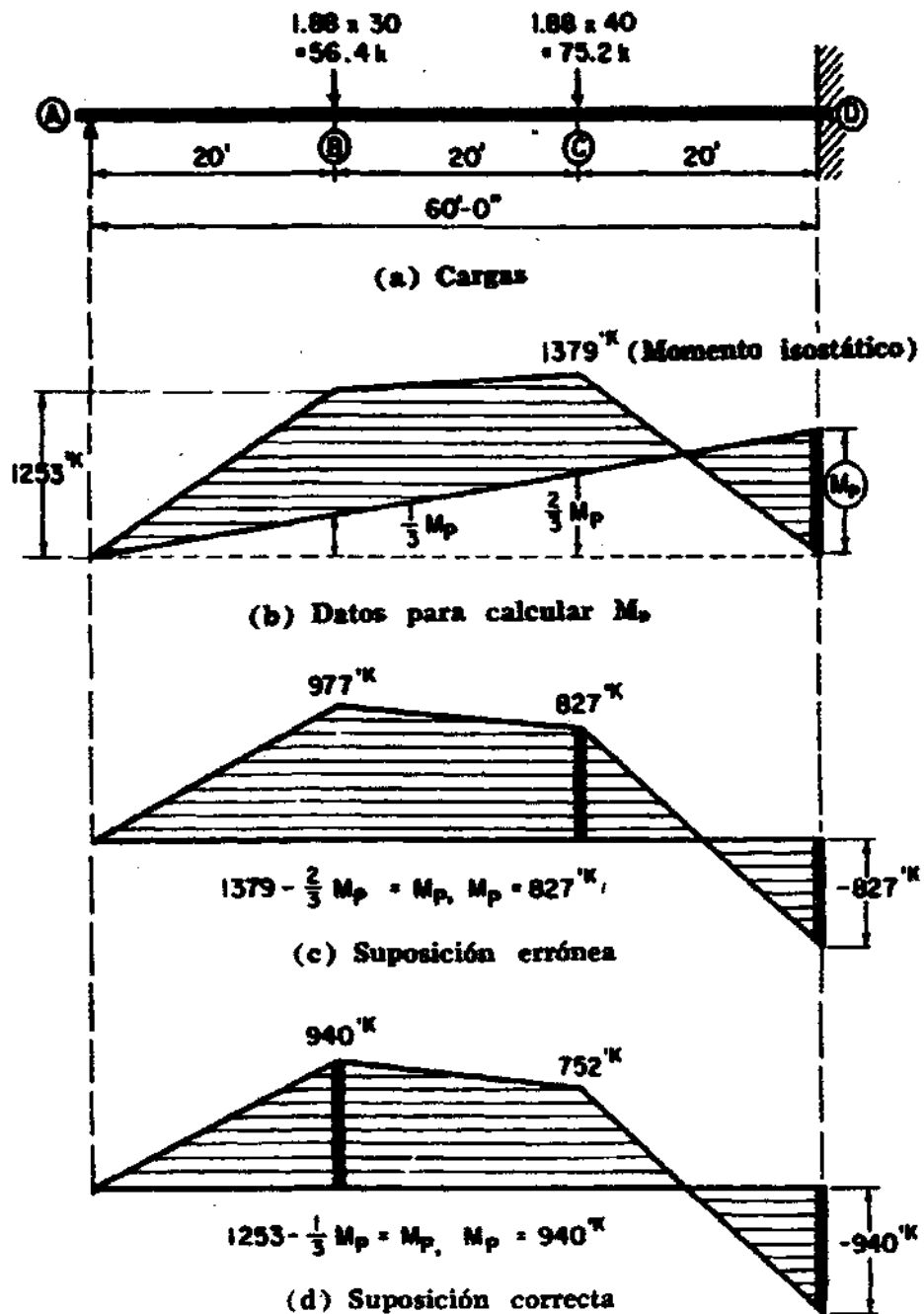


Fig. 3.5

Si se supone que la segunda articulación plástica se formará en B.

(3.8)

$$1253 - \frac{1}{3} M_p = M_p$$

De donde

$$M_p = 940 \text{ Kips} - \text{ft}.$$

Los dos diagramas de momentos correspondientes están trazados en las figuras 3.5 (c) y (d).

Usando 2.5

$$S = \frac{940 \times 12}{1.14 \times 33} = 300 \text{ in}^3$$

Cuando se añade un margen para el peso de la viga, se requiere la **30 WF 116**.

3.3 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL.

En los ejemplos anteriores, el método de equilibrio fue muy efectivo para determinar los mecanismos de colapso y para valuar los momentos plásticos M_p . En problemas de vigas más complicados y en marcos, este método es un poco laborioso y el método del trabajo virtual resulta más directo y considerablemente más corto. Cuando se aplica a mecanismo, consiste en igualar el trabajo externo hecho por las cargas durante la deformación de la estructura, al trabajo interno absorbido por las articulaciones plásticas. Entonces, si dos miembros que concurren en una articulación plástica, gira θ radianes uno con respecto al otro, θM_p lb-ft de trabajo ha sido absorbido por la articulación. Esto es admisible por el hecho que M_p se considera que permanece constante durante la rotación de la articulación.

El mecanismo de colapso del ejemplo 3.2.1 [figura 3.1(d)] y considérese que la carga total, uniformemente distribuida, W_u , actúa a lo largo de la deformación promedio

del mecanismo. O sea, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} L \times \theta$. M_p , por otro lado, produce durante el giro θ de ambos extremos y 2θ de la articulación plástica central. Por lo tanto,

(3.9)

$$\theta M_p(1+2+1) = W_u \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} L \times \theta$$

$$M_p = \frac{W_u L}{16}$$

Esto corrobora el valor encontrado de M_p , en la figura 3(c), con el método de equilibrio.

En el mecanismo de colapso del ejemplo 3 [figura 5(d)], la carga concentrada P_u trabaja durante la deformación $(2\theta \times \frac{L}{3})$ del punto en el tercio del claro. No hay articulación plástica en el extremo izquierdo de la viga, el momento plástico M_p trabaja durante el giro θ del extremo derecho, además del de 3θ , bajo la carga.

Entonces,

(3.10)

$$\theta M_p(3+1) = 2\theta \times P_u \times \frac{L}{3}$$

$$M_p = \frac{P_u L}{6}$$

3.3.1 CRITERIO PARA EL MECANISMO CORRECTO.

Como en el caso del método de equilibrio, también se necesita un procedimiento de tanteos en el método del trabajo virtual, cuando hay dos o más mecanismos posibles. El mecanismo que da el mayor valor de M_p , en función de la carga, es el correcto. Otra manera de expresar el criterio para el mecanismo correcto lo define como aquel para el cual la carga de colapso, en función de M_p , es la menor.

En el ejemplo 3.2.4, se encontrará primeramente una expresión de ***M_p*** con el mecanismo incorrecto [figura 3.4.(b)] que se corrobora con la que se determinó con el método de equilibrio.

(3.11)

$$\theta M_p (3 + 2) = 3P_u \times \frac{1}{3} L \theta + 4P_u \times 2\theta \times \frac{1}{3} L$$

$$M_p = \frac{11}{15} P_u L$$

Para el mecanismo correcto [figura 3.4(f)]

(3.12)

$$\theta M_p (3 + 1) = 3P_u \times 2\theta \times \frac{1}{3} L + 4P_u \times \theta \times \frac{1}{3} L$$

$$M_p = \frac{5}{6} P_u L$$

Como el valor de ***M_p*** del mecanismo correcto es mayor que el que se determinó para el erróneo, el primer criterio para el mecanismo correcto de colapso, enunciado previamente, ha sido satisfecho.

3.4 CARGA UNIFORME.

Es común dividir la carga uniforme total en cargas concentradas equivalentes, simétricas, localizadas de manera que el resultado final sea el mismo. Esta práctica ahorra tanto tiempo que se justifica en la mayoría de los casos y es generalmente conservadora. En realidad, la gran mayoría de los casos y es generalmente conservadora. En realidad, la gran mayoría de las traveses de acero están sujetas a cargas concentradas, su propio peso y el revestimiento contra incendio constituyen la única carga uniformemente distribuida. La razón de ello es que, en los edificios, las traveses del techo a de los pisos reciben las cargas de los largueros. Lo mismo puede decirse de las traveses de puentes. El siguiente ejemplo ilustrará el procedimientos para

localizar la segunda articulación plástica que estará, situada, por supuesto, en el punto de máximo momento.

Ejemplo 3.4.1.

En la figura 3.6, la carga uniforme W es de **2 kips/ft** y el claro de **58 ft**. Suponiendo apoyo lateral, hay que encontrar la sección más económica.

Solución:

En una viga apoyada-empotrada, el momento del empotramiento tiende a levantar de su apoyo al extremo libre. Por lo tanto, la reacción se reduce en el extremo libre y el cortante será cero en algún punto de la mitad del claro adyacente al apoyo libre. La magnitud que la reacción del extremo libre se reduce es $\frac{Mp}{L}$. Entonces,

(3.12)

$$R_A = \frac{W_u L}{2} - \frac{Mp}{L}$$

Llámesese X a la distancia desde el apoyo libre hasta la articulación plástica interior. Para que el cortante sea cero en esta articulación,

(3.13)

$$\frac{W_u L}{2} - \frac{Mp}{L} = W_u x$$

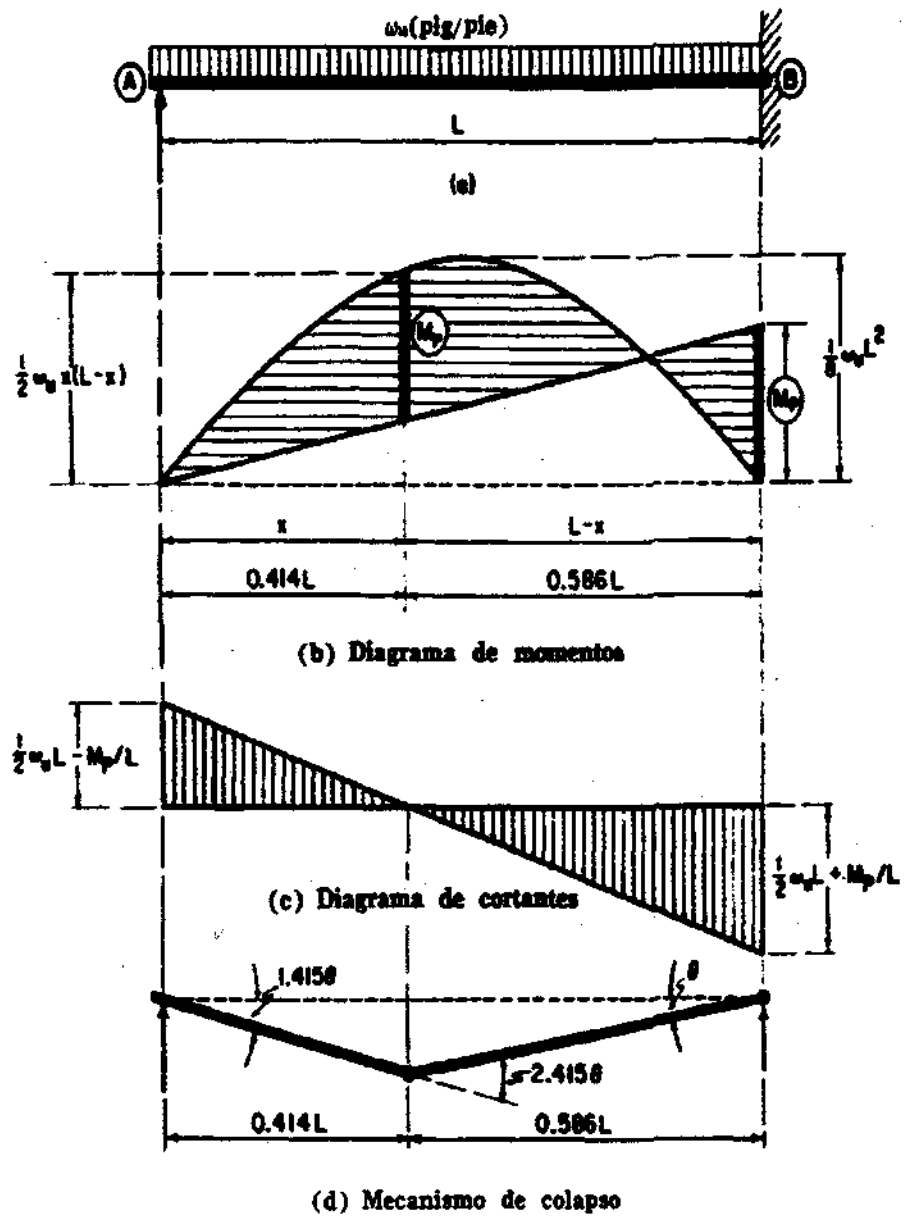


Fig. 3.6

de donde

(3.14)

$$M_p = \frac{W_u L}{2} - W_u Lx$$

La ecuación del momento de una viga simplemente apoyada es

(3.15)

$$M_x = \frac{W_u Lx}{2} - \frac{W_u x^2}{2} = M_p + \frac{x}{L} M_p$$

sustituyendo el valor de ***M_p*** y simplificando,

(3.16)

$$x^2 + 2Lx - L^2 = 0$$

de donde

$$x = 0.414L$$

Entonces, la articulación plástica interior está a $0.414 \times 58 = 24 \text{ ft}$ del extremo libre. Refiérase al mecanismo de colapso de la figura 3.6(d) y recuérdese que la deformación promedio del mecanismo se usa con una carga uniforme,

(3.17)

$$\theta M_p (2.415 + 1) = \frac{1}{2} \times 340 \times 2 \times 1.88 \times 58$$

de donde ***M_p* = 1086 Kip-ft**. Este valor de ***M_p*** no incluye a la carga muerta. Un cálculo completo indica una sección **33 WF 130**. Por lo tanto,

(3.18)

$$M_p = \frac{2.13 \times 1086}{2} = 1157 \text{ Kips} - \text{Ft.}$$

$$S = \frac{1157 \times 12}{1.14 \times 33} = 369.0 \text{ in}^3 < 404.8$$

4. ANÁLISIS DE VIGAS CONTÍNUAS.

4.1 VIGAS CONTÍNUAS

La viga apoyada-empotrada que se consideró en los artículos anteriores es la estructura hiperestática más simple, y consecuentemente, un ejemplo lógico para introducir el análisis y diseño plástico. Sin embargo, tiene poca aplicación práctica. En cambio, la viga continua es ampliamente usada tanto en edificio es como en puentes. Afortunadamente, este también es un medio simple y excelente para demostrar la adaptabilidad y economía del diseño plástico. Refiérase, por ejemplo, a la figura 4.1; es evidente que el análisis plástico, aplicado a vigas continuas de sección constantes, claros iguales y cargas simétricas, es tan sencillo y expedito como en el caso de la viga apoyada-empotrada.

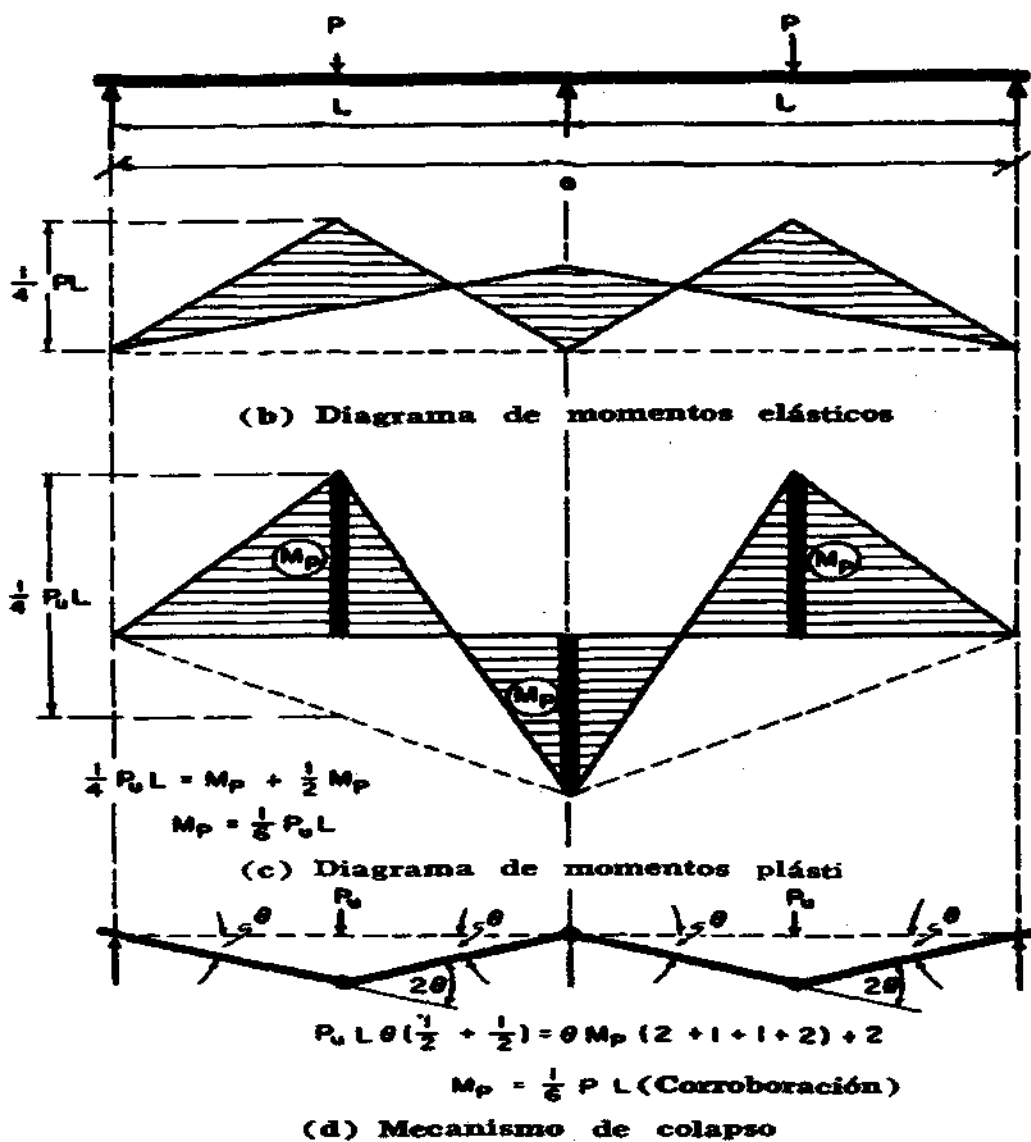
Las vigas continuas con claros desiguales y cargas diversas introducen innovaciones que serán consideradas ahora. Refiérase a la figura 4.2; debe ser evidente que el último claro de una viga continua, cargada uniformemente, es similar a la viga apoyada-empotrada porque la articulación interna está a $0.414L$ del extremo libre. Según la figura. Este hecho establece un procedimiento para determinar M_p en función del claro y de la carga uniforme, última, de los claros extremos.

Según la figura 3.6.(a); el momento isostático de la articulación interior es $\frac{1}{2}W_uX(L-X)$. Sustitúyase $0.414L$ y $.586L$ por X y $L-X$, respectivamente. Esto da un valor de $0.1213W_uL$ del momento isostático en la articulación interior de los claros extremos. Por lo tanto, para los claros extremos de vigas continuas con carga uniforme.

(4.1)

$$0.1213W_uL = M_p + 0.414M_p$$

$$M_p = 0.0858W_uL$$



Viga de dos tramos continuos

Fig. 4.1

4.2 VIGAS DE SECCION VARIABLE.

De la observación de la figura 4.2.(c), también debe resultar evidente que se pueden lograr economías reduciendo la sección en el claro BC, de manera que se forme una articulación en ese claro. Para evitar la necesidad de un empalme costoso y, a menudo, difícil en B, el procedimiento consistiría en escoger una misma sección para los dos tramos, que permita la formación de una articulación en el claro BC cuando se cargue a **1.88Wu**, y añadir cubreplacas del tamaño suficiente, entre A y B, para lograr que la sección llene los requisitos de ese claro.

Ejemplo 4.2.1.

En la figura 4.2.(a), W_1 y W_2 son **4 Kip/ft** y los claros L_1 y L_2 son respectivamente **30** y **20 ft**. Supóngase que la viga es parte de un piso y cuenta con apoyo lateral.

En primer lugar, la viga se analizará y diseñará como continua, de sección uniforme en ambos claros. Se encontrará que, como este diseño, no se forma articulación en el claro de **20 ft**. A continuación, se escogerá una sección más liviana, basada en los requisitos del claro corto, que se reforzará con cubre placas, en el claro de **30 ft**.

Solución:

Quando se basa el diseño en los requisitos del claro de **30ft**.

$$M_p = 0.0558 \times 4 \times 1.88 \times 30^2 = 581 \text{ Kip} - \text{ft}.$$

$$S = \frac{581 \times 12}{1.14 \times 33} = 185.3 \text{ in}^3$$

Si se deja un margen para el peso de la viga, se requiere una **24 WF 84**. El diagrama de momentos plásticos y el mecanismo de colapso se muestra en las figuras 4.3.(b) y (c).

El diseño de sección variable basa la sección del perfil de la viga en los requisitos del claro de **20 ft**.

$$M_p = 0.0858 \times 4 \times 1.88 \times 20^2 = 258 \text{ Kips} - \text{ft.}$$

$$S = \frac{258 \times 12}{1.14 \times 33} = 82.3 \text{ in}^3$$

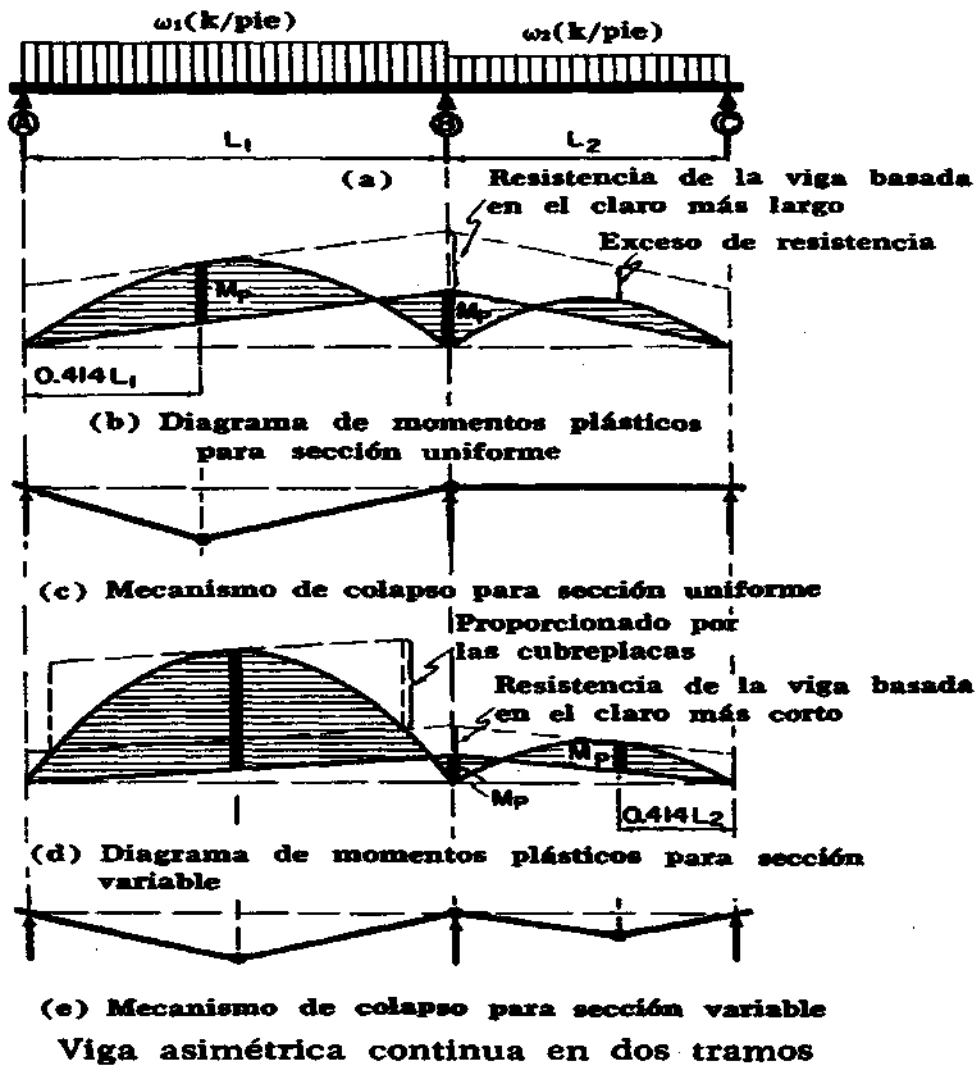


Fig. 4.2

Una **18 WF 50** ($S=89.0 \text{ in}^3$) es la sección más liviana que satisface esos requisitos. En lugar de usar el momento plástico requerido (**258 Kip-ft**), se usará toda la capacidad de momento plástico de la sección **18 WF 50**. Esta puede encontrarse en la tabla de momentos plásticos o con la siguiente ecuación.

Para determinar el momento plástico del claro de 30 ft, es necesario primero, localizarlo. Esto se hace con la estática elemental y consiste de los siguientes pasos:

1. Tómese el claro AB como cuerpo libre, con el momento de **279Kips-ft** aplicado dextórsum en el extremo derecho, y encuéntrase la reacción izquierda, **$R_A=103.5\text{Kips}$** .

$$M_p = \frac{89.0 \times 1.14 \times 33}{12} = 279 \text{Kips} - \text{ft}.$$

2. La distancia x desde A hasta el punto de cortante nulo (localizado del momento plástico) es, y $L - X = 16.25 \text{ f}$.
3. El momento isostático a X ft. De A es $\frac{1}{2} W_u X (L - X) = 840 \text{Kips} - \text{ft}$.
4. El momento plástico es

$$\frac{MX - M_p X}{L} = 840 - \frac{279 \times 13.75}{30} = 712 \text{Kips} - \text{ft}$$

Otro método para determinar el momento anterior es el siguiente: Habiéndose encontrado el cortante (reacción izquierda) en A, en el paso 1, y la distancia al punto de cortante cero del paso 2, el momento requerido es igual al área del diagrama de cortante. $\frac{1}{2} \times 103.3 \times 13.75 = 712$ Kips-ft. Ahora el problema consiste en encontrar las cubreplacas adecuadas para reforzar a la **18 WF 50**, de manera que resista un momento plástico de **712 Kips-ft**. Toma la siguiente forma:

(4.2)

$$A = \frac{M_p}{hS_y} - \frac{2.28I_{bm}}{h^2}$$

En donde **A** es el área requerida de cubreplaca, en cada patín, I_{bm} es el momento de inercia de la viga que se va a reforzar y h es el peralte de la viga reforzada, entre centroides de cubreplacas. Otro método para escoger las cubreplacas consiste en considerar que el momento resistente adicional que se necesita para la viga reforzada llene los requisitos del claro mayor, sea igual a **AhS_y**.

Como el empleo de este último método y suponiendo las placas de $\frac{7}{8}$ in de espesor.

(4.3)

$$A = \frac{12(712 - 279)}{18.875 \times 33} = 8.34 \text{ in}^2$$

Úsense placas superiores e inferiores de $10 \times \frac{7}{8}$ in. La longitud requerida de las placas se puede encontrar gráficamente, como se indica en la figura 4.3. (d), y extenderse, pasados los puntos teóricos de corte, la distancia suficiente para desarrollar el **50%** del área de la placa, con la soldadura.

4.3 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL.

A continuación se hará el análisis de la viga de sección constante con el método del trabajo virtual [figura 4.3. (b)].

(4.4)

$$\theta M_p (2.415 + 1) = \frac{1}{2} \times 17.58\theta \times 1.88 \times 4 \times 30$$

$$M_p = 581 \text{ kips} - \text{ft.}$$

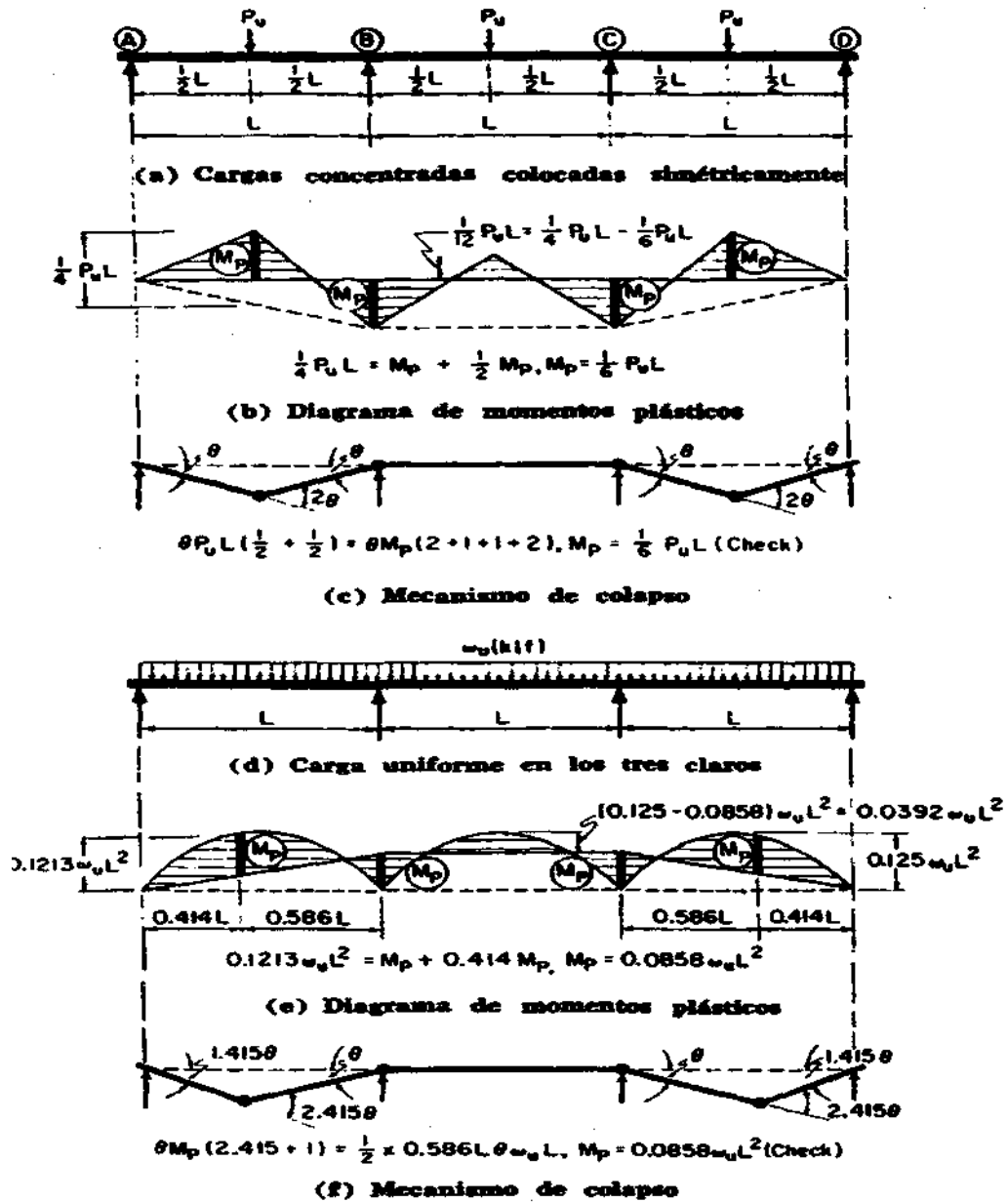
Para revisar el momento plástico del claro de **30ft**, el diseño de sección variable, refiérase a la figura 4.3(c) —el momento plástico escogido para el apoyo interior fue el momento plástico de la sección **18 WF 50**, es decir, **279 Kips-ft**. Entonces, se conoce el momento plástico de la articulación de B. El momento plástico interior, ***M_p***, del claro AB se encuentra con la siguiente ecuación de trabajo.

$$\theta M_p \times 2.181 + 279\theta = \frac{1}{2} \times 16.25\theta \times 1.88 \times 4 \times 30$$

$$M_p = 712 \text{ Kips} - \text{ft.}$$

4.4 VIGAS CONTÍNUAS DE MÁS DE DOS CLAROS.

En contraste con el problema que se presenta en el análisis elástico de vigas continuas, en el cual cada claro adicional incrementa sustancialmente la cantidad de trabajo, en el análisis plástico la capacidad de cualquier viga, en una serie de claros continuos, sólo depende del momento resistente de la viga misma y de las dos adyacentes. Por ejemplo, considérese las vigas de tres claros simétricos de la figura 4.4. ***M_p*** se puede valuar rápidamente con el diagrama de momentos plásticos o con el método del trabajo virtual.



Vigas continuas de claros y cargas iguales

Fig. 4.4

Ejemplo 4.4.1.

En la figura 4.5 se supone que las cargas indicadas son las cargas últimas (**1.88** veces las cargas de diseño). Se requiere trazar el diagrama de momentos plásticos y revisar el momento plástico crítico, por medio del método del trabajo virtual.

Solución.

Los diagramas de cortantes son convenientes para localizar los puntos de momento crítico, así como para calcular los momentos. El diagrama de cortante y los croquis necesarios de cuerpo libre se incluyen en la figura 4.5, para indicar el papel tan importante que tiene la estática en el análisis plástico. Por ejemplo, para determinar el momento máximo positivo del claro AB, es necesario localizarlo primero, encontrando el punto de corte cero. Este se localiza a $\frac{R_A}{W_u}$ desde A. Refiérase al diagrama de cuerpo libre de la figura 4.5(d).

$$25R_A + 272.25 - \frac{1}{2} \times 4 \times 25^2 = 0$$

$$R_A = 39.11 \text{ Kips.}$$

El punto de corte nulo (punto de máximo momento positivo) está a $\frac{39.11}{4} = 9.78 \text{ ft.}$ de A, y el área del diagrama de cortante, a la izquierda del punto cero, da el máximo momento positivo,

$$M_{pos} = \frac{1}{2} \times 39.11 \times 9.78 = 191.2 \text{ Kips-ft.}$$

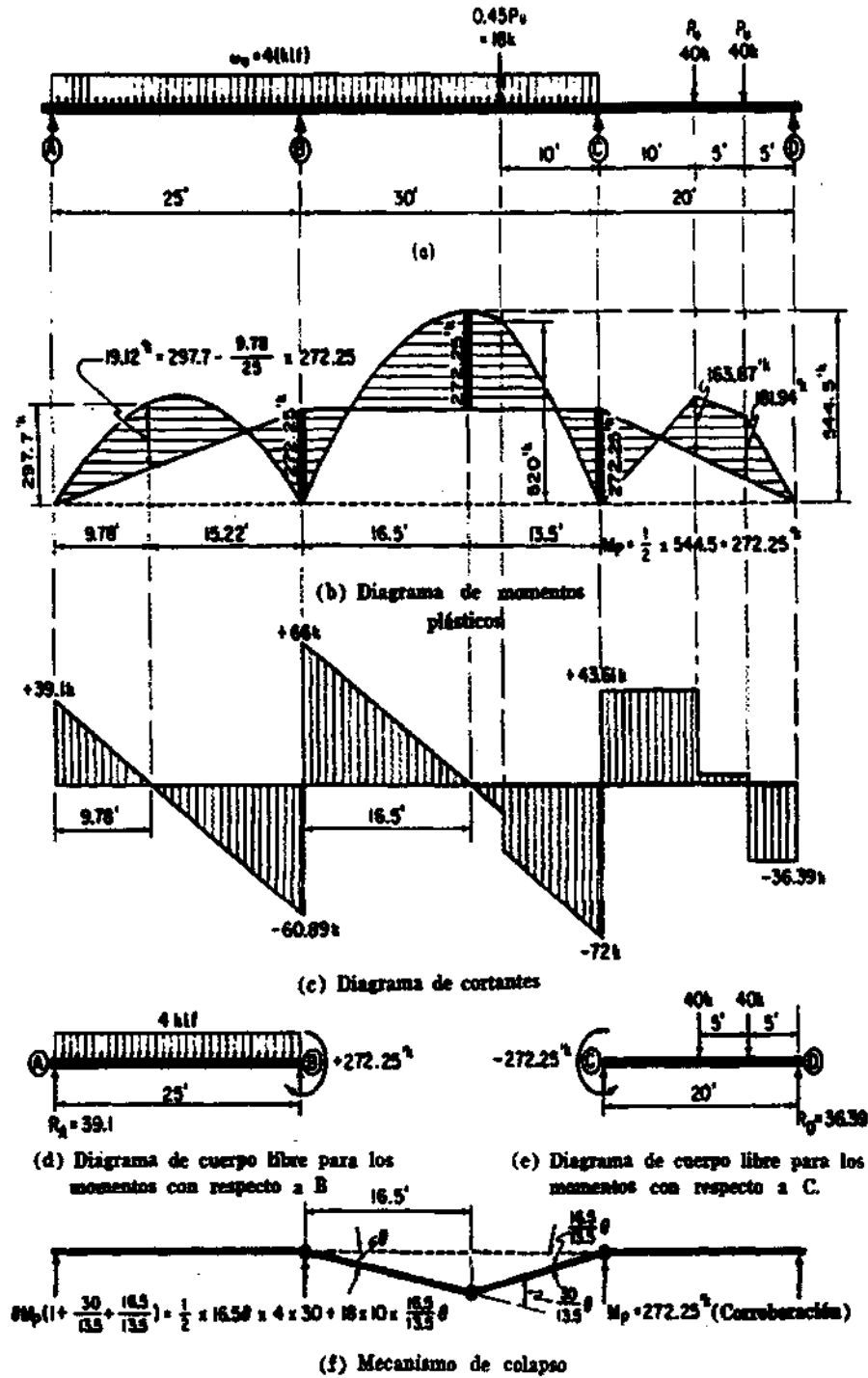
Otro método para determinar el máximo momento positivo del claro AB es el siguiente: habiéndose localizado el punto de máximo momento, a **9.78 ft.** del extremo izquierdo, el momento se encuentra así:

(4.5)

$$M_s = \frac{1}{2} W_u x (L - x) = \frac{1}{2} \times 4 \times 9.78 \times 15.22 = 297.7 \text{ Kips} - \text{ft.}$$

$$M_{pos} = 297.7 - \frac{9.78}{25} \times 272.25 = 191.2 \text{ Kip} - \text{ft.}$$

El momento positivo en el centro y en el punto a los tres cuartos del claro **CD** se encuentran fácilmente con cualquiera de los dos métodos descritos previamente, para el claro **AB**.



Análisis de una viga continua asimétrica.

Fig. 4.5

4.5 VIGAS SIN APOYO LATERAL.

La gran mayoría de las vigas que se usan en la construcción de puentes y edificios forman parte de un sistema de piso y, consecuencia, tiene apoyo lateral en su patín superior. Por lo general, esto proporciona la estabilidad lateral necesaria e impide la torsión y el pandeo. Sin embargo, hay vigas en las cuales la inestabilidad lateral es un problema, como, por ejemplo, las trabes carril. Naturalmente, este problema adquiere mayor importancia en el diseño plástico. Se recomienda que se proporcione apoyo lateral tanto en el patín de tensión como en el de compresión, en las localizaciones posibles de las articulaciones plásticas.

Una ecuación simplificada, aplicable a vigas diseñadas plásticamente, es la ecuación de Baker, que se expone a continuación, ha sido adaptada al valor de E que se usa en los Estados Unidos, o sea, 29 000 000 lb/in².

(4.6)

$$\frac{I_p}{r_y} = \frac{100\sqrt{AK}}{S}$$

en donde:

- A** es el área de la sección e la viga,
- S** es el módulo de sección,
- K** es la constante torsional,
- r_y** es el radio de giro con respecto al eje Y,
- I_p** es la máxima distancia entre apoyos laterales, en pulgadas.

4.6 CONSTANTE TORSIONAL K.

Los valores de K de las vigas laminadas en los Estados Unidos se muestran en las tablas B y C, inclusive, en el Apéndice B. Para secciones diferentes a las laminadas

en los Estados Unidos, las Ecuaciones 4.7 A 4.9, darán valores de K suficiente aproximados para el objeto de la ecuación 4.6

Para secciones de columna con patines de caras paralelas,

(4.7)

$$K = 0.36dt_w^3 + 0.72(b - t_w)t_f^3$$

Para otras vigas que no sean de patines de caras laterales o en pendiente y similares a la viga americana de ala ancha,

(4.8)

$$K = 0.39dt_w^3 + 0.78(b - t_w)t_f^3$$

Para secciones similares a las vigas I normales, americanas,

(4.9)

$$K = 0.43dt_w^3 + 0.86(b - t_w)t_f^3$$

en donde:

- K es la constante torsional de una sección en pulgadas a la cuarta,
- d es el peralte de la sección en pulgadas,
- t_w es el espesor del alma,
- b es el ancho del patín,
- t_f es el espesor promedio del patín.

En los problemas siguientes se emplearán ambos métodos de análisis. Úsese un factor de carga de **1.88** y, cuando los datos estén dados en símbolos.

5. MARCO DE UN PISO Y UNA CRUJÍA

5.1 MARCO RECTANGULAR ARTICULADO.

Algunos marcos de un piso y una crujía pueden considerarse como vigas dobladas en forma de marco. Los momentos se transmiten ininterrumpidamente a través de los acodamientos, como si éstos no existiesen. Aunque el grado de hiperestaticidad del marco articulado es el mismo de la viga apoyada-empotrada, su análisis implica mayor trabajo debido al gran número de mecanismos posibles de colapso.

En los ejemplos anteriores de vigas se empleó el método de equilibrio y se hizo una revisión con el método del trabajo virtual. Sin embargo, el método de equilibrio resulta muy laborioso en el caso de los marcos, debido al número mayor de mecanismos posibles. Es mejor proceder con el método del trabajo virtual hasta que el

criterio antes haya sido satisfecho y, entonces, a discreción del ingeniero, puede construirse un diagrama de momentos en el mecanismo de colapso escogido, para asegurarse que M_p no es excedido en ningún punto de la estructura.

Ejemplo 5.5.1.

Se diseñará el edificio industrial, de acero, de un piso, que se indica en la figura 5.1. Los polines serán continuos y se diseñarán con las cargas concentradas del techo que les transmitan, en el centro del claro, los largueros **12 B 14**, simplemente apoyados.

Los marcos serán articulados y se diseñarán con las cargas concentradas de que les transmitan los polines en los tercios del claro y con el empuje del viento que se representarán como una carga horizontal concentrada en el nivel del cabezal. El material de la cubierta salvará el claro entre largueros **12 B 14** o entre largueros y cabezal. Entonces, el cabezal del marco cuenta con apoyo lateral, pero los polines no. En este ejemplo no hay que diseñar varillas de liga.

Las cargas con las siguientes: carga muerta (sin incluir los largueros), **18 lb/ft²**; carga viva, **30 lb/ft²**; empuje de viento **15 lb/ft²**.

Solución:

Diseño de los polines: Una hilera de largueros colocada en el punto medio entre los marcos, transmite la carga del techo a los polines, resultando una carga concentrada de **9.88 Kips** en el centro del claro. Esta carga se añade al peso de una longitud de medio claro, de una supuesta sección de polín supóngase **120 lb**. Entonces, la carga concentrada en el centro del claro de los polines es de **10.0 kips**. Véase la figura

5.2.(a) y obsérvese que $M_p = \frac{PL}{6}$. Por lo tanto, (usando 2.5)

$$S = \frac{18.8 \times 20 \times 12}{6 \times 1.14 \times 33} = 19.99 \text{ in}^3$$

Si se incluye el peso propio del polín, la **10 WF 21** ($S=21.5 \text{ in}^3$) será adecuada si pasa la revisión de la estabilidad lateral.

Los polines tienen apoyos laterales a cada **120 in**. La distancia requerida entre apoyos laterales se calculará con la ecuación 5. De la tabla D, $K=0.23$ y del manual de acero, $r_y=1.25$ in; $A=6.19$ in² y $S=21.5$ in³. Por lo tanto,

(5.1)

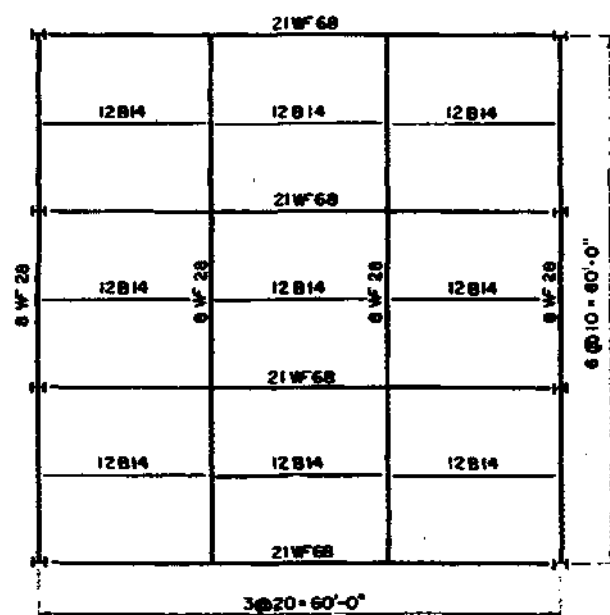
$$I_p = \frac{1.2 \times 1050 \sqrt{6.19 \times 0.23}}{21.5} = 72.8 \text{ in} < 120 \text{ in}$$

Pruébese una **8 WF 28**. $K=0.52$; $r_y=1.62$ in; $A=8.23$ in² y $S=24.3$ in³

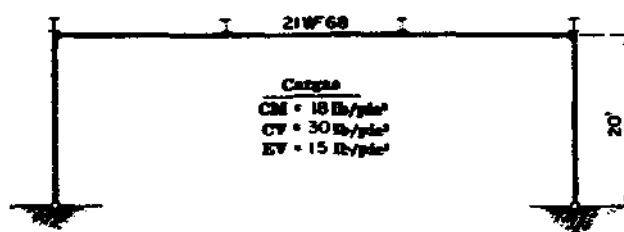
(5.2)

$$I_p = \frac{1.62 \times 1050 \sqrt{8.23 \times 0.52}}{24.3} = 145 \text{ in} > 120 \text{ in}$$

Por lo tanto, úsese polines de **8 WF 28**.



(a) Planta del techo



(b) Marco tipo

Fig. 5.1

Diseño del marco. La parte de la carga uniforme del techo, que carga directamente el cabezal se añadirá a la que transmiten los polines y la suma se tratará como carga concentradas en los techos del claro. El polín transmite $(10(18 + 30) + 28) \times 20 = 10160 \text{ lb}$. Supóngase **68 lb/ft** para el peso del cabezal. La carga uniforme resistida directamente por la trabe es $(10(18 + 30) + 68) = 32880 \text{ lb}$. La tercera parte de esto, **10 960 lb**, se considera aplicada en cada tercio del claro, lo cual hace la carga concentrada total, en cada punto, sea de **21 Kips**.

El marco con sus cargas se muestra en la figura 5.3.(a). Las cargas del cabezal incluyen un peso propio de **68 lb** que se determinó en un cálculo preliminar, y son siete veces mayores que la carga de viento. Esta carga de viento es una carga equivalente, concentrada, horizontal, aplicada en la parte superior del marco y de magnitud tal que produzca el mismo momento de volteo, con respecto a la base de la columna, que la carga de viento uniformemente distribuida que se especifique. Úse la ecuación

$$P_u = \frac{Wu(h + f)^2}{2h}. \quad \text{En este ejemplo, la carga equivalente es}$$

$$P = 15 \times 15 \times 20 \times \left[\frac{20^2}{2 \times 20} \right] = 300 \text{ lb}. \quad \text{Por conveniencia en la determinación del mecanismo}$$

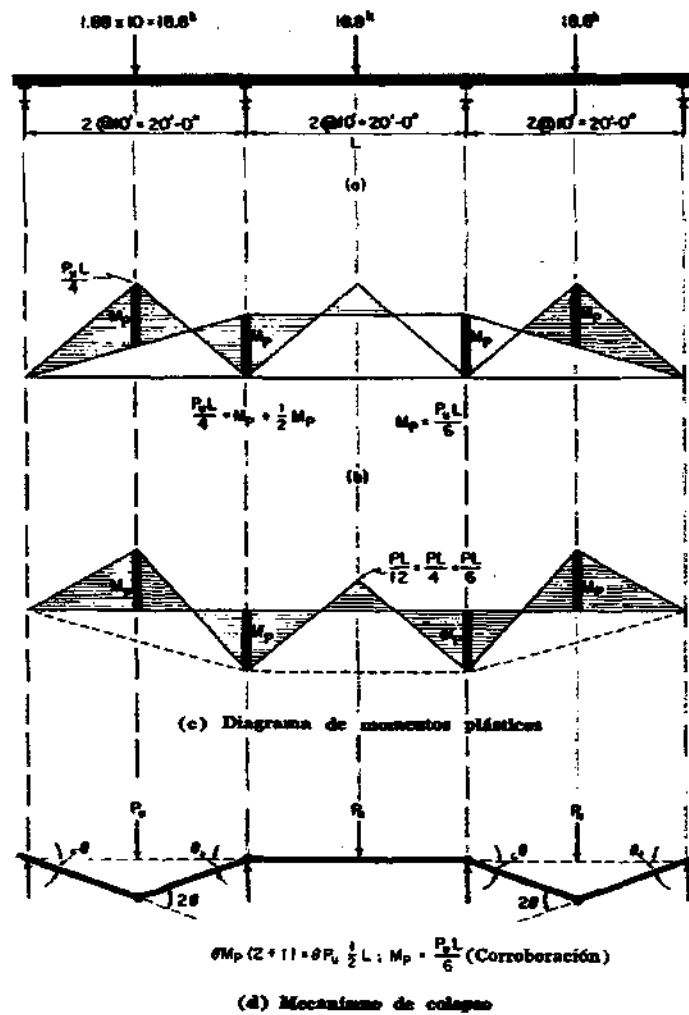
de colapso, la carga de viento se hará igual a **P** y la carga gravitacional a **7.0P**. Por supuesto, la carga de colapso **Pu** es **1.88P**.

Puede demostrarse que el número de mecanismos elementales es igual al número de articulaciones plásticas posibles menos el grado de hiperestaticidad. El marco articulado es de primer grado de hiperestaticidad y tiene, como las cargas en los tercios del claro, cuatro articulaciones plásticas posibles. Entonces, hay tres mecanismos elementales en este ejemplo, dos mecanismos de viga y uno de recuadro. A éstos se añaden tres posibles mecanismos combinados. Véase la figura 5.3.

El mecanismo crítico es el que resulta con un momento plástico mayor, M_p en función de la carga P_u . El mecanismo combinado de viga y de recuadro de la figura 5.3(f) es el crítico. Como se indica ahí, $M_p = 76.7P$. entonces,

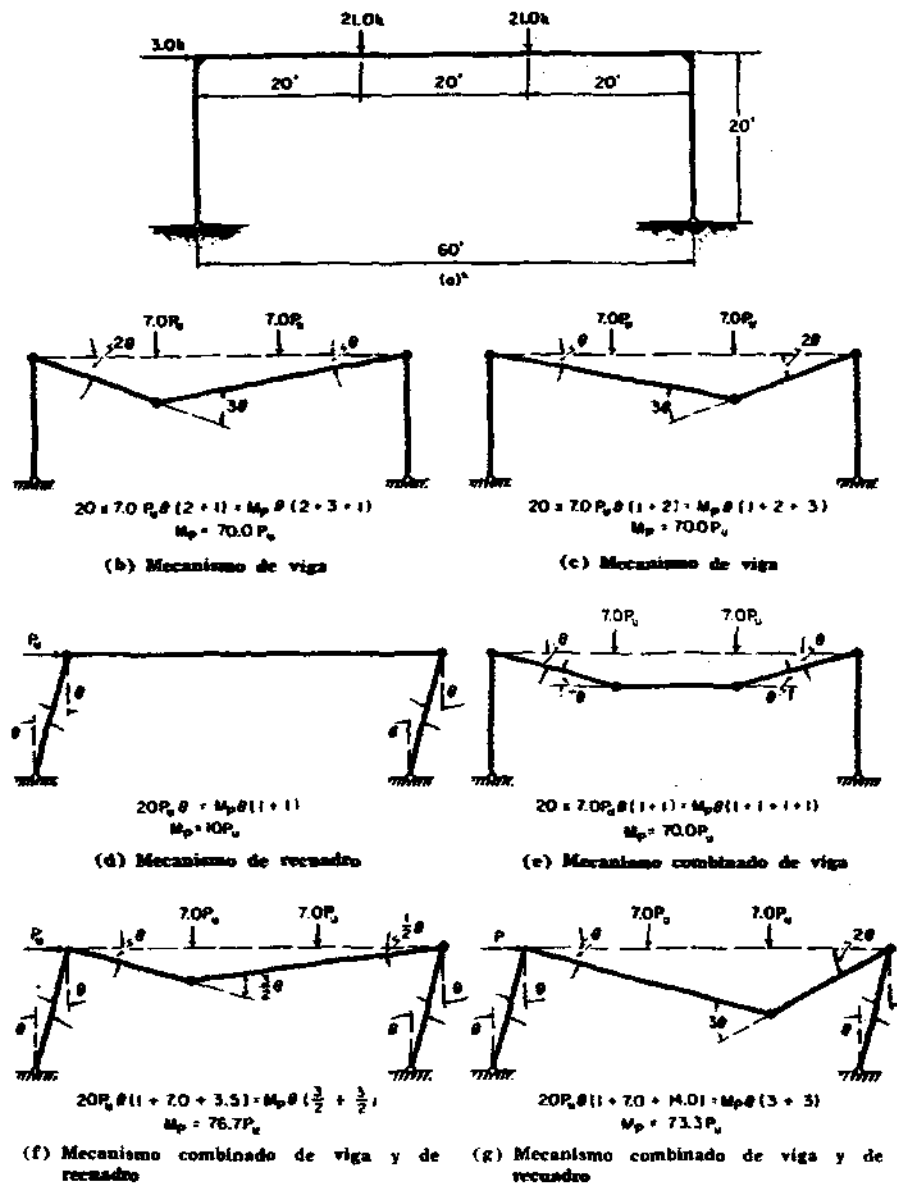
$$S = \frac{76.7 \times 1.88 \times 3.0 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 138.0 \text{ in}^3$$

Se requiere una **21 WF 68**.



Análisis del pórtico,

Fig. 5.2



Mecanismos de un marco articulado.

Fig. 5.3

5.2 DIAGRAMA DE MOMENTOS

Como una revisión adicional, para asegurarse que se ha encontrado la condición crítica, se puede trazar el diagrama de momentos del mecanismo de la figura 5.3. Para ello se dibuja el diagrama de cuerpo libre con las cargas indicadas en función de M_p . Entonces, si $M_p = 76.7 P_u$, $P_u = 0.013 M_p$ y $7.0 P_u = 0.091 M_p$.

El marco articulado es de primer grado de hiperestaticidad; la componente horizontal de una de las reacciones siempre se toma como elemento hiperestático. Refiérase a la figura 5.4.(a); el momento en el capitel de la columna EF es M_p que es igual a $20HF$. Por lo tanto, $HF=0.05M_p$ y la suma de fuerzas horizontales permite determinar a $HA=0.037M_p$ y $V_p=0.095M_p$. Conocidas todas las reacciones, el momento en cualquier punto del marco se encuentra rápidamente. Por ejemplo, tómese ABCD como cuerpo libre y súmense los momentos con respecto a D,

(5.3)

$$M_D - 20 \times 0.037M_p + 40 \times 0.087M_p - 20 \times 0.091M_p = 0$$

$$M_D = 0.92M_p$$

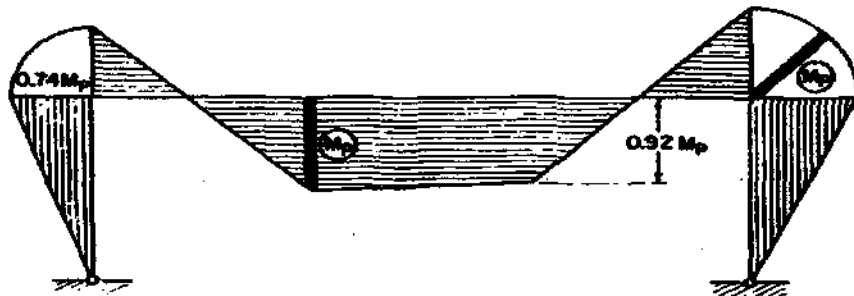
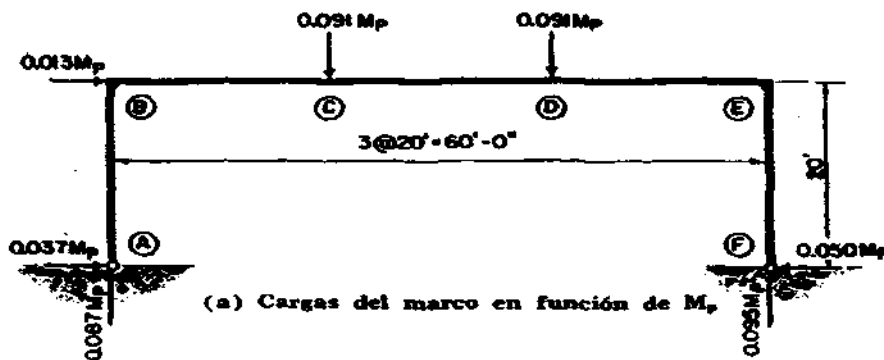


Diagrama de momentos.

Fig. 5.4

5.3 FACTOR DE CARGA REDUCIDO.

Las especificaciones normales permiten un aumento de un tercio en el esfuerzo admisible, cuando se incluye el viento. Esta especificación, que se ingirió en la solución anterior, será considerada ahora. Como se hizo en los capítulos anteriores, la carga se multiplicará por tres cuartos, en lugar de multiplicar el esfuerzo admisible por cuatro tercios. Esto equivale a usar un factor de carga en los mecanismos en que participa el viento. Es decir, el factor de carga en esos casos se convierte en $0.75 \times 1.88 = 1.41$.

Refiérase a la figura 5.3, se observa que el viento participa en la formación de los mecanismos de (d), (f) y (g). Por lo tanto, el factor de carga reducido se aplicará sólo en esos casos. El mecanismo en (f) es crítico. Por lo tanto,

$$Mp = 1.41 \times 76.7 \times 3.0 = 324.4 \text{ kips} - \text{ft.}$$

En el mecanismo de viga de la figura 5.4 el viento no participa. En consecuencia,

$$Mp = 1.88 \times 70.0 \times 3.0 = 394.8 \text{ kips} - \text{ft.}$$

Entonces se ve que si se sigue la práctica usual, (usando 2.5)

$$S = \frac{394.8 \times 12}{1.14 \times 33} = 126.0 \text{ in}^3$$

y una **21 WF 62** es adecuada.

5.4 MARCOS DE SECCIÓN VARIABLE.

Para simplificar, el marco del ejemplo 5.1.1 se diseño de sección constante., Para muchos marcos de un piso, tanto rectangulares como a dos aguas , una sección uniforme será la más económica. Sin embargo, si se considera deseable variar las secciones, se puede lograr asignado **Mp** a la sección menor, desde el principio, y el múltiplo de **Mp** que se desee, a los miembros mayores.

Ejemplo 5.4.1.

Adóptese los mismos datos del ejemplo 5.1.1, se diseñará un marco articulado en el cual el momento plástico del cabezal será del doble del de las columnas. El factor de carga reducido se empleará en los mecanismos en que participe el viento.

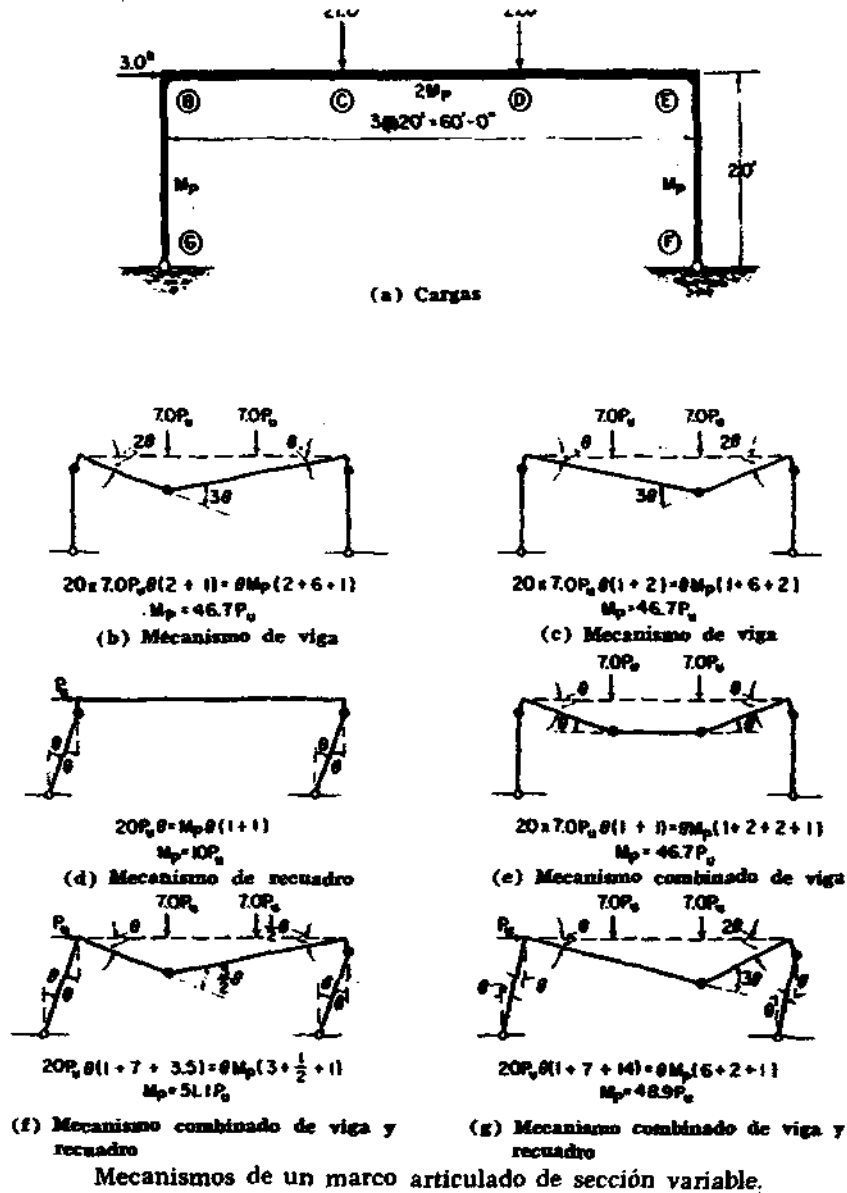


Fig. 5.5

Solución.

El análisis de este marco diferente del ejemplo 5.1.1, solo en el cálculo del trabajo resistido por las articulaciones plásticas en C y/o D. En estos puntos debe

emplearse el múltiplo de **M_p** que se le asignó al cabezal. Este procedimientos se siguió en al figura 5.5. Como el factor de carga reducido, **1.41**, se usa en el mecanismo de la figura 5.5(f). Los de (b), (c) o (e) rigen, (usando 2.5)

$$S = \frac{46.7 \times 1.88 \times 3.0 \times 12}{1.14 \times 33} = 84.0 \text{ in}^3$$

Debe usarse una **18WF 50** para las columnas. El cabezal se diseña para **$2M_p$** ; por lo tanto, su módulo de sección requerido es **$2 \times 84.0 = 168.0 \text{ in}^3$** . Úsese una **24 WF 76**.

Como en la revisión de equilibrio del ejemplo 5.1.1, las cargas se calcularon en función de **M_p** [figura 5.6.(a)], con el valor crítico de **M_p** determinado para este marco en la figura 5.5. Las cargas exteriores de la trabe no se multiplican por el múltiplo asignado **M_p** para la trabe. En cambio, este múltiplo se aplica al momento resistente de las articulaciones plásticas de la trabe. La diferencia entre las dos revisiones de equilibrio consiste en que en el caso de este, el giro θ de la articulación en C se multiplicó por valor **θM_p** , asignado arbitrariamente, lo que significa que cuando el diagrama de momentos plásticos se trace, el momento plástico de C deberá ser **$2M_p$** .



Fig. 5.6

5.5 MARCO RECTANGULAR EMPOTRADO.

El análisis y diseño plástico del marco empotrado no involucra más trabajo que el articulado. Esto contrasta ventajosamente con el análisis elástico de marcos rígidos, en donde se vio que el análisis del marco empotrado requiere de varias veces la cantidad de trabajo que se necesita para el articulado.

Naturalmente que la diferencia entre los dos tipos de marcos consiste en que, en lugar de las articulaciones reales de las bases de las columnas, hay articulaciones plásticas potenciales en el marco empotrado. Esta condición queda en evidencia en el mecanismo de recuadro de la figura 5.7, en donde la carga horizontal de viento tiene un papel muy importante.

Ejemplo 5.5.1.

Se diseñará un marco empotrado de sección constante con los datos del ejemplo 5.1.1, empleando el factor de carga reducido en los mecanismos en que intervenga el viento.

Solución.

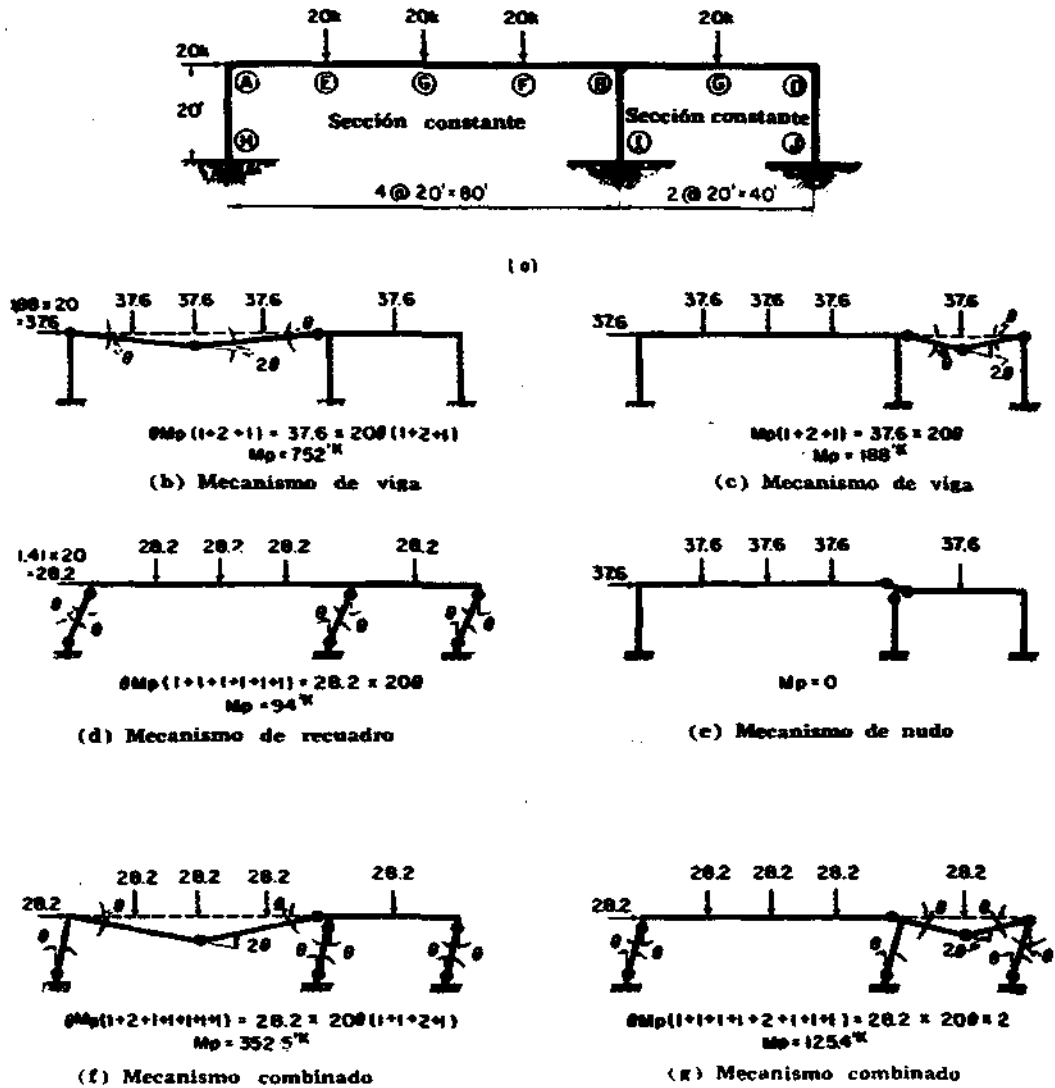
Este marco tiene seis articulaciones plásticas potenciales y es de tercer grado de hiperestaticidad. Por lo tanto tiene el mismo número (seis menos tres) de mecanismos elementales que los marcos articulados.

Obsérvese en la figura 5.7 que la carga gravitacional de **21 Kips**. del ejemplo 5.1.1, se ha reducido a **210.28 kips**, para tomar en cuenta el menor peso de la viga que se requiere en este ejemplo.

Nótese en los mecanismos de recuadro figuras 5.7 (d), (f) y (g) que los valores de **M_p** son mucho menores que los valores correspondientes del marco articulado de la figura 5.3. Esto se debe a las articulaciones plásticas adicionales que se resisten distorsión lateral. Los mecanismo de vigas son críticos. Es decir, **$M_p=67.6Pu$** . Por lo tanto, (usando 2.5)

$$S = \frac{67.6 \times 1.88 \times 3.0 \times 12}{1.14 \times 33} = 121.5 \text{ in}^3$$

Úsese una sección **21 WF 62**.



Mecanismos de un marco empotrado.

Fig. 5.7

5.6 MARCO DE CABEZAL ACODADO

El marco de cabezal acodado o de techo a dos aguas, en comparación con el rectangular, presenta dos dificultades extra en el análisis. Primeramente, tiene un nudo adicional (el de la cumbrera) y, en consecuencia, otra articulación plástica potencial. En segundo término, su geometría de distorsión es considerablemente más complicada. Es decir, es más difícil, en la mayoría de los casos, encontrar el ángulo de rotación de los diferentes segmentos del mecanismo de colapso. Esta dificultad se debe al hecho de que las articulaciones plásticas que se forman en el cabezal inclinado no se desplazan ni vertical, ni horizontalmente.

Aunque los giros y desplazamiento del mecanismo de colapso se pueden calcular con el mismo método directo que se usó en el marco rectangular, es más conveniente determinar el centro con respecto al cual giran los segmentos entre articulaciones plásticas del techo. Este centro de rotación se conoce como centro instantáneo de giro.

5.7 CENTRO INSTANTÁNEO DE GIRO.

Las funciones del centro instantáneo y el método de localización se explican con mayor facilidad por medio de un ejemplo. Refiérase al segmento DF del mecanismo de colapso de la figura 5.8(d). Como la columna GF no se acorta, si la articulación plástica se moviera, lo haría directamente hacia la derecha. Es decir, se movería en dirección perpendicular al eje de la columna. Este eje debe extenderse indefinidamente hacia arriba. En seguida obsérvese que la articulación plástica correspondiente al original anterior de D (el otro extremo del segundo DF) debe moverse en dirección perpendicular a la viga BD del cabezal. Extiéndase la línea BD hacia arriba y a la derecha, hasta que intercepte a la línea vertical de la columna FG. Esta intersección es el centro instantáneo de giro que se busca.

En relación con los movimientos de estas articulaciones plásticas, debe indicarse que sus desplazamientos son desplazamientos virtuales; es decir, son imaginarios. Una articulación plástica no se balancea en un arco, como se podría inferir

de una inspección de los mecanismos de colapso, los cuales, necesariamente, deben dibujarse a una escala mucho muy exagerada.

Ejemplo 5.7.1

Se diseñará un marco articulado, de cabezal acodado, de sección constante, con las dimensiones y cargas que se muestran en la figura 5.8.

Solución:

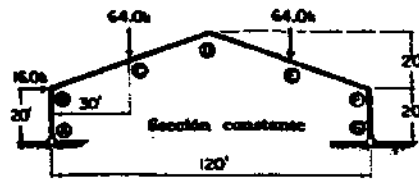
Es evidente que no hay ninguna diferencia entre los mecanismos de vigas y de recuadro (mostrados en las figuras 5.8.(b) y (c)) y los correspondientes de los marcos rectangulares. Sin embargo, hay algo especial en los restantes. Obsérvese que en los cuatro mecanismo(figuras 5.8.(d), (e), (f) y (g)) el segundo intermedio no se desplaza horizontalmente, sino que gira virtualmente. En cambio, el segundo intermedio del mecanismo de recuadro tiene un desplazamiento virtual horizontal, sin giro. Son estos segmentos desplazados y girados virtualmente los que hacen surgir la necesidad de un centro instantáneo de giro. Las articulaciones plásticas de los extremos del segmento intermedio determinan las direcciones de las dos líneas convergentes, cuya intersección es el centro instantáneo de giro. Además, obsérvese que la siguiente articulación adyacente a los extremos y fuera de este segmento intermedio, deben caer en una de las líneas convergentes.

La función del centro instantáneo de giro es facilitar la determinación de los diferentes ángulos de rotación, sin los cuales es imposible plantear las ecuaciones del trabajo virtual necesarias. Se emplean triángulos semejantes para determinar la altura sobre el suelo del centro instantáneo de giro O . En la figura 5.8.(g), por ejemplo, O está a $6L$ sobre el suelo. Por lo tanto, OF es cinco veces FG y, si se asigna θ al giro de G , el de O debe ser $\theta/5$. También, por los triángulos semejantes., OC es tres veces AC . Entonces, como el giro de O es $\theta/5$ debe ser $3\theta/5$.

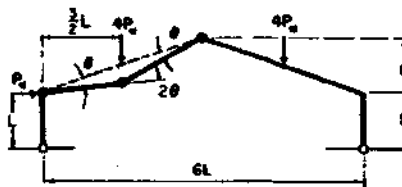
Refiérase a la figura 5.8. es evidente que el mecanismo crítico, es el de 5.8. (e), ya que 1.88×2.4 es mayor que 1.41×2.7 , por lo tanto, (usando 2.5).

$$S = \frac{2.4 \times 1.88 \times 16.0 \times 20 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 461 \text{ in}^3$$

Úse una **36 WF 150**.



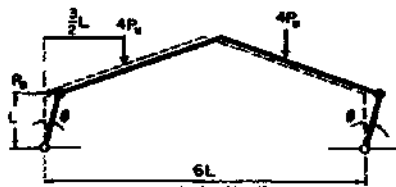
(a) Cargas



$$\frac{3}{2}L\theta = 4P_u \cdot \theta M_p(1 + 2 + 1)$$

$$M_p = 1.5P_uL$$

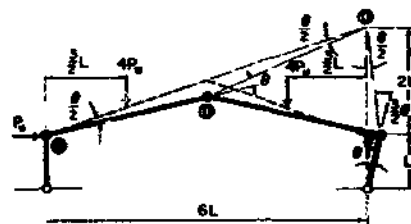
(b) Mecanismo de viga



$$P_u L \theta = \theta M(1 + 1)$$

$$M_p = 0.5P_uL$$

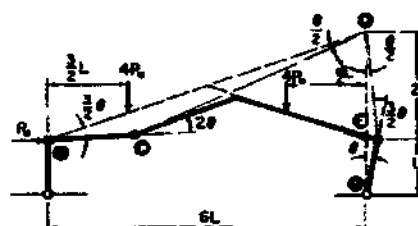
(c) Mecanismo de recuadro



$$2 \times \frac{3}{2}L \frac{\theta}{2} = 4P_u \cdot \theta M_p(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})$$

$$M_p = 2.0P_uL$$

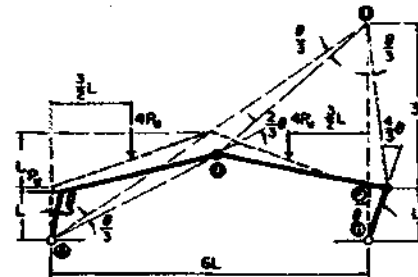
(d) Mecanismo de cabezal acodado



$$\frac{3}{2}L\theta = 4P_u(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = \theta M_p(\frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2})$$

$$M_p = 2.4P_uL$$

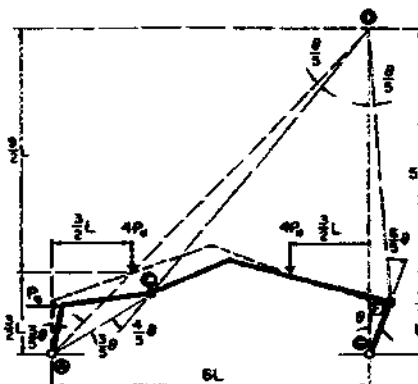
(e) Mecanismo combinado de viga y de cabezal acodado



$$\frac{L}{3}\theta P_u + 2 \times \frac{3}{2}L \frac{\theta}{3} = 4P_u \cdot \theta M_p(\frac{2}{3} + \frac{4}{3})$$

$$M_p = 2.17P_uL$$

(f) Mecanismo combinado de recuadro y de cabezal acodado



$$\frac{3}{2}L P_u + \frac{3}{2}L \theta = 4P_u(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}) = \theta M_p(\frac{4}{3} + \frac{6}{3})$$

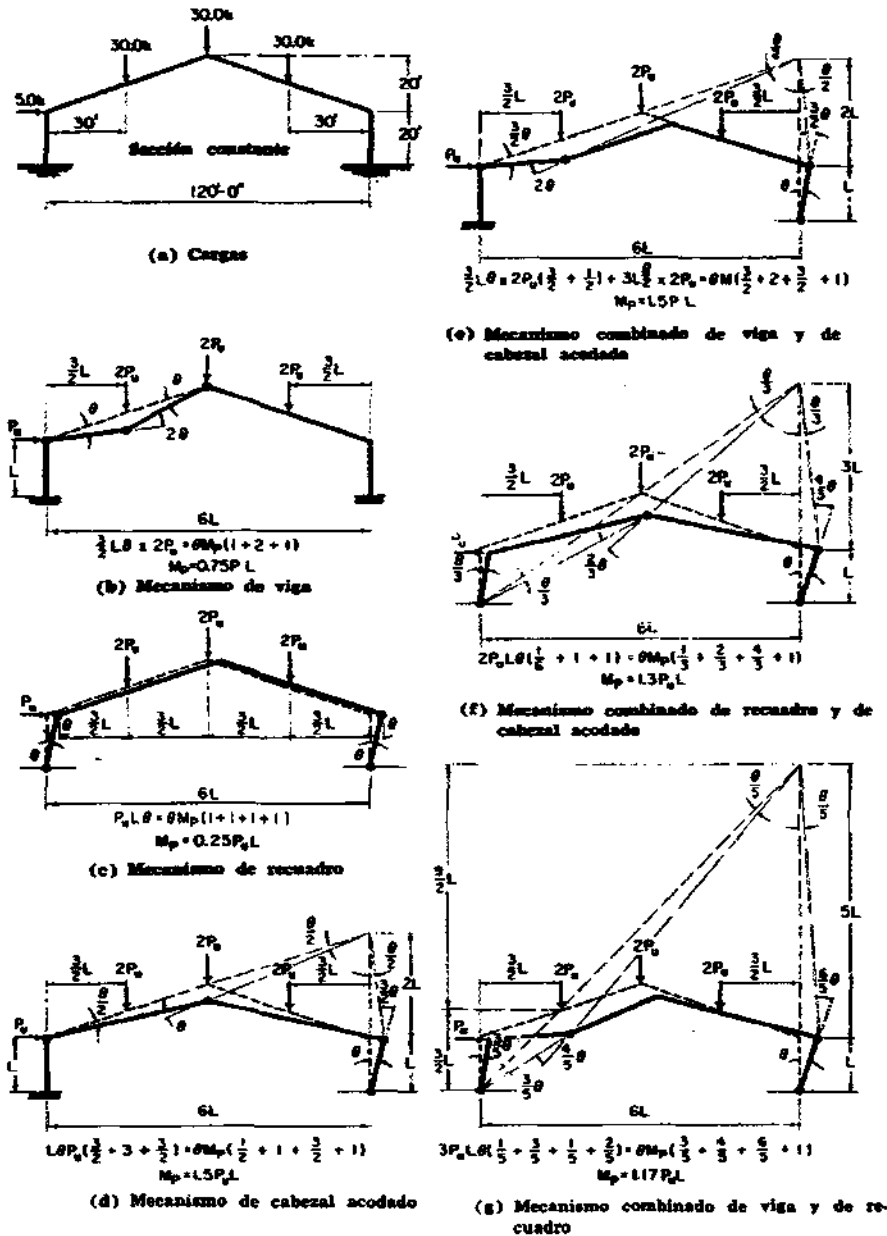
$$M_p = 2.7P_uL$$

(g) Mecanismo combinado de viga y de recuadro

Mecanismos de un marco articulado de cabezal acodado.

Ejemplo 5.7.2.

Se diseñará un marco empotrado, de cabezal acodado y sección constante, con las mismas dimensiones del ejemplo 5.7.1. Vease la figura 5.9.



Mecanismos de un marco empotrado de cabezal acodado.

Figura 5.9

Solución.

Una comparación entre las figuras 5.8 y 5.9 indicarán que los mecanismos de colapso y los centros instantáneos de giro son idénticos en los dos tipos de marco, con excepción, por supuesto, de las articulaciones plásticas adicionales en las bases de las columnas del empotrado. Como hay más articulaciones plásticas para resistir las cargas, el momento se reduce y se logra alguna economía.

El momento crítico es $1.5P_uL$. Por lo tanto, (usando 2.5)

$$S = \frac{1.5 \times 1.88 \times 15.0 \times 20 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 269.9 \text{ in}^3$$

Úsese una **30 WF 108**.

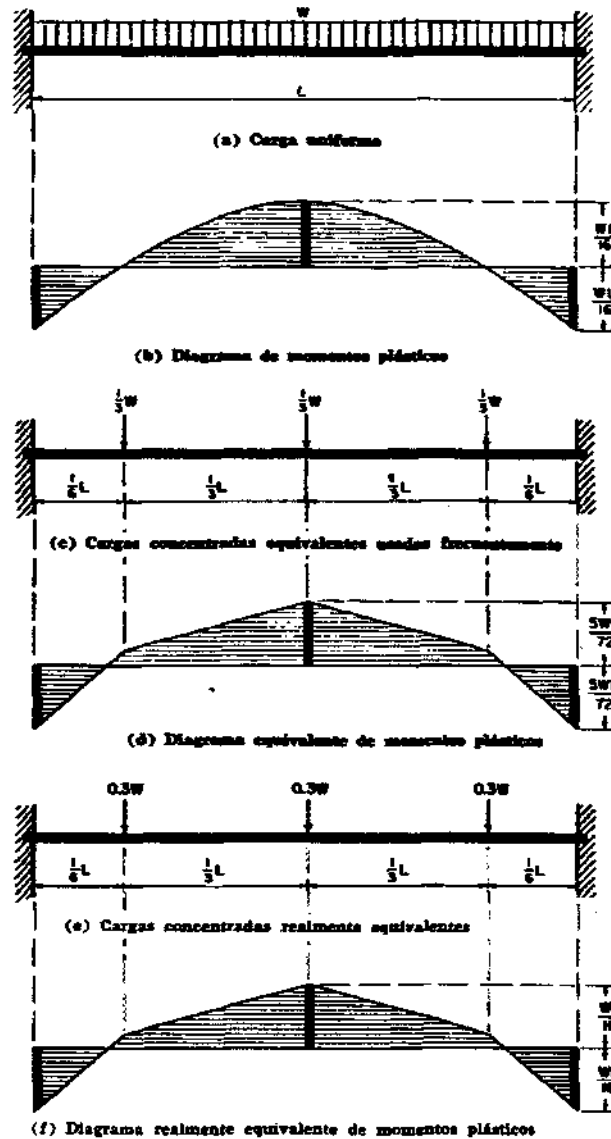
5.8 CARGA UNIFORME.

Las articulaciones plásticas se forman en los nudos de la estructura y en los puntos de máximo momento. Con carga uniforme, la localización del punto de máximo momento no siempre es fácil de determinar inmediatamente. En tales casos, la localización de la articulación plástica se denota con el parámetro x y la ecuación del trabajo virtual de M_p se plantea en función de X . En seguida se procede a encontrar el máximo de la ecuación, con lo cual queda determinada X .

Cargas concentradas equivalentes a la carga uniforme. Debido al trabajo adicional que implica el tratamiento de la carga uniforme, ésta se reemplaza generalmente por un sistema de cargas concentradas equivalentes.

Es costumbre concentrar un tercio de la carga total, uniformemente distribuida W , a un sexto del claro desde cada extremo, y en el centro. Rápidamente se demuestra que una viga simplemente apoyada, cargada en esa forma, resulta con un máximo momento en el centro del claro que es una décimo mayor que el de la viga cargada uniformemente. Esta discrepancia está del lado de la seguridad, pero como uno de los objetos del diseño plástico es la economía, se puede poner un sistema de cargas concentradas realmente equivalentes, dividiendo $0.9W$ en tres partes iguales, colocadas

en la forma que se indicó previamente. Véase las figuras 5.10. (e) y (f). Este arreglo es sólo ilustrativo. La carga total, uniformemente distribuida W , puede dividirse en cualquier número de partes iguales que se desee y espaciarse a distancias iguales, con tal que las cargas extremas queden, de los extremos, a la mitad del espaciamiento. Conforme aumenta el número en que se divide W , mayor aproximación se tiene del diagrama de momentos de carga uniforme. Sin embargo, el esquema sugerido en la Figura 5.10 será satisfactorio en la mayoría de las vigas



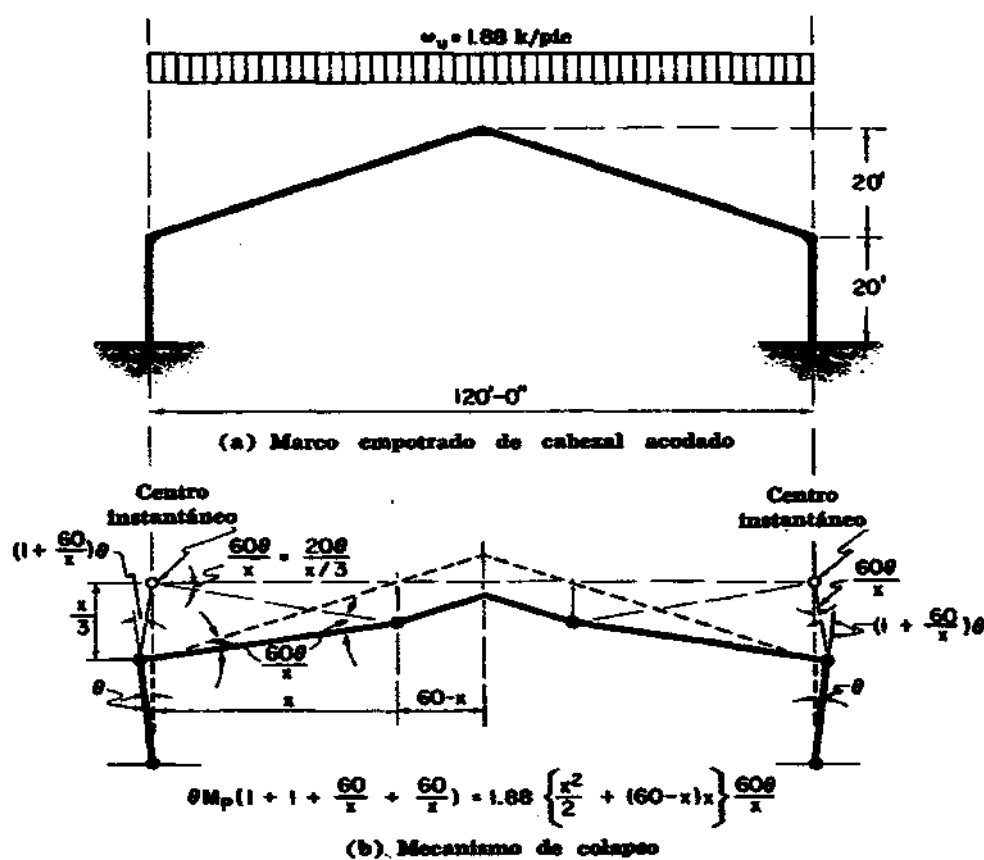
Sistema de cargas concentradas equivalentes

Fig. 5.10

Ejemplo 5.8.1.

Se analizará y diseñará con la teoría plástica, usando una sección constante.

El edificio, es de **120' X 200'** y se estructurará con marcos empotrados de cabezal acodado, de **120'** de claro y separados **20'**, centro a centro. La carga viva es de **30 lb/Ft²** y la muerta (sin incluir la trabe) de **15 lb/Ft²**. Supóngase **100 lb/ft** para la trabe.



Marco de cabezal acodado cargado uniformemente.

Fig. 5.11

Solución.

La carga gravitacional total por pie lineal es $20(30 + 15) + 100 = 1000 \text{ lb/ft} = W$ y

$$W_u = 1.88 \times 1000 = 1880 \text{ lb/ft}.$$

Las localizaciones de las articulaciones del cabezal están definidas por el parámetro desconocido X y el centro de giro se determina en la intersección de la línea vertical prolongada hacia arriba desde la columna y la línea horizontal que pase por las originales de las articulaciones plásticas de la trabe. La geometría de la rotación se indica en la figura 5.11 (b).

Si se aplica la ecuación del trabajo virtual, usando solo la mitad izquierda del marco (debido a la simetría con respecto al centro del claro).

(5.4)

$$\theta M_p \left(1 + 1 + \frac{60}{x} + \frac{60}{x} \right) = 1.88 \left[\frac{x^2}{2} + (60 - x)x \right] \frac{60\theta}{x}$$

$$M_p = \frac{3384x - 28.2x^2}{60 + x}$$

El parámetro X se determina de manera que M_p sea máximo. Derivando la expresión anterior de M_p con respecto a X e igualándola a cero, $X=43.92$

(5.5)

$$M_p = \frac{3384 \times 43.92 - 28.2 \times 43.92^2}{60 + 43.92} = 906.7 \text{ Kip-ft.}$$

$$S = \frac{906.7 \times 12}{33 \times 1.14} = 289 \text{ in}^3$$

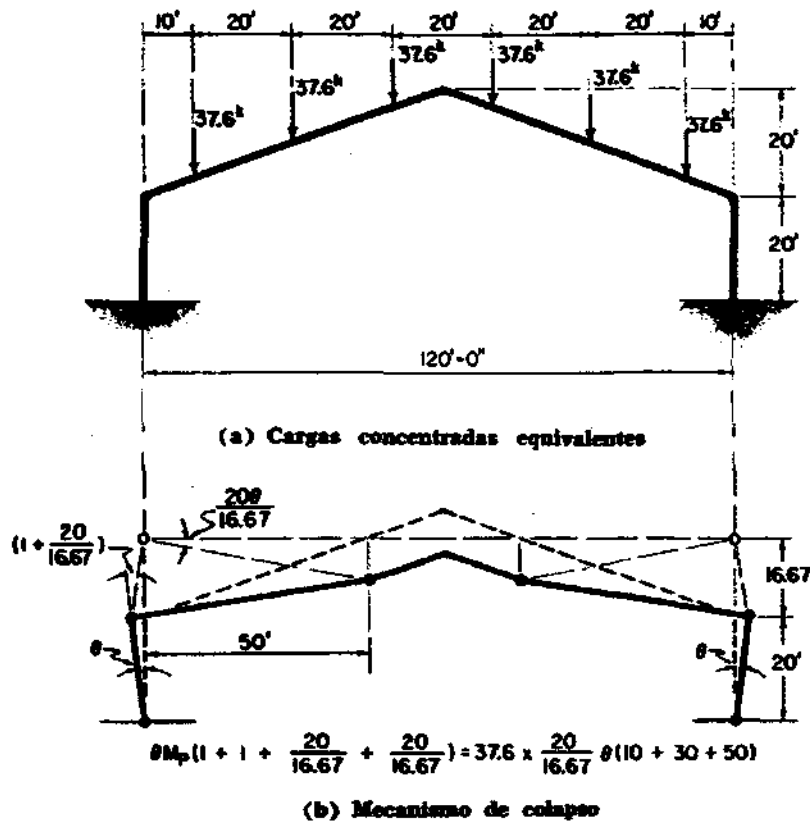
Úse una **30 WF 108** ($S=299 \text{ in}^3$)

Ejemplo 5.8.2

Se requiere determinar M_p para el ejemplo 5.8.1, usando un sistema de cargas concentradas equivalentes.

Solución.

La carga total uniformemente distribuida se reemplazará por seis cargas concentradas, colocadas como se muestra en la figura 5.12. El arreglo indicado se escogió para colocar una carga concentrada tan cerca como fuera posible de la posición teórica de la articulación plástica. Cada carga vale $120 \times \frac{1.88}{6} = 37.6 \text{ Kips}$.



Marco empotrado de cabezal acodado con cargas concentradas equivalente,

Fig. 5.12

Refiérase a la figura 5.12(b)

(5.6)

$$\theta M_p \left(1 + 1 + \frac{20}{16.67} + \frac{20}{16.67} \right) = 37.6 \times \frac{20}{16.67} \theta (10 + 30 + 50)$$

$$M_p = 922.8 \text{ Kips} - \text{ft.}$$

Todavía es suficiente la sección **30 WF 108**. Entonces, se ve que si se usa el sistema de cargas concentradas equivalentes, resulta un **M_p** que es menos del **2%** mayor que la carga uniforme.

5.9 FÓRMULAS DE ESTES.

El ejemplo 5.8.1 demostró lo tardado que es llegar al valor correcto de **M_p** en un marco de cabezal acodado con carga uniforme. El recurrir a un sistema de cargas equivalente tampoco es satisfactorio, como se demostró en el ejemplo 5.8.2, porque resultó un valor de **M_p** ligeramente excedido. Las ecuaciones de Estes que se muestran en las figuras 5.13 y 5.14.

5.10 CARGAS DE VIENTO.

Como se observará en las figuras 5.13 y 5.14, la carga de viento se indica como una carga horizontal **P_u** , concentrada en el alero. Las especificaciones estipulan invariablemente una carga uniformemente distribuida, en libras por pie cuadrado, en la superficie vertical. La carga **P_u** debe ser de tal magnitud que su momento de volteo, con respecto a la base de la columna, sea el mismo de la carga especificada, distribuida uniformemente. Sea **W_u** la carga uniformemente distribuida por pie de altura. Entonces,

(5.7)

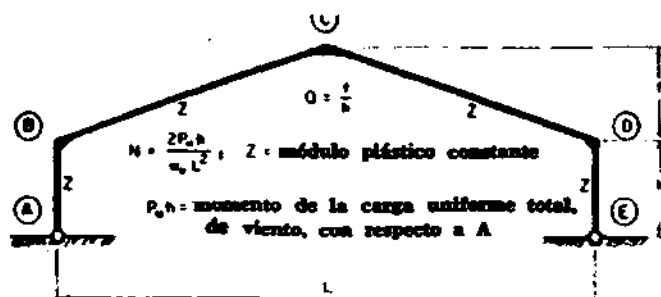
$$P_u = \frac{W_u(h+f)^2}{2h}$$

La ecuación 5.10.1 no se aplicará cuando se considere que el viento sea perpendicular, en la parte superior del marco, al cabezal inclinado, ya sea de acuerdo con la fórmula de Duchemin,

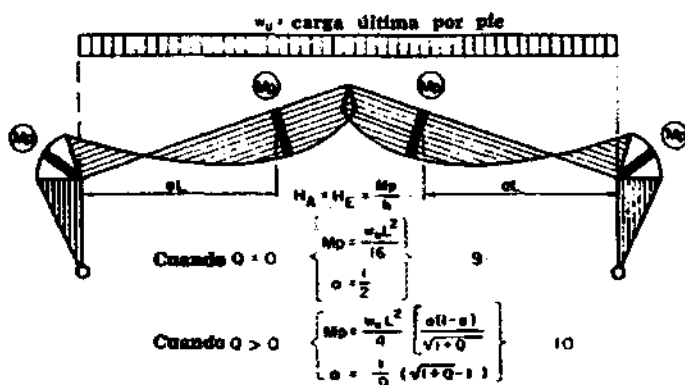
(5.8)

$$W_n = W \frac{2 \text{Sen} \theta}{1 + \text{Sen}^2 \theta}$$

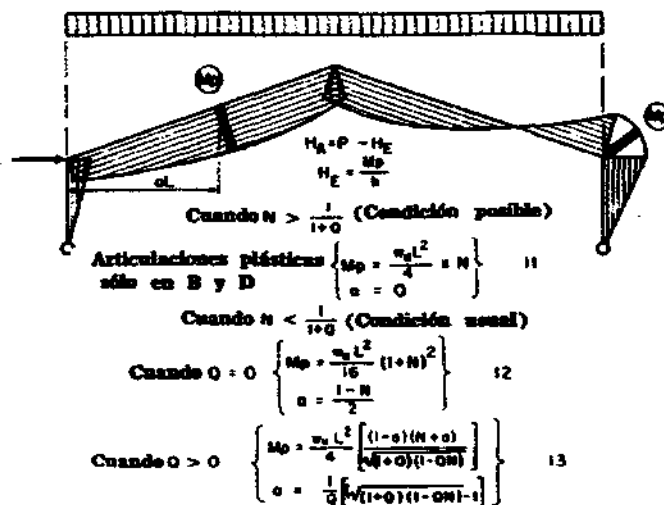
o siguiendo las recomendaciones de la ASCE, Sub-Comite 31.



(a) Definición de símbolos



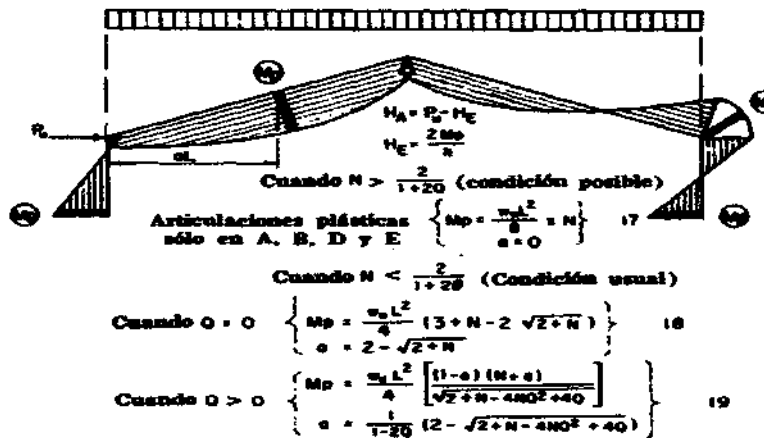
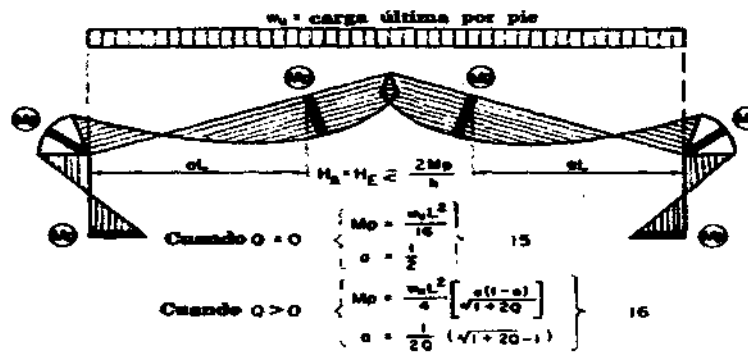
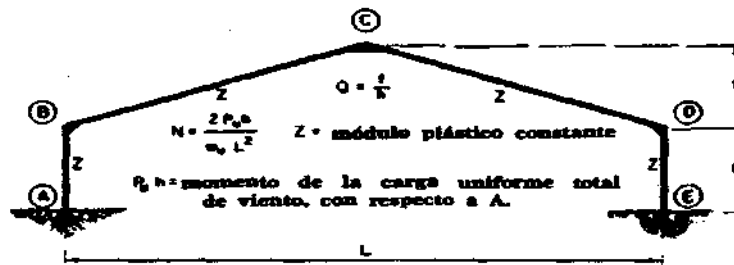
(b) Sólo carga gravitacional uniforme



(c) Carga gravitacional uniforme combinada con la carga de viento

Fórmulas de Estes para un marco articulado

Fig. 5.13



Fórmulas de Estes para un marco empotrado

Figura 5.14

6. MARCOS DE UN PISO Y DE VARIOS CLAROS.

El análisis plástico de un marco de varias crujías no es un problema más difícil que el de una sola. En algunos casos es más tedioso porque hay mayor número de modos de colapso, pero el problema sigue siendo isostático. De hecho, un marco formado por varias crujías similares, de sección y carga uniforme, es relativamente simple. Es análogo a la viga continua de varios claros similares (figura 4.4) porque sólo la crujía o el claro extremo forman un mecanismo de colapso con cargas gravitacionales. El viento que se distribuye entre tantas columnas nunca es crítico. En

realidad el viento tiende a evitar el colapso de la crujía de barlovento porque su efecto es de combar el techo hacia arriba, pero contribuye al colapso de la crujía de sotavento debido a la succión externa.

6.1 COMBINACIÓN DE MECANISMOS.

Al analizar un marco de varios claros es sumamente importante reconocer todos los mecanismos elementales posible, para combinarlos sistemáticamente, estudiando todas las posibilidades de colapso, y escoger la crítica. Con una simple inspección es usualmente posible localizar el número de articulaciones plásticas potenciales de una estructura. Estas siempre se formarán en los puntos de grandes momentos, bajo las cargas concentradas, en los nudos, etc. Naturalmente, que en una estructura hiperestática no se pueden conocer todos estos momentos por medio de la estática. En realidad, en una estructura de r grado de hiperestaticidad se requerirá al número de momentos conocidos más para igualar el número de articulaciones plásticas potenciales.

En el método del trabajo virtual para calcular M_p es necesario trabajar con mecanismos. Cada mecanismo da lugar a una ecuación de momentos. Entonces, se concluye que el número de mecanismos no es suficiente para determinar todos los momentos de las articulaciones plásticas, en la medida del grado de hiperestaticidad.

Si p representa el número de articulaciones plásticas, m el número de mecanismos elementales y r el grado de hiperestaticidad, se tiene,

(6.1)

$$p = m + r$$

Como se dijo previamente, el número de articulaciones plásticas posibles puede determinarse por inspección, mientras que el grado de hiperestaticidad se encuentra con las reglas enunciadas anteriormente. El número de mecanismo es lo importante. Por lo tanto,

(6.2)

$$m = p - r$$

Una vez identificados todos los mecanismos elementales, el objeto es combinarlos de varias maneras, hasta que se encuentre la combinación del mecanismo de colapso. Será aquel para el cual la ecuación del trabajo virtual del máximo valor de M_p . Por lo general, unas cuantas combinaciones serán suficientes.

Ejemplo 6.1.1.

El marco de un piso y dos crujiás de la figura 6.1 se diseñará con las cargas indicadas, siendo una sección constante. Como los polines tienen una separación de 20 pies, será necesario investigar el pandeo lateral.

Solución.

En un marco con esa disparidad de claros es bastante obvio que la trabe más larga será la crítica, en especial, usándose una sección constante en todas parte. De cualquier modo, raras veces será necesario analizar más combinaciones, en un marco de dos crujiás, que las que se muestran aquí.

De la siguiente figura 28 (b), $M_p = 752 \text{ Kips-pie}$. Si se añade 10% por la carga muerta, la Tabla A indica una sección **27 WF 102**. Refiérase a la figura 28(b); cada una de las tres cargas E, C y F se incrementa a $37.6 + 1.88 \times 20 \times 0.102 = 41.4 \text{ Kips}$.

El momento plástico revisado se encuentra en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta M_p(1 + 2 + 1) &= 41.4 \times 20\theta(1 + 2 + 1) \\ M_p &= 828 \text{ kips} - \text{pie} \end{aligned}$$

En la tabla A se indica que la sección **27 WF 102** proporciona un $M_p = 837 \text{ Kips-pie}$. Se investigará si esta sección es capaz de resistir el pandeo lateral. $K=5.66$; $R_y=2.8 \text{ plg}$; y $A=30.01 \text{ plg}^2$

(4.6)

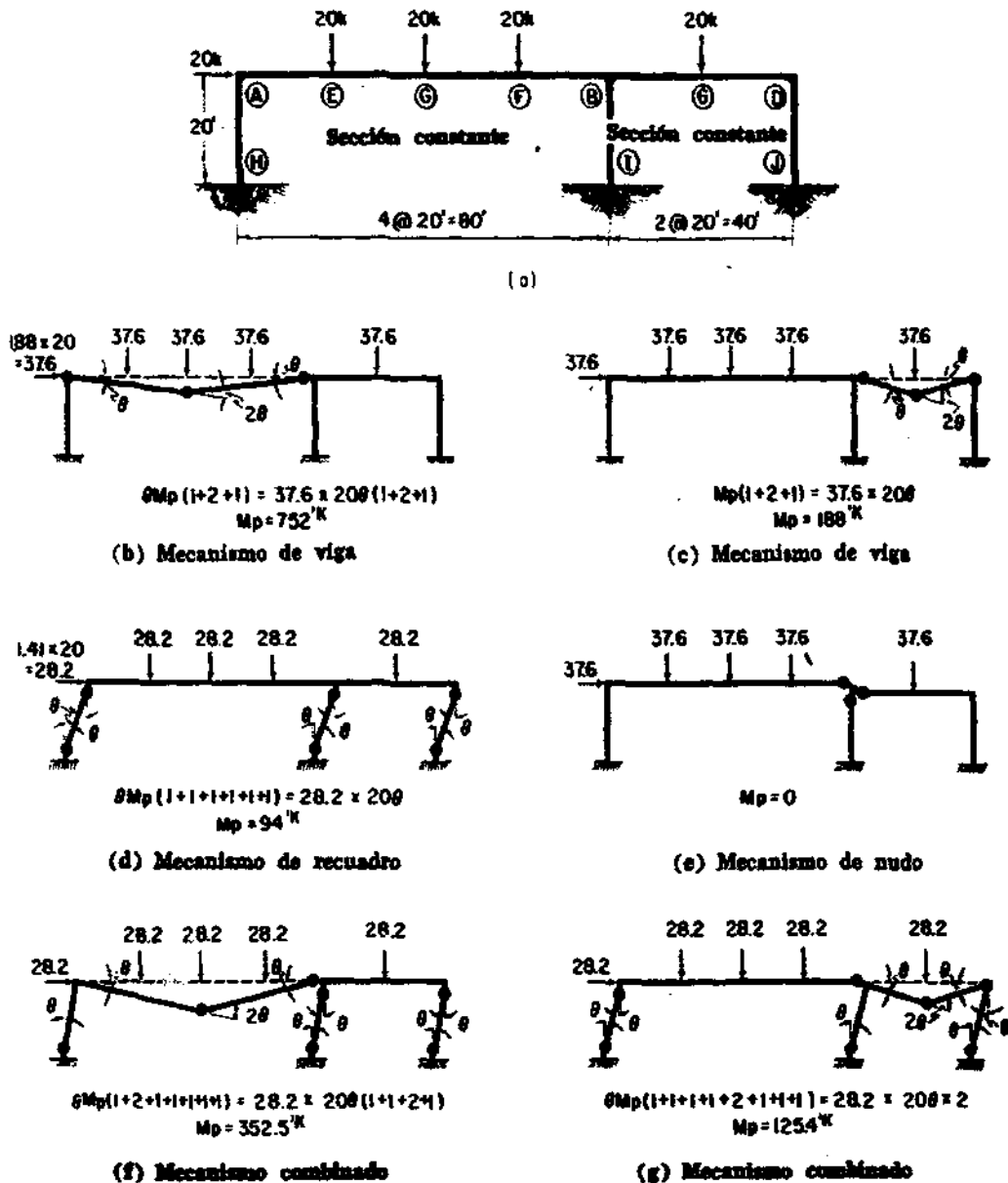
$$I_p = \frac{2.08 \times 1050 \sqrt{30.01 \times 5.66}}{266.3} = 106.9 \text{ plg} < 240 \text{ plg}$$

Pruébese una sección **21 WF 142** $A=41.7 \text{ plg}^2$; $K=15.27 \text{ plg}^4$; $S=317.2 \text{ plg}^3$ y $r_y=3.04 \text{ plg}$.

(4.6)

$$I_p = \frac{3.04 \times 1050 + 41.76 \times 15.27}{317.2} = 254 \text{ plg} > 240 \text{ plg}$$

Úsese una sección 21 WF 142



Marco de dos cruías analizado combinando mecanismos,

Fig. 6.1

Ejemplo 6.1.2.

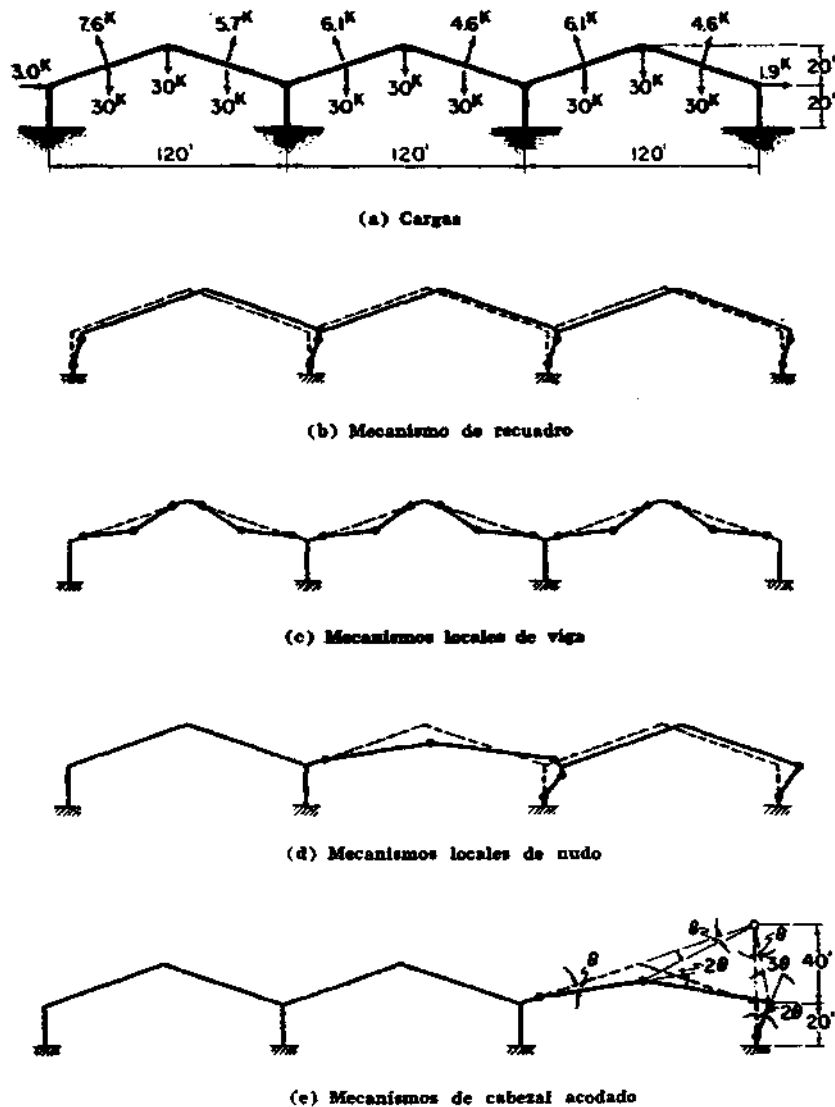
Un marco de un piso, tres crujiás y techos inclinados, se examinará para determinar el mecanismo de colapso y se diseñará con él.

Los marcos están a **20 pies**, centro a centro. La carga viva es **30 lb/pie²** horizontal y la carga muerta se tomará de **20 lb/pie²** horizontal. En esta última carga hay un margen para el peso de las trabes, etc. Las cargas de viento se calcularán de acuerdo con las recomendaciones de la ASCE, Sub-Comite 31.

Solución.

La posibilidad de que se forme una articulación en cualquiera de las columnas interiores es muy remota. En la siguiente figura 6.2.(c) se indican dieciocho articulaciones potenciales en los tres techos. Si se añaden dos en la columna de barlovento y otras dos en la de sotavento, se tienen veintidós articulaciones potenciales para el marco de tres crujiás. Un marco empotrado tiene tres elementos hiperestáticos en la base de cada columna, exceptuando una. Por lo tanto, el marco empotrado de tres crujiás tiene nueve elementos hiperestáticos y, de acuerdo con la ecuación 6.1, tiene trece mecanismos elementales. No obstante, con unos pocos tanteos se probará que las únicas combinaciones de mecanismos que merecen atención son las de los mecanismos elementales que involucren al claro de sotavento.

Hay dos razones obvias por las que el viento no es crítico en este ejemplo. En primer lugar, Si se observa la figura 6.2.(a) se ve que en un techo de poca pendiente, el viento produce una fuerza de succión que tiende a neutralizar el efecto de las cargas gravitacionales. Además, cuando el viento es crítico, se aplica Un factor de carga menor **(1.41)** en el método plástico.



Mecanismos elementales de un marco de tres crujeas.

Fig. 6.2

Refiérase a la siguiente figura 30; M_p es 846 *kips-pie*. En la Tabla A se ve que la sección más liviana que puede usarse es la 30 W 108.

6.2 PANDEO LATERAL.

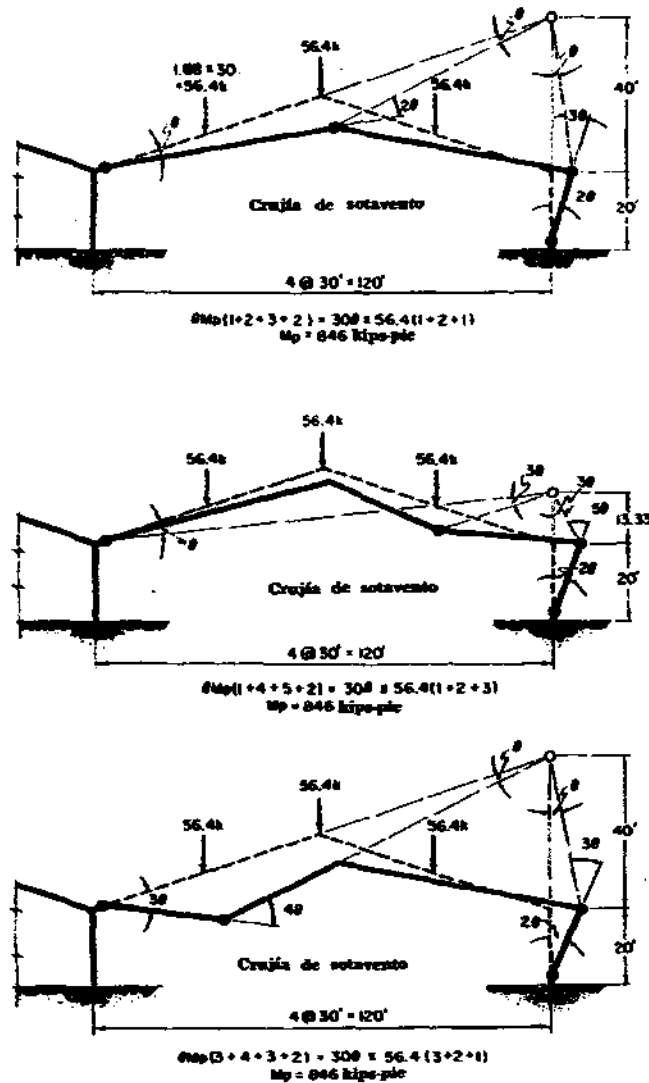
Para simplificar, los polines de este ejemplo tienen una separación de 30 *pies*. Esta separación no es realista y en la práctica se reduciría. La separación máxima de los polines para la sección anterior, puede encontrarse con la ecuación 4.6. Los datos

necesarios para la sección **30 WF 108** son los siguientes: $r_y=2.06\text{plg}$, $S=299.2\text{ plg}^3$, $A=31.77\text{ plg}^2$ y $K=5.35\text{ plg}^4$.

(4.6)

$$I_p = \frac{2.06 \times 1050 \sqrt{31.77 \times 5.35}}{299.2} = 94.2\text{ plg}$$

En consecuencia, los polines tendrán una separación de $7\frac{1}{2}$ a 8 pies.



Mecanismos críticos de un arco de tres crujeas,

Fig. 6.3

7. DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS PLÁSTICOS.

7.1 MÉTODOS DE DISTRIBUCIÓN.

Los métodos de tanteos demostrados en los artículos anteriores fueron satisfactorios para vigas continuas y para marcos de un piso y una crujía. Sin embargo, en estructuras más complicadas, aunque son aplicables, se hacen bastante tediosos. El Método de distribución de momentos plásticos, aunque también es un método de tanteos, tiene varias ventajas sobresalientes. Como es simplificar al método de Cross de distribución de momentos elásticos, es fácil que lo domine el ingeniero estructurista promedio. Además, acorta el análisis porque consiste de una secuencia, durante la

cual, el ingeniero es capaz de visualizar el resultado y predecir el modo de colapso, antes de obtener el valor final de M_p , el cual puede determinar en esta etapa, aplicando la ecuación del trabajo virtual al mecanismo de colapso indicado. Después, para corroborar, el valor de M_p encontrado con la ecuación del trabajo, se introduce en las articulaciones plásticas indicadas y se efectúa un ciclo adicional del procedimiento de distribución de momentos plásticos, para asegurarse que un momento mayor que M_p no aparezca en algún otro punto de la estructura.

Este proceso reemplaza al trazo del diagrama de momentos, de revisión definitiva.

Otra ventaja de la distribución de momentos plásticos consiste en que hace innecesario predecir, al principio, los momentos plásticos relativos de los diferentes miembros, al principio se puede suponer una sección constante, que después se revisará, conforme el proceso de balanceo de momentos revele las proporciones factibles de los momentos plásticos que se asignaran a los diferentes miembros.

7.2 COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE CROSS.

Convención de Signos. Como se dijo anteriormente, la distribución de momentos plásticos tiene algunos puntos en común con el método de Cross de distribución de momentos elásticos; de ahí su nombre. Por ejemplo, se usa la misma convención de signos. Es decir, el momento en el extremo de un miembro es positivo cuando el nudo o empotramiento tiene un giro dextrósum. Sin embargo, en la distribución de momentos plásticos se deben manejar momentos intermedios de los miembros y la convención de signos debe extenderse para cubrirlos. El momento de un punto de una viga que pertenece a un segmento de la misma que se deforma con concavidad hacia arriba (o hacia la derecha en una columna) se considerará positivo.

7.3 MOMENTOS PRELIMINARES.

En el método de Cross, los momentos preliminares de las vigas son los momentos de empotramiento perfecto producidos por las cargas y calculados por las ecuaciones que se han derivado, con este objeto, en el estudio de resistencia de

materiales. En una columna, el momento preliminar es el cortante en la columna multiplicado por la mitad de la altura de la columna.

Tantos para vigas como para columnas, el momento plástico M_p se usa como momento preliminar en la distribución de momentos plásticos y se calcula usualmente, para los diferentes miembros, con la ecuación del trabajo virtual, suponiendo colapso local de todas las vigas y colapso debido al viento para las columnas. Ocurre que la ecuación del trabajo virtual, cuando se aplica al mecanismo de recuadro para los momentos de las columnas, da un valor de M_p idéntico al momento de empotramiento perfecto de las columnas, en el método de Cross, descrito anteriormente.

Cuando la ecuación del trabajo virtual se aplica a un mecanismo de viga, el momento de la articulación intermedia queda involucrado y se usa en el procedimiento de distribución de momentos plásticos. Esto representa una de las diferencias más notables entre los dos métodos. El cálculo de los momentos preliminares se aclarará en los ejemplos siguientes.

7.4 PROCEDIMIENTO DE BALANCEO.

Cuando los momentos preliminares se anotan en el diagrama de una estructura, para iniciar el análisis por distribución de momentos plásticos, se observará que estos momentos están en equilibrio estático con las cargas aplicadas en cada miembro. Estos momentos deben balancearse, como en el caso del método de Cross, pero siguiendo diferentes reglas. En contraste con el método de Cross, en el cual el momento desbalanceado se distribuye entre los miembros concurrentes en proporción a sus factores de rigidez, cualquier método de distribución es lícito, siempre que se mantenga el equilibrio estático con las cargas aplicadas. Los factores de transporte indicados para las vigas de la tabla A, se calcularon con este objeto. Durante el primer ciclo de balanceo y en ausencia de una indicación contraria, el momento desbalanceado debe distribuirse entre los miembros concurrentes, en proporción a sus valores asignados de M_p . Es decir, cuando se supone, al principio, sección constante (práctica común en este método de análisis), todos los miembros concurrentes reciben

partes iguales del momento desbalanceado. Después de este primer ciclo de balanceo, el ingeniero tendrá, usualmente, algún objetivo en mente. Una inspección de las sumas de momentos, en este estado, puede indicar el modo de colapso. Para adaptarse a un mecanismo de colapso preconcebido o supuesto, algunos momentos necesitarán reducirse y otros aumentarse. Si en un momento dado, es conveniente al objeto del proyectista asignar todo el momento desbalanceado a un miembro, excluyendo a todos los demás, se estará dentro de las reglas, siempre y cuando los pasos descritos a continuación devuelvan el equilibrio estático a la estructura con sus cargas aplicadas.

Ecuaciones de equilibrio.

Refiérase al diagrama de momentos de la siguiente figura 7.1 (c); obsérvese que

(7.1)

$$M = Mc + \frac{1}{2}(-M_{AB} + M_{BA})$$

para los momentos producidos por las cargas gravitacionales. A M_{AB} se le asigna el signo menos para estar en concordancia con la convención de signos que se adoptó. Si se multiplican ambos lados de esta ecuación por dos, se tiene

(7.2)

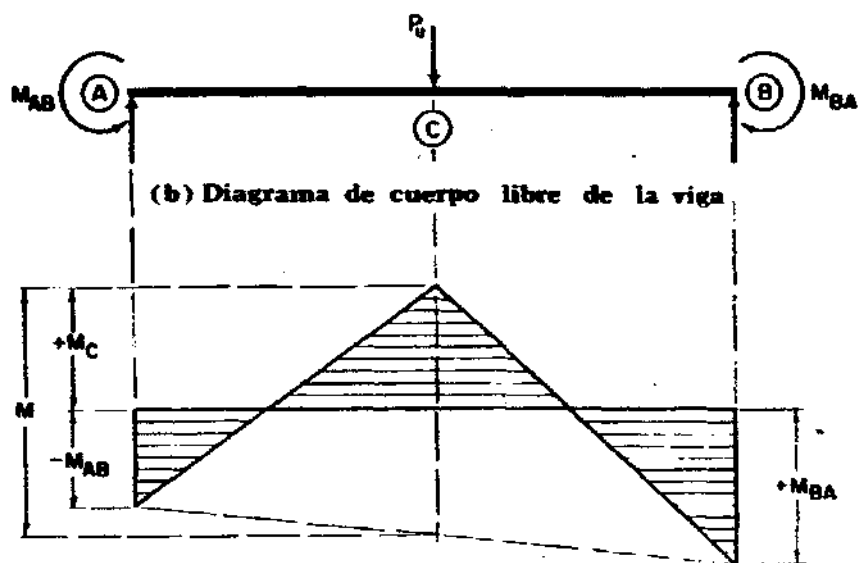
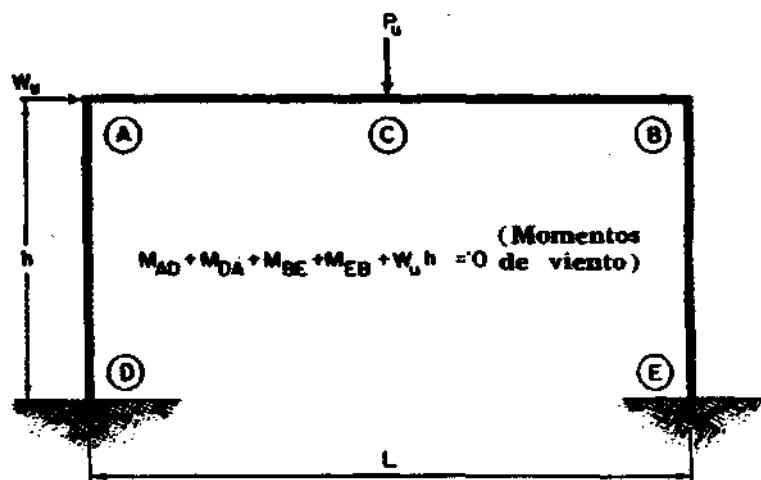
$$2M = -M_{AB} + 2M_C + M_{BA}$$

La ecuación 7.2 anterior es la de equilibrio para las vigas. El lado derecho da la interpelación entre los momentos de los dos extremos y el intermedio, tanto en magnitud como en signo. M_{AB} es inherentemente negativo. Por lo tanto, su signo menos de la ecuación 7.2 cambia a positivo con objeto de establecer la igualdad con el doble del momento de la viga simplemente apoyada. Esta relación se emplea en el siguiente artículo para establecer los factores de transporte.

La ecuación de equilibrio de las columnas, o sea el mecanismo de recuadro, se muestra en la figura 7.1 (a).

(7.3)

$$M_{AD} + M_{DA} + M_{BE} + M_{EB} + W_u h = 0$$



$$M = M_C + \frac{1}{2}(-M_{AB} + M_{BA}) \quad (\text{Momentos gravitacionales})$$

(c) Diagrama de momentos de la viga

Ecuaciones de equilibrio

Fig. 7.1

Factores de transporte. La finalidad de los factores de transporte es restaurar el equilibrio estático de los momentos, con respecto a la carga aplicada, cada vez que se balancea un nudo. Es decir, las ecuaciones 7.2 y 7.3 anteriores deben satisfacerse en todo momento.

La ecuación 7.2 es la ecuación de equilibrio de las vigas. M es el momento isostático en la articulación intermedia. Por ejemplo, es $\frac{WuL}{8}$ para una carga uniforme y $\frac{PuL}{4}$ para una carga concentrada en el centro. Véase la figura 7.1(c). Los dos momentos extremos, más el doble del de la articulación intermedia, deben ser siempre numéricamente iguales al doble del momento isostático de la articulación intermedia. Por ejemplo, refiérase a la figura 7.2 (c), los momentos del claro de la derecha son los siguientes:

$M_{BD} = -47 \text{ kips-pie}$, $M_E = +21.5 \text{ kips-pie}$ y $M_{DB} = +30 \text{ kips-pie}$, mientras que M , el momento isostático, es $1.88 \times 8 \times \frac{16}{4} = 60 \text{ kips-pie}$.

$$2 \times 60 = -(-47) + 2 \times 21.5 + 30 \text{ (corroboración)}$$

En la ecuación 7.2 anterior se observa que cualquier incremento de momento transmitido a M_u desde cualquier momento extremo, se multiplicará por dos, al sustituirse en la ecuación 7.2, con objeto de revisar. Por lo tanto, sólo debe transmitirse la mitad del incremento. Además, al tomar los signos en consideración, un incremento transmitido desde M_{AB} debe conservar el mismo signo; mientras que otro transmitido desde M_{BA} debe cambiar de signo. De nuevo, Si conviene al propósito del proyectista transmitir el incremento desde M_{AB} hasta M_{BA} , o viceversa, no se hará cambio alguno en signo o en magnitud. Las indicaciones anteriores, relativas a los factores de transporte, se condensan, a continuación, en forma tabular. La siguiente tabla siguiente se usará en combinación con dicha ecuación 7.2.

FACTORES DE TRANSPORTE PARA VIGAS

ΔM_{AB}	ΔM_C	ΔM_{BA}
1	$\frac{1}{2}$	0
0	$-\frac{1}{2}$	1
1	0	1

Tabla 7.1

La ecuación 7.3 es la de equilibrio de las columnas. Debe satisfacerse en todo momento. Las transmisiones de las columnas siempre cambiarán signos y, como ninguno de los términos de los momentos de la ecuación 7.3 se toma doble, el factor $\frac{1}{2}$ no se aplica aquí.

Es conveniente usar una columna de ΔM , la para registrar los incrementos de momento involucrados. Véase la columna encabezada con ΔM , en la figura 7.4.(c). Cualquier incremento de momentos añadido en los capiteles de las columnas, durante el proceso de balanceo, debe transmitirse a las bases (en marcos empotrados) con signos opuestos. Entonces, como revisión, cada vez que un incremento de momentos se registre durante el proceso de balanceo, debe anotarse también en la columna ΔM . Esta debe sumar cero. La manera en la cual los incrementos de momentos, en los capiteles de las columnas, se distribuyan en las bases, es arbitraria y puede hacerse en cualquier proporción. que convenga al propósito del proyectista, siempre y cuando la columna de ΔM sume cero.

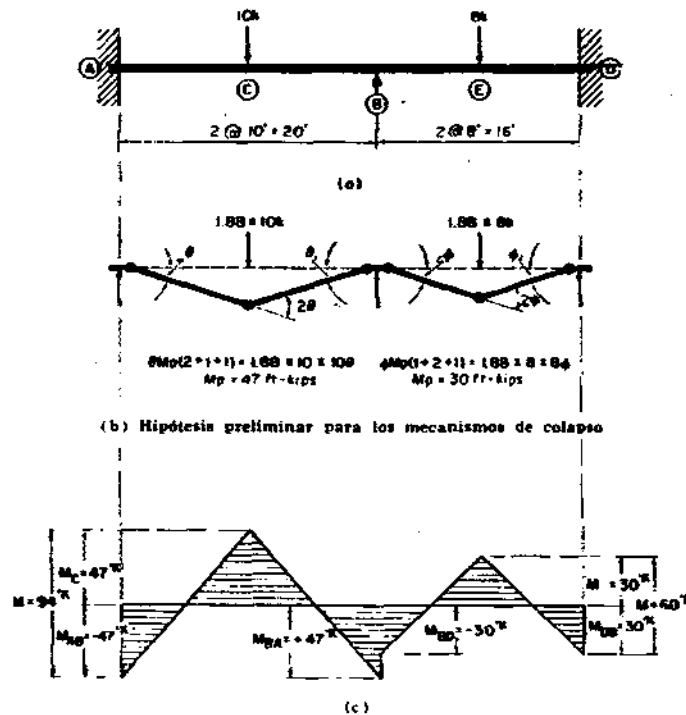
Las indicaciones anteriores, por lo que respecta a la ecuación 7.3, se refieren a marcos empotrados. Para marcos articulados en sus bases, los términos de momentos de la ecuación 7.3, que se aplican a las bases de las columnas, se hacen cero y deben efectuarse transmisiones, con cambio de signo, a los capiteles de las columnas adyacentes.

EJEMPLO 7.4.1.

Una viga continua de dos tramos, empotrada en ambos extremos y que soporta una carga concentrada en el centro de cada claro, se analizará con el método de distribución de momentos plásticos. Véase la figura 7.2(a). Se requiere el mecanismo de colapso y M_p . Supóngase una sección constante en los dos claros.

Solución.

En el primer paso se considera que cada viga forma un mecanismo local de colapso [figura 7.2(b)] y se aplica la ecuación del trabajo virtual para obtener los valores de M_p de los dos claros. Estos valores se usan como momentos preliminares y se anotan bajo una línea que representa a la viga. Véase el renglón (1), figura 7.3(a),(b) y (c). Entonces, para la viga AB.



Momentos preliminares.

Fig. 7.2

(7.4.)

$$\theta M_p(1 + 2 + 1) = 10\theta \times 10 \times 1.88$$

$$M_p = 47 \text{ kips} - \text{pie}$$

para la viga **BC**,

(7.5)

$$\phi Mp(1 + 2 + 1) = 8\phi \times 8 \times 1.88$$

$$Mp = 30 \text{ kips} - \text{pie}$$

El segundo paso consiste en balancear el nudo B. Refiérase a la figura 7.2 (a); el nudo tiene **-17 kips-pie** desbalanceados, que pueden distribuirse entre los dos tramos en cualquier proporción que convenga para llegar al mecanismo de colapso, siempre y cuando el procedimiento de transmisiones siguiente mantenga el equilibrio estático respecto al momento isostático M de ambos claros. En este simple problema, el proyectista con experiencia concluirá de antemano que el claro mayor y con la carga más pesada, proporcionará el mecanismo de colapso y balanceará el nudo **B** en forma apropiada. Esto requiere conservar intacto el M_p de **47 kips-pie**, del claro **AB**. Para lograrlo, el momento desbalanceado total (**-17 kips-pie**) debe ser asignado al claro **BD**.

El método de transmitir el incremento de momento anterior es también arbitrario, siempre y cuando restaure el equilibrio. En la figura 7.3 se muestran tres diferentes maneras de aplicar el factor de transmisión. En la primera, la mitad del incremento de momento se transmite a **E**; en la segunda todo se transmite a **D** y en la tercera, el incremento de momento se divide en dos partes arbitrarias, en este caso, **12** y **5**. La mitad de **12** se transmite a **E** y **5** se transmite a **D**. Obsérvese que los valores finales de M_{BD} , M_E y M_{DB} satisfacen la ecuación 7.4.2. Es decir,

$$2M = 120 = -(-47) + 2 \times 24 + 25 \text{ (corroboración)}$$

El mecanismo de colapso se muestra en la figura 7.3 (d) y la viga se diseñará para un M_p de **47 kips-pie**.

	(A)	(C)	(B)	(E)	(D)
(1)	-47	+47	+47	-30	+30
(2)				-17	-8.5
(3)	$\overline{-47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{-47'K}$	$\overline{+21.5'K}$

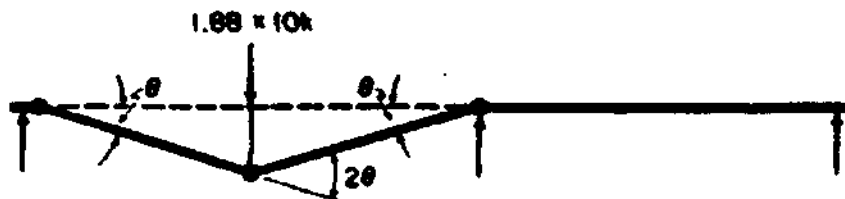
(a) Distribución de momentos plásticos- Primera forma

	(A)	(C)	(B)	(E)	(D)
(1)	-47	+47	+47	-30	+30
(2)				-17	-17
(3)	$\overline{-47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{-47'K}$	$\overline{+13'K}$

(b) Segunda forma

	(A)	(C)	(B)	(E)	(D)
(1)	-47	+47	+47	-30	+30
(2)				-17	-5
(3)	$\overline{-47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{+47'K}$	$\overline{-47'K}$	$\overline{+24'K}$

(c) Tercera forma



$$\theta M_p (1 + 2 + 1) = 1.88 \times 10 \times 100$$

$$M_p = 47 \text{ kips-ft}$$

(d) Mecanismo de definitivo de colapso

Fig. 7.3

Ejemplo 7.4.2.

El análisis y diseño del marco rectangular, articulado, que se muestra en la figura 7.4 (a), se hará con la distribución de momentos plásticos.

Solución.

Se usará una sección uniforme y, suponiendo que el viento participará en el mecanismo de colapso, se empleará el factor de carga menor (1.41).

Los momentos preliminares de la viga son los siguientes [refiérase a la figura 7.4 (b)]:

$$\theta Mp(1+2+1) = 20\theta \times 1.41 \times 40$$

$$Mp = 282 \text{ kips} - \text{pie.}$$

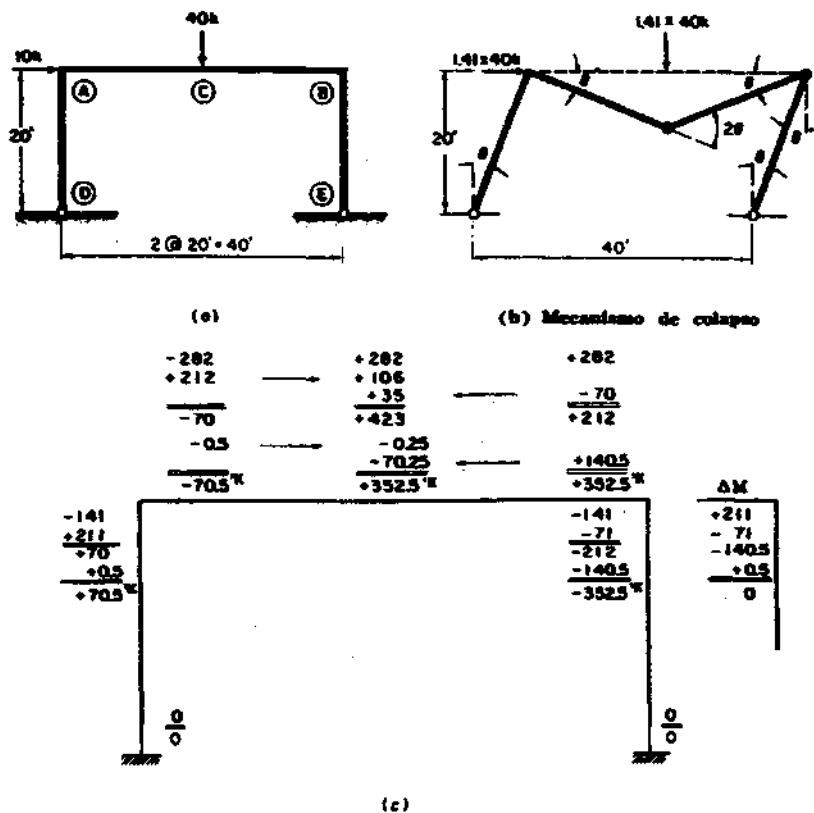


Fig. 7.4

y de las columnas,

$$M_p = \frac{20 \times 1.41 \times 10}{2} = 141 \text{ kips} - \text{pie.}$$

La figura 7.4(c) muestra dos ciclos de distribución de momentos plásticos. El primer ciclo termina con el balanceo de momentos en ambos nudos y no incluye las correcciones de los momentos de las columnas para hacer la columna ΔM igual a cero. Antes de empezar el segundo ciclo todos los momentos se suman y se subrayan con una línea doble. El estudio de estas sumas indica el mecanismo de colapso mostrado en la figura 7.4 (b). M_p se calcula con este mecanismo.

$$\theta M_p(2+1+1) = \theta(20 \times 1.41 \times 10 + 20 \times 1.41 \times 40)$$

$$M_p = 352.5 \text{ kips} - \text{pie.}$$

El primer paso del segundo ciclo consiste en hacer las correcciones apropiadas a los momentos de las columnas, para que resulte un momento de **-352.5 kips-pie** en **B** y, al mismo tiempo, que resulte cero la columna ΔM . Esto se logra añadiendo **-140.5 kips-pie** en **B** y **+0.5 kips-pie** en **A**. Este paso origina otra operación de balanceo de nudos la cual completará el problema, si se escogió el mecanismo correcto de colapso. Los momentos finales se subrayan con una línea doble. (Usando 2.5)

$$S = \frac{352.5 \times 12}{1.14 \times 33} = 112.4 \text{ plg}^3$$

Una **21 WF 62** sería adecuada si también pasara una investigación del pandeo lateral que, en este ejemplo no se hará.

Ejemplo 7.4.3.

Se muestra a continuación, en la siguiente figura 7.5, el diseño de un marco empotrado, simétrico, de dos crujiás.

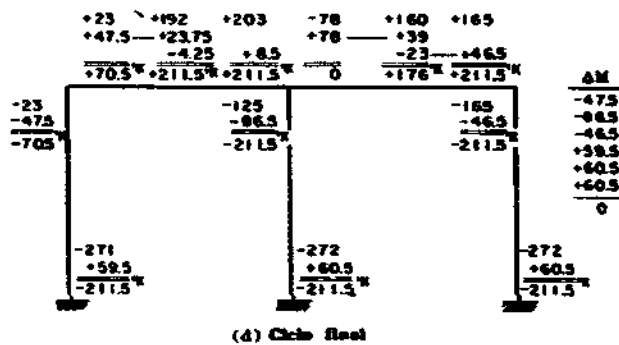
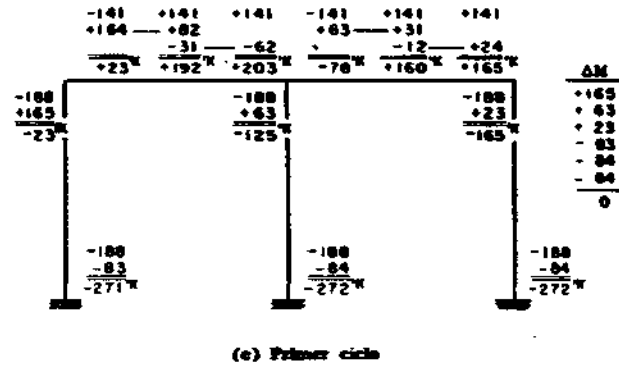
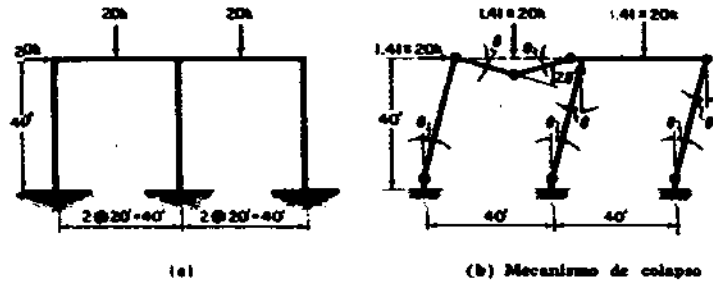
Solución.

Los momentos preliminares de las vigas son $\frac{PuL}{8} = \frac{1.41 \times 20 \times 40}{8} = 141 \text{ kips} - \text{pie}$ y

los de las columnas, $\frac{40 \times 1.41 \times 20}{6} = 188 \text{kips} - \text{pie.}$

Los grandes momentos en las bases de las columnas, al final del primer ciclo, indican que las articulaciones plásticas se formaran ahí y por lo tanto el viento participa en el momento plástico final ***M_p***. Esto justifica el uso del menor factor de carga de **1.41**, en el cálculo de los momentos preliminares del primer ciclo. Una inspección de los tamaños relativos de los momentos de las vigas indica el mecanismo de colapso de la figura 7.5 (b).

El momento plástico ***M_p*** se calculará con la figura 6.2(b) y se probará en un segundo ciclo de distribución de momentos plásticos.



Análisis de un marco de dos cruías con el método de distribución de momentos plásticos.

Fig. 7.5

Entonces:

$$\theta Mp(1+2+1+1+1+1+1) = \theta(40+20) \times 1.41 \times 20 + \theta \times 20 \times 1.41 \times 20$$

$$Mp = 211.5 \text{ kips-pie.}$$

En el ciclo final de la figura 7.5 (d) resulta evidente que no hay, en todo el marco, un momento mayor que **211.5 kips-pie.** (Usando 2.5).

$$S = \frac{211.5 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 67.54 p \lg^3$$

Una **16 WF 45** sería adecuada si también pasara una investigación del pandeo lateral y del efecto del cortante.

Solución.

Refiérase a las figuras 6.1 (b) y (c); los momentos preliminares son **752 kips-pie** y **188 kips-pie**, respectivamente, para las vigas mayor y menor. Se supondrá en este caso, como en el ejemplo 6.1.1, que debido a la disparidad de los dos claros y a que se está usando sección uniforme, el mecanismo de colapso se localizará en la viga **AB**. Entonces el viento no participará en el final **M_p**, y, por lo tanto, se usará el factor de carga de **1.88**. En consecuencia, los momentos preliminares de las columnas son

$$\frac{20 \times 1.88 \times 20}{6} = 125 \text{ kips} - \text{pie}.$$

Aunque los dos ciclos de distribución de momentos pudieron haberse completado en un diagrama, como se hizo en el ejemplo 7.4.2, es menos confuso, en este ejemplo, usar dos diagramas. Entonces, las sumas de momentos del primer ciclo se convierten en los momentos preliminares del ciclo final y, consecuentemente, se registran en un segundo diagrama del marco.

Refiérase al ciclo final; si el modo de colapso supuesto en la figura 7.6 (b) es el correcto, el momento **M_{BA}** debe ser el momento plástico **+752 kips-pie**. Por lo tanto, se le hace llegar a ese valor añadiéndole la cantidad necesaria, o sean **+146 kips-pie**. Análogamente, el momento **M_{AB}** debe ser **-752 kips-pie**, lo que requiere la adición de **-438 kips-pie** en ese nudo. Una vez efectuados los necesarios balanceos y transportes, se encuentra que **M_C** también es **+752 kips-pie** (uno de los requisitos) y que este valor de **M_p** no se excede en ningún punto del marco. Este es el requisito final para justificar el supuesto modo de colapso. (Usando 2.5)

$$S = \frac{752 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 240.0 \text{ in}^3$$

Una **24 WF 100** sería suficiente si también pasara una investigación del pandeo lateral y del efecto del cortante.

Ejemplo 7.4.5.

Para mayor economía y para demostrar más ampliamente la adaptabilidad del método de distribución de momentos plásticos, la columna de barlovento y la viga mayor, adyacente, del ejemplo 7.4.4, tendrán asignado un valor de **2Mp**; los otros miembros permanecerán con **Mp**. Los datos restantes son los mismos de los ejemplos 6.1.1 y 7.4.4.

Solución.

De nuevo, se supondrá que el modo de colapso será el mecanismo de la viga mayor, sin participación del viento. En consecuencia, se usará el factor de carga de **1.88** y el valor de **Mp**, se encuentra por medio de la siguiente figura 7.7 (b):

$$\theta mp(1+2+1) \times 2 = 20\theta \times 37.6(1+2+1)$$

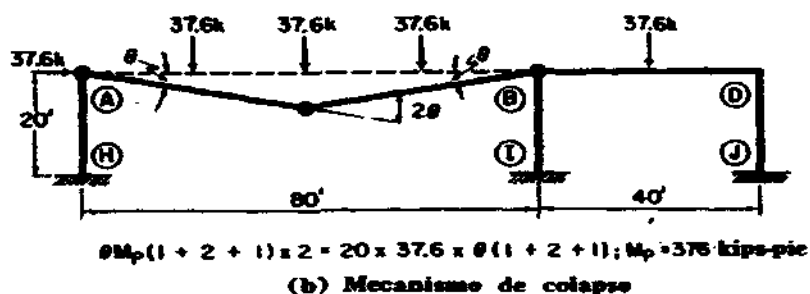
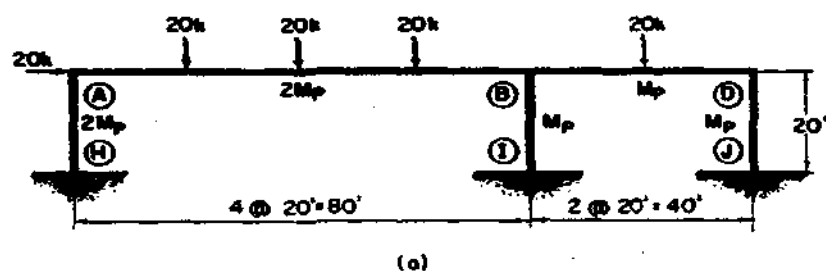
$$Mp = 376 \text{ kips-pie.}$$

En este ejemplo, a la viga mayor se le asignó un valor de **2Mp**. Por lo tanto, $2 \times 376 = 752 \text{ kips-pie}$ se registran y conservan constantes en la viga **AB**. El momento preliminar de la viga **BD** es $\frac{37.6 \times 40}{8} = 188 \text{ kips-pie}$. Los de las columnas se calculan con la ecuación 7.3, tomando la columna de barlovento el doble de las otras. Véase la figura 7.7 (c).

Obsérvese que cuando el nudo **B** se balancea añadiendo respectivamente **-188 kips-pie** y **-282 kips-pie** a la viga y a la columna, esos dos momentos, **M_{BD}** y **M_{BI}** se convierten en el valor de **Mp** calculado previamente. Obsérvese además que, cuando se efectúan los restantes balanceos y transmisiones, no hay momentos que excedan los límites. Por ejemplo, si el momento **M_{HA}** hubiera excedido **-752 kips-pie**, o si los momentos de **I** o **J** hubieran excedido **-376 kips-pie**, hubiera sido una indicación de que el modo de colapso sería la combinación del mecanismo de la viga mayor y del de recuadro. Se hubiera tenido que efectuar otra operación de distribución de momentos, basada en el valor revisado de **Mp**.

La sección **24 WF 100** se seleccionaría para la columna de barlovento y para la viga **AB**. Para los Otros miembros. (Usando 2.5)

$$S = \frac{376 \times 12}{1.14 \times 33.0} = 120.0 \text{ plg}^3$$



$\theta M_p(1 + 2 + 1) \times 2 = 20 \times 37.6 \times \theta(1 + 2 + 1); M_p = 376 \text{ kips-pie}$

	-188	$+188$	$+188$	
	-188	-94	-47	
		$+23$	-47	
		-376	$+117$	$+141$
	-752	$+752$	$+752$	ΔM
-188		-94	-94	$+940$
$+940$		-282	-47	-282
$+752$		-376	-141	-47
	-188		-94	-305
	-305		-153	-153
	-493		-247	-153
			-247	0

(c)

Marco de sección variable.

Fig. 7.7

Una sección **21 WF 62** se escogería para la viga menor y para las columnas **BI** y **DJ** si pasara la revisión del pandeo lateral y del efecto del cortante. También la flecha podría ser crítica en una viga tan larga.

Este diseño resulta en un ahorro de aproximadamente 3 000 lb por marco, sobre esos de los ejemplos 6.1.1 y 7.4.4. Sin duda alguna, parte de este ahorro se perdería en la conexión más cara de **B**.

8. CONEXIONES SOLDADAS.

Aunque la soldadura moderna existe desde hace un buen número de años, sólo ha llegado a ser lo que es, durante las últimas décadas, en su aplicación a la Ingeniería de Estructuras, comprendidos edificios y puentes. La adopción de soldadura estructural fue muy lenta durante varias décadas, porque muchos ingenieros pensaban que la soldadura tenía dos grandes desventajas:

- 1.- Que las soldaduras tenían poca resistencia a la fatiga, en comparación con las conexiones remachadas.
- 2.- Que era imposible asegurar una alta calidad de soldadura si no se contaba con una inspección irracionalmente amplia y costosa.

8.1 VENTAJAS DE LA SOLDADURA.

Actualmente es posible hacer uso de las muchas ventajas que la soldadura ofrece, ya que los temores de fatiga e inspección han sido eliminados casi por completo. Algunas de las muchas ventajas de la soldadura, se presentan en los párrafos siguientes:

1. Para la mayoría de la gente, la primera ventaja está en el área de la economía, porque el uso de la soldadura permite grandes ahorros en el peso del acero utilizado. Las estructuras soldadas permiten eliminar un gran porcentaje de las placas de unión y de empalme, tan necesarias en las estructuras remachadas o apernadas, así como la eliminación de las cabezas de remaches o tornillos. En algunas estructuras de puente es posible ahorrar hasta un 15 por ciento o más del peso de acero con el uso de soldadura. La soldadura también requiere un trabajo apreciablemente menor que el necesario para el remachado, porque un soldador puede reemplazar a la cuadrilla normal remachadora de cuatro hombres.
2. La soldadura tiene una zona de aplicación mucho mayor que el remachado o apernado: Considérese una columna de tubo de acero y las dificultades para conectarla a los otros miembros de acero, con remaches o pernos. Una conexión remachada o apernada puede ser virtualmente imposible, pero una conexión soldada, cualquiera que sea, no presentará dificultades. El lector puede visualizar muchas otras situaciones similares, donde la soldadura tiene decidida ventaja.
3. Las estructuras soldadas son estructuras más rígidas, porque los miembros normalmente están soldados directamente uno a otro. Las conexiones para estructuras remachadas o apernadas, se realizan a menudo a través de ángulos de conexión o placas que se deforman debido a la transferencia de carga, haciendo más flexible a la estructura completa. Por otra parte, la mayor rigidez puede ser una desventaja donde se necesiten conexiones extremas simples, con baja resistencia a los momentos. En tal caso, el calculista debe tener cuidado de especificar el tipo de junta.

4. El proceso de fusionar las partes por unir, hace a las estructuras realmente continuas. Esto se traduce en construcción de una pieza y puesto que las juntas soldadas son tan fuertes o más que el metal base, no se presentan restricciones en las uniones. Esta ventaja de la continuidad ha permitido la erección de un sin fin de estructuras de acero estáticamente indeterminadas, esbeltas y agraciadas, en todos los Estados Unidos. Algunos de los más prominentes defensores de la soldadura se han referido a las estructuras remachadas y apernadas, con sus pesadas placas y gran número de remaches o pernos, como semejando tanques o carros blindados, al compararlas con las limpias y suaves líneas de las estructuras soldadas.

5. Es más fácil realizar cambios en el diseño y corregir errores durante el montaje (y a menor costo), si se usa soldadura. Con relación a esta ventaja se tiene el caso de las reparaciones realizadas con soldadura en equipo militar en condiciones de batalla durante las décadas pasadas.

6. Otro detalle que a menudo es importante es el silencio al soldar. Imagínese la importancia de este hecho cuando se trabaja cerca de hospitales o escuelas, o cuando se realizan adiciones a edificios existentes. Cualquiera que tenga un oído cercano a lo normal, que haya intentado trabajar en una oficina a pocos cientos de pies de un trabajo de remachado, estará de acuerdo con esta ventaja.

7. Se requieren menos precauciones de seguridad para el público en áreas congestionadas en comparación con las necesarias para una estructura remachada donde el lanzamiento al aire de los remaches calientes es indispensable.

Se usan menos piezas y, como resultado, se ahorra tiempo en detalle, fabricación y montaje en la obra.

8.2 CLASIFICACIÓN DE SOLDADURAS.

Existen tres clasificaciones para las soldaduras, mismas que se describen en los siguientes párrafos, están basadas en el tipo de soldadura realizada, posición de las soldaduras y tipo de junta.

Tipo de soldadura. Los dos tipos principales de soldaduras son las soldaduras de filete y las soldaduras a tope (también conocidas como soldaduras con bisel). Existen además las soldaduras de tapón y de ranura, que no son comunes en el trabajo estructural. Estos cuatro tipos de soldadura se muestran en la figura 8.1.

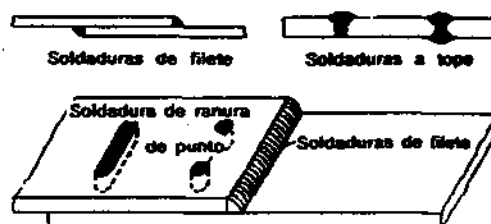


Fig. 8.1

Las soldaduras de filete han mostrado ser más débiles que las soldaduras a tope; sin embargo, la mayoría de las conexiones estructurales se realizan con soldaduras de filete. Cualquier persona que haya tenido experiencia en estructuras de acero entenderá él por qué las soldaduras de filete son más comunes que las soldaduras a tope. Las soldaduras a tope se usan cuando los miembros que se conectan están alineados en el mismo plano. Usarlas en cualquier situación implicaría un ensamble perfecto de los miembros por conectar, cosa que desgraciadamente no sucede en la estructura común y corriente. Muchos lectores han visto a los operarios

tirando de y golpeando miembros de acero para ponerlos en posición. Cuando se pueden traslapar los miembros de acero, son permisibles tolerancias mayores en el montaje, siendo las soldaduras de filete las que se utilizan. Sin embargo, las soldaduras a tope son bastante comunes en muchas conexiones tales como los empalmes en columnas y las conexiones de patines de vigas a columnas, etc. Una soldadura de tapón es una soldadura circular que une dos piezas, en una de las cuales se hace la o las perforaciones necesarias para soldar. Una soldadura de relleno es una soldadura formada en una muesca o agujero alargado que une un miembro con otro miembro a través de la muesca. La soldadura puede llenar parcial o totalmente la muesca. Estos tipos de juntas pueden utilizarse cuando los miembros se traslapan y la longitud del filete de soldadura no puede obtenerse. También pueden utilizarse para unir parte de un miembro como en el caso de tener que fijar las cubreplacas en un miembro compuesto.

Posición. De acuerdo a su posición se clasifican como: planas, horizontales, verticales y sobre cabeza, siendo las planas las más económicas y las sobre cabeza las más costosas. Aunque las soldaduras planas pueden realizarse a menudo con máquinas automáticas, la mayoría de la soldadura estructural se realiza a mano. Se ha indicado previamente que no es necesaria la fuerza de gravedad para realizar buenas soldaduras, pero sí puede acelerar el proceso. Las gotitas de los electrodos fundidos pueden ser forzadas en las soldaduras por la cara inferior contra la fuerza de gravedad y obtenerse buenas soldaduras, pero éstas son lentas y costosas, por lo que en lo posible deben evitarse. En la figura 8.2 se muestran los diferentes tipos de soldadura.

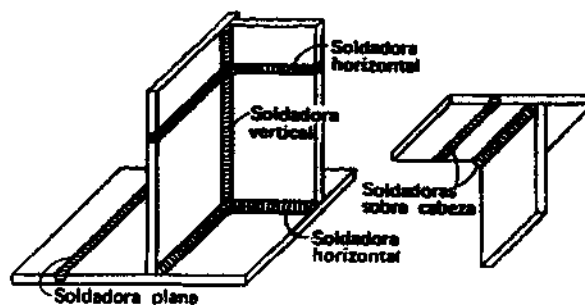


Fig. 8.2

Tipo de junta. Las soldaduras puede también clasificarse de acuerdo con el tipo de junta usando; a tope, traslapada en tee, de asiento, de canto, en esquina, etc. Esos tipos de juntas se muestran en la figura 8.3.

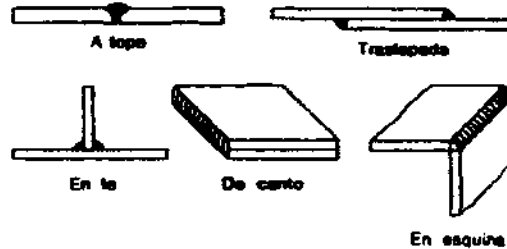


Fig. 8.3

Resistencia de las soldaduras de filete:

Para esta exposición se hace referencia a la figura 8.4. Como se indicó previamente, el esfuerzo en una soldadura se considera igual a la carga P dividida entre el área de la garganta de la soldadura. Este método para determinar la resistencia de soldaduras de filete, se usa sin tomar en cuenta la dirección de la carga. Las pruebas han demostrado que los filetes transversales son un tercio más resistentes que los filetes longitudinales, pero este hecho no es reconocido por la mayor parte de las especificaciones, con el fin de simplificar los cálculos. Una razón del por qué los filetes transversales son más fuertes, es que el esfuerzo está más uniformemente repetido en su longitud total, mientras que en los filetes longitudinales se reparte en forma dispareja debido a deformaciones que varían a lo largo de la soldadura. Otra razón para su mayor resistencia la dan las pruebas que muestran que la rotura ocurre a un ángulo diferente de 45° , dándoles un área de garganta efectiva mayor.

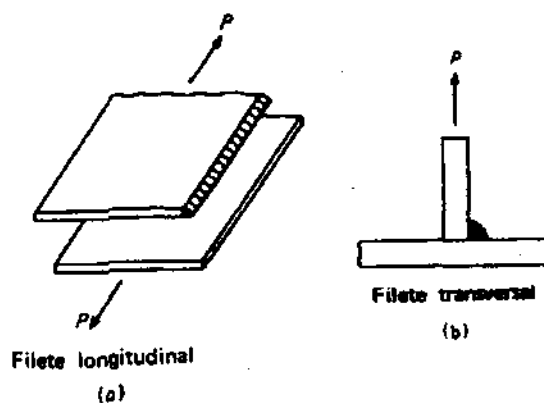


Fig. 8.4

Requisitos del AISC.

Los esfuerzos cortantes permisibles para diversos electrodos y metales base los da el AISC en la tabla 1.5.3 de las especificaciones y aquí se reproducen en la tabla 8.1. En dicha tabla se muestran además las principales especificaciones ASTM relativas a los mismos, están incluidos los electrodos clasificados como E60XX, E70XX, E80XX, E90XX, E100XX y E110XX y que se usan para diferentes grados de acero.

Tipos de esfuerzos	Esfuerzos permisibles	Electrodo requerido	Metal base
Tensión o compresión paralela al eje del cordón de soldadura a tope de penetración total.	Mismo que el metal base		
Tensión perpendicular a la garganta efectiva de soldadura a tope de penetración total	Mismo que para el esfuerzo de tensión del metal base		
Compresión perpendicular a la garganta efectiva de la soldadura a tope de penetración parcial o total	Mismo que para el esfuerzo de compresión del metal base		
Cortante en la garganta efectiva de la soldadura a tope de penetración total	Mismo que para el esfuerzo cortante del metal base		
<i>Esfuerzo cortante en la garganta efectiva de una soldadura de filete o una soldadura de ranura (a tope) de penetración parcial, independiente de la dirección de aplicación de la carga; tensión perpendicular al eje de la garganta efectiva de una soldadura a tope de penetración parcial y esfuerzo cortante sobre el área efectiva de soldaduras de tapón o de ranura.</i> <i>Los esfuerzos señalados se aplicarán a soldaduras hechas con electrodo especificado fabricado con un acero que tenga un límite de fluencia del metal base. Los esfuerzos permisibles independientemente de la clasificación del electrodo usado, no excederán de los definidos como máximos permisibles para el metal base menos resistente que se va a soldar</i>	18.0 ksi (1,265 kg/cm ²)	AWS A5.1, electrodo E60XX AWS A5.17, combinación de electrodo y fundente F6X-EXXX AWS A5.20, electrodo E60T-X	A500, grado A A570, grado D
	21.0 ksi (1,475 kg/cm ²)	AWS A5.1 ó A5.5, electrodos E70XX AWS A5.17, combinación electrodo-fundente F7X-EXXX AWS A5.18 electrodos E70S-X ó E70U-1 AWS A5.20, electrodos E70T-X	A36 A53, grado B A242 A375 A441 A500, grado B A501 A529 A570, grado E A572, grados 42 a 60 A588
	24.0 ksi (1,680 kg/cm ²)	AWS A5.5, electrodos E80XX Grado 80. Arco sumergido, soldadura al arco metálico protegido por gas o soldadura con electrodo tubular con núcleo de fundente	A572, grado 65

Tala 8.1

Tabla 8.1 (cont.)

Clase de esfuerzo	Esfuerzo permisible	Electrodo requerido	Metal base
	27.0 ksi (1,890 kg/cm ²)	AWS A5.1, electrodo E90XX Soldadura arco sumergido grado 90 soldadura arco metálico protegido con gas Soldadura de electrodo tubular con núcleo de fundente	A514 en espesores mayores de 2½"
	30.0 ksi (2,100 kg/cm ²)	AWS A5.5, electrodo E100XX soldadura arco sumergido grado 100, soldadura al arco metálico protegido por gas. Soldadura electrodo tubular con núcleo de fundente	A514 en espesores mayores de 2½"
	33.0 ksi (2,310 kg/cm ²)	AWS A5.5, electrodo E110XX soldadura arco sumergido grado 110, soldadura al arco metálico protegido con gas, electrodo tubular con núcleo de fundente	A514 en espesores menores de 2½"

En este sistema de clasificación, la letra *E* representa electrodo, mientras que el juego de dígitos (como 80, 100) representa la resistencia a la tensión mínima del metal base en ksi, el resto de los números representan, la posición para soldar, corriente, polaridad etc. información que se requiere para el uso correcto del electrodo clasificado.

En adición a los esfuerzos permisibles dados en la tabla 8.1 existen algunas recomendaciones del AISC aplicables a la soldadura, entre las más importantes que se tienen son:

1. La longitud mínima de una soldadura de filete no debe ser menor de 4 veces la dimensión nominal del lado de la soldadura. Si su longitud real es menor de este valor, el grueso de la soldadura considerada efectiva debe reducirse a $\frac{1}{4}$ de la longitud de la soldadura.

2. El grueso máximo de una soldadura de filete, para material de $\frac{1}{4}$ in., es $\frac{1}{4}$ in. Para material más grueso, no debe ser mayor que el espesor del material, menos $\frac{1}{16}$ in., si es que la soldadura no se arregle especialmente para dar un grueso completo de la garganta.

3. Los gruesos mínimos de soldaduras de filete están dados en la tabla 1.17.5 de las especificaciones AISC, y varían de $\frac{1}{16}$ in. para $\frac{1}{4}$ in. o menos de espesor de material, hasta $\frac{5}{16}$ in. para material con espesor mayor de 6 ft. El grueso práctico mínimo para soldadura es aproximadamente $\frac{1}{8}$ in., y el grueso que probablemente es más económico es de alrededor de $\frac{5}{16}$ in. La soldadura de $\frac{5}{16}$ in. es el grueso máximo que debe realizarse manualmente en una pasada.

4. Cuando sea posible, deben realizarse vueltas en el extremo (REMATES) para soldaduras de filete, como se muestra en la figura 8.5. La longitud de estas vueltas no debe ser menor que dos veces el grueso nominal de la soldadura. Cuando no se usan, se considera buena práctica por muchos calculistas, restar el doble del grueso, de la soldadura de la longitud efectiva de ella. Las vueltas de extremo son muy útiles en la reducción de concentraciones de esfuerzos que ocurren en los extremos de las soldaduras, particularmente para conexiones donde hay vibración considerable y

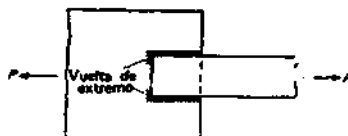


Fig. 8.5

excentricidad en la carga. El AISC establece (según 1.14.7) que la longitud de una soldadura de filete incluirá las longitudes de remate.

5. Cuando las soldaduras de filete se utilizan solas para la conexión de placas o barras, su longitud no debe ser menor que la distancia perpendicular entre ellas. Además, la distancia entre soldaduras de filete no debe ser mayor de 8 in. para conexiones de extremo, con excepción de cuando la flexión transversal se impide de algún modo.

Diseño de soldaduras de filete:

La resistencia o diseño de diversas soldaduras de filete se considera en los ejemplos incluidos en esta sección. Un punto principal por recordar en la selección de soldaduras es la conveniencia de seleccionar las más sencillas. La habilidad del soldador tiene un efecto principal en la resistencia de las soldaduras particularmente difíciles, como son las soldaduras sobre cabeza y aún soldaduras verticales. Se requiere un excelente soldador para realizar un buen trabajo para estas soldaduras, mientras que el soldador promedio puede realizar buen trabajo con las soldaduras más sencillas.

Los ejemplos 8.1.1, 2, 3 ilustran los cálculos para soldaduras simples de filete. En estos y otros problemas, las longitudes de las soldaduras se seleccionan al $\frac{1}{4}$ in. más próximo, porque un trabajo más preciso no es de esperarse ni en el taller ni en la obra. Puede que haya una pregunta en la mente del lector referente a las soldaduras utilizadas en el ejemplo 8.1.3, mostrado en la figura 8.8. Es posible que piense que podría haber una distribución desigual de esfuerzos en las soldaduras si el espesor de las placas fuese diferente. El estudio de la figura, muestra, sin embargo, que sí las placas se mantienen en posición entre las dos soldaduras y sus alargamientos son aproximadamente iguales, entonces las soldaduras resultan con esfuerzos aproximadamente iguales.

Los cálculos para estos problemas pueden reducirse ligeramente, si se calcula la resistencia de una soldadura de filete de $\frac{1}{16}$ in., para cada uno de los dos tipos de electrodos. La resistencia por ejemplo de una soldadura de filete de $\frac{7}{16}$ in., puede

obtenerse simplemente multiplicando por 7 el valor calculado para la soldadura de $\frac{1}{16}$ in., eliminando así un poco de trabajo de regla de cálculo. Para los electrodos E70 y acero A36 la resistencia de una soldadura de filete de $\frac{1}{16}$ in. es igual a $\frac{1}{16}(0.707)(21,000)$ ó 925 lb/pulg. Consecuentemente una soldadura de filete de 1 in. tiene una resistencia permisible igual a $(16)(0.925)=14.8$ k/pulg. Estos cómodos valores para soldaduras de filete se utilizan en varios de los problemas de ejemplo de este capítulo.

Ejemplo 8.1.1.

¿Cuál es la capacidad permisible de la conexión mostrada en la figura 8.6, si se utilizan, especificaciones AISC, acero A36 electrodos E70 y una soldadura de filete de $\frac{7}{16}$ pulg?

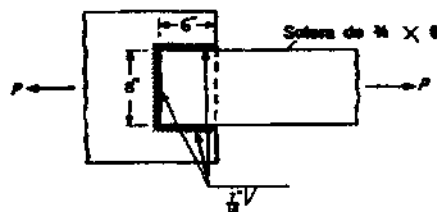


Fig. 8.6

Solución

La capacidad por pulgada de una soldadura de filete de $\frac{7}{16}$ pulg, es

$$\frac{7 \times 0.707 \times 21,000}{16} = 6,500 \text{ lb}$$

Capacidad total de la soldadura = $20 \times 6,500 = 130,000 \text{ lb}$

Capacidad total de la placa

$$8 \times \frac{3}{4} = 8 \times \frac{3}{4} \times 22,000 = 132,000 \text{ lb}$$

Capacidad de la conexión=132,000 lb.

Ejemplo 8.1.2.

Utilizando acero A36, especificaciones AISC y electrodos E70, diseñar la soldadura de filete para resistir una carga de tensión que representa la capacidad total de la placa de $6" \times \frac{3}{8}"$ mostrada en la figura 8.7.

Solución

$$P = (6) \left(\frac{3}{8} \right) (22,000) = 49,500 \text{ lb}$$

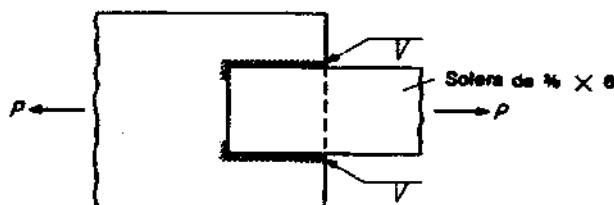


Fig. 8.7

$$\text{Grueso máximo de la soldadura} = \frac{3}{8} - 16 \text{ pulg.} = \frac{5}{16} \text{ pulg.}$$

$$\text{Carga permisible para soldadura de } \frac{5}{16} " = (5) (925) = 4,625 \text{ lb/pulg.}$$

$$\text{Longitud de la soldadura} = 49,500 / 4,625 = 10.7 \text{ pulg.}$$

Usando cordones de remate no menores de $(2)(\frac{5}{16}) = \frac{5}{8}$ digamos 1", queda $10.7 - 2(1.00) = 8.7$ pulg o sean $4\frac{1}{2}$ pulg de cada lado.

Ejemplo 8.1.3

Diseñar las soldaduras de filete necesarias para la junta traslapada mostrada en la figura 8, si se usan especificaciones AISC, acero A36, y electrodos E70. El diseño debe realizarse para desarrollar la capacidad total de las placas mostradas.



Fig. 8.8

Solución.

$$\text{Capacidad de las placas} = (8) \left(\frac{1}{2} \right) (22,000) = 88,000 \text{ lb}$$

Cada 1/16' de soldadura de filete puede soportar 925 lb/pulg.

$$\text{Grueso de la soldadura requerida} = \frac{88,000}{16 \times 925} = \frac{3}{8} \text{ pulg.}$$

En algunas ocasiones las longitudes disponibles para las soldaduras de filete longitudinales usuales, no son suficientes para la carga que debe resistirse. Para esta situación mostrada en la figura 8.9 puede ser posible desarrollar suficiente resistencia

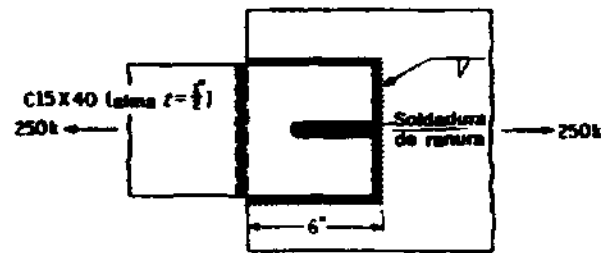
soldando a lo largo del resultado del canal en el borde de la placa si hay suficiente espacio disponible. La línea interrumpida de esta figura, muestra esta soldadura.

Otra posibilidad es el uso de soldaduras de ranura, como se ilustra en el ejemplo 8.1.4. Hay diversas exigencias del AISC con respecto a estas soldaduras, que es necesario mencionar. Las especificaciones indican que el ancho de una ranura no debe ser menor que el grueso del miembro + $\frac{5}{16}$ " (redondeado al siguiente $\frac{1}{16}$ " non, va que los punzones estructurales siempre se fabrican en diámetros de dieciseisavos nones), ni debe ser mayores que $2\frac{1}{4}$ veces el grueso de la soldadura. Para miembros de hasta $\frac{5}{8}$ " de espesor, el grueso de la soldadura debe ser igual al espesor de la placa, y para miembros mayores de $\frac{5}{8}$ " de espesor, el grueso de la soldadura debe estar comprendido entre la mitad del espesor y $\frac{5}{8}$ ". La longitud máxima permitida para soldaduras de ranura, es de 10 veces el grueso de la soldadura. Las limitaciones dadas en las especificaciones para las dimensiones máximas de soldaduras de tapón, ranura o muesca son ocasionadas por la contracción perjudicial que ocurre alrededor de estos tipos de soldaduras, cuando exceden ciertos valores. Si se trata de ranuras o agujeros mayores que los especificados, es conveniente utilizar soldaduras de filete alrededor de los bordes de las ranuras o agujeros.

En el ejemplo 8.1.4 se ilustra el diseño de la soldadura necesaria para unir una canal con una placa. Los cálculos muestran, en forma absoluta, que las soldaduras ordinarias y vueltas de extremo no suministran suficiente resistencia. Se decide por que una soldadura de muescas se utilice para resistir la carga restante. El ancho de esta soldadura está controlada por especificaciones y su longitud puede determinarse como sigue:

$$\text{Carga permisible} = \text{longitud} \times \text{ancho} \times \text{esfuerzo permisible}$$

Fig. 8.9

**Ejemplo 8.1.4.**

Diseñar la soldadura para conectar una canal de 15 x 40 a la placa mostrada en la figura 8.9. La carga por resistir es de 250 kips y se utilizan electrodos E70 y especificaciones AISC. Como se muestra en la figura, la canal debe traslapar a la placa en 6" debido a limitación de espacio

Solución.

Capacidad de la soldadura de filete.

Se considera la dimensión de la soldadura de filete $= \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$ pulg

Capacidad de una soldadura de filete de $\frac{7}{16}$ pulg.

$$= (7)(0.925)(6 + 6 + 15) = 175k < 250k$$

Ensayemos con una soldadura de ranura

Ancho de la ranura.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = \frac{13}{16} \\
 b) \quad & (2\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = 1.12 \text{ pulg.}
 \end{aligned}$$

Usar 15/16

Capacidad de una soldadura de filete de $\frac{7}{16}$ pulg.

$$(7)(0.925)(6 + 6 + 15 - \frac{15}{16}) = 169 \text{ k}$$

Carga que debe resistir la soldadura de ranura = $250 - 169 = 81 \text{ k}$

Longitud de la soldadura de ranura

$$\frac{81}{(15/16)(21.0)} = 4.12 \text{ pulg. (Usar } 4\frac{1}{2} \text{ pulg.)}$$

Longitud máxima permitida por el AISC

$$= (10)(\frac{1}{2}) = 5.00 \text{ pulg.} > 4\frac{1}{2} \text{ pulg. (OK)}$$

Usar una soldadura de ranura de $4\frac{1}{2}$ y $15/16$

Solución alterna:

Si hubiera espacio disponible en el respaldo del canal en seguida de la placa, una soldadura de filete de $\frac{3}{4}$ " podría soportar $(6)(0.925)(15) = 83.2 \text{ kips}$.

Cortante y torsión.

Las soldaduras de filete son sometidas a menudo a la acción de cargas aplicadas excéntricamente, por lo que las soldaduras quedan sujetas a cortante y flexión. La figura 8.10 hace el intento de mostrar al lector la diferencia entre las dos situaciones. El cortante y la torsión, mostrados en la parte (a) de la figura, son el tema de esta sección, mientras que el cortante y la flexión, mostrados en la parte (b) de la misma, son el tema de la sección siguiente.

Para esta exposición consideremos la ménsula soldada de la parte (a) de la figura 8.10. Se supone a las piezas conectadas, completamente rígidas, como si fueran conexiones remachadas. El efecto de esta hipótesis es que toda la deformación ocurre en la soldadura. La soldadura está sujeta a una combinación de cortante y torsión, como lo estaba el grupo de remaches, cargados excéntricamente. El esfuerzo ocasionado por la torsión puede calcularse a partir de la expresión ya conocida:

$$f = \frac{Td}{J}$$

En donde T es el par de torsión, d es la distancia del centro de gravedad de la soldadura al punto que se considera, y J es el momento polar de inercia de la soldadura. Normalmente es conveniente descomponer la fuerza en sus componentes vertical y horizontal. En las expresiones siguientes, h y v son las proyecciones horizontal y vertical de la distancia d . (Estas fórmulas son casi idénticas a las utilizadas para determinar esfuerzos en los grupos de remaches sujetos a torsión).

$$f_h = \frac{Tv}{J}$$

$$f_v = \frac{Th}{J}$$

Estas componentes se combinan con el esfuerzo directo de corte normal, que se supone igual a la reacción dividida entre la longitud total de las soldaduras. Para diseñar una soldadura sujeta a corte y torsión es conveniente considerar una soldadura

de una pulgada, y calcular los esfuerzos en una soldadura de esa dimensión. Si la soldadura considerada estuviera sobreesforzada, se necesitaría una soldadura más grande; si estuviera subesforzada, es conveniente una soldadura menor.

Aunque los cálculos podrían, dentro de toda posibilidad, mostrar que la soldadura estuviera sobreesforzada o subesforzada, no se tiene que estar repitiendo el proceso matemático para encontrar la dimensión de la soldadura para la cual la carga produce un esfuerzo igual al permisible. El lector notará que el uso de la soldadura de 1 pulgada simplifica las unidades, porque 1 pulgada de longitud de soldadura, es 1 pulgada cuadrada de soldadura y los esfuerzos calculados pueden ser expresados

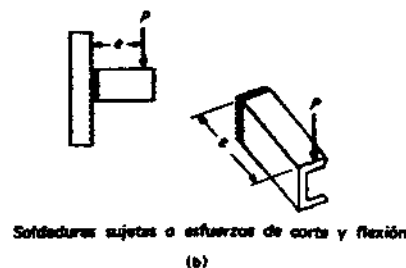
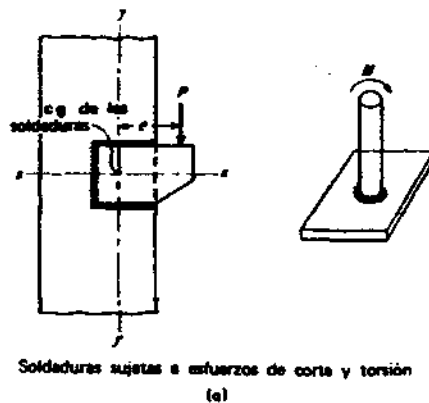


Fig. 8.10

tanto en kips/pulg² o kips/pulg de longitud. Si los cálculos estuvieran basados en alguna otra dimensión diferente de 1 pulgada de soldadura, debería tenerse mucho cuidado de conservar las unidades correctas, particularmente al obtener la dimensión final de la soldadura. El ejemplo 8.1.8 ilustra los cálculos para determinar la dimensión de la soldadura necesaria para la conexión sujeta a combinación de cortante y torsión.

Este tipo de problema puede resolverse fácilmente utilizando tablas disponibles. Por ejemplo, este problema puede comprobarse en el Manual, consultando las tablas tituladas "Eccentric Loads on Weld Groups" ("Cargas excéntricas sobre Grupos de Soldaduras").

Ejemplo 8.1.8.

Determinar el grueso necesario de la soldadura de filete, para la ménsula mostrada en la figura 8.11a si se utilizan electrodos E70 y especificaciones AISC.

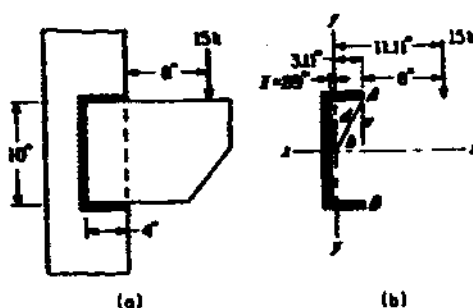


Fig. 8.11

Solución :

Considera una soldadura de 1 pulgada como se muestra en la parte (b) de la figura 8.11.

$$A = 18 \text{ pulg}^2.$$

$$\bar{x} = \frac{(4)(2)(2)}{18} = 0.89 \text{ pulg}.$$

$$I_x = \left(\frac{1}{2}\right)(1)(10)^3 + (2)(4)(5)^2 = 283.3 \text{ pulg}^4$$

$$I_y = (2)\left(\frac{1}{3}\right)(0.89^3 + 3.11^3) + (10)(0.89)^2 = 28.5 \text{ pulg}^4$$

$$J = 283.3 + 28.5 = 311.8 \text{ pulg}^4$$

Las partes de la soldadura con esfuerzos más grandes son las localizadas a las distancias mayores del centro de gravedad de la soldadura A y B en la figura 8.11b.

$$f_h = \frac{T_v}{J} = \frac{(15 \times 11.11)(5)}{311.8} = 2.67 \text{ k / pu lg}^2.$$

$$f_v = \frac{T_h}{J} = \frac{(15 \times 11.11)(3.11)}{311.8} = 1.66 \text{ k / pu lg}^2$$

$$f_s = f_{\text{cortante}} = \sqrt{(1.66 + 0.83)^2 + (2.67)^2} = 3.65 \text{ k / pu lg}^2$$

$$f_r = f_{\text{resultante}} = \frac{15}{18} = 0.83 \text{ k / pu lg}^2$$

Esfuerzo permisible en una soldadura de filete de 1" (electrodos E70)

$$= (16)(0.925) = 14.8 \text{ kips/pulg.}$$

$$\text{Grueso necesario de la soldadura} = \frac{3.65}{14.8} = 0.247 \text{ pu lg. (usar } \frac{1}{4} \text{ pulg.)}$$

Cortante y flexión.

Las soldaduras mostradas en la figura 8.10b y en la figura 8.12 están sujetas a una combinación de cortante y flexión.

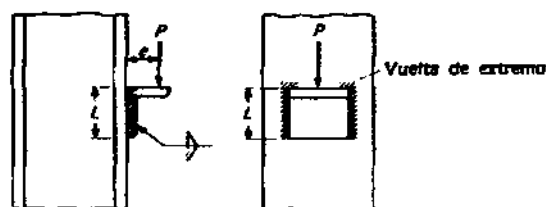


Fig. 8.12

Para soldaduras cortas de este tipo, la práctica usual es considerar una variación uniforme del esfuerzo al cortante. No obstante, si el esfuerzo de flexión se considera dado por la fórmula de la flexión el corte no varía uniformemente para soldaduras

verticales, sino como una parábola con un valor máximo igual a $\frac{3}{2}$ veces el valor promedio.

Ejemplo 8.1.9.

Utilizando electrodos E70 y especificaciones AISC, determinar la dimensión necesaria de la soldadura para la conexión de la figura 12, si $P=30\text{ k}$ e $e = 2\frac{1}{2}"$ y $L=8"$.

Solución:

$$f_s = \frac{30}{2 \times 8} = 1.875\text{ k / pulg.}$$

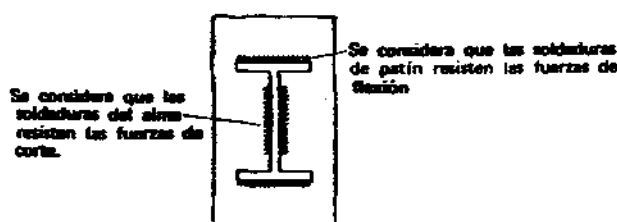
$$f = \frac{30 \times 2.5 \times 4}{\frac{1}{2} \times 1 \times 8^3 \times 2} = 3.51\text{ k / pulg.}$$

$$f_r = \sqrt{1.875^2 + 3.51^2} = 3.98\text{ k / pulg.}$$

$$\text{Grueso necesario de la soldadura} = \frac{3.98}{14.8} = 0.269\text{ pulg. (tomar } \frac{5}{16} ")$$

Si las soldaduras del tipo mostrado en la figura 8.13 se utilizaran para una viga W o S, se supondrá que las soldaduras del alma resisten la fuerza cortante de manera uniforme, y las soldaduras del patín el momento.

Fig. 8.13



9. EJEMPLOS

CALCULAR DIAGRAMA DE MOMENTOS PLÁSTICOS (MÉTODO EQUILIBRIO)

Ejemplo 9.1 Calcular momentos plásticos y dibujar el diagrama de momentos de la viga mostrada en la figura 9.1

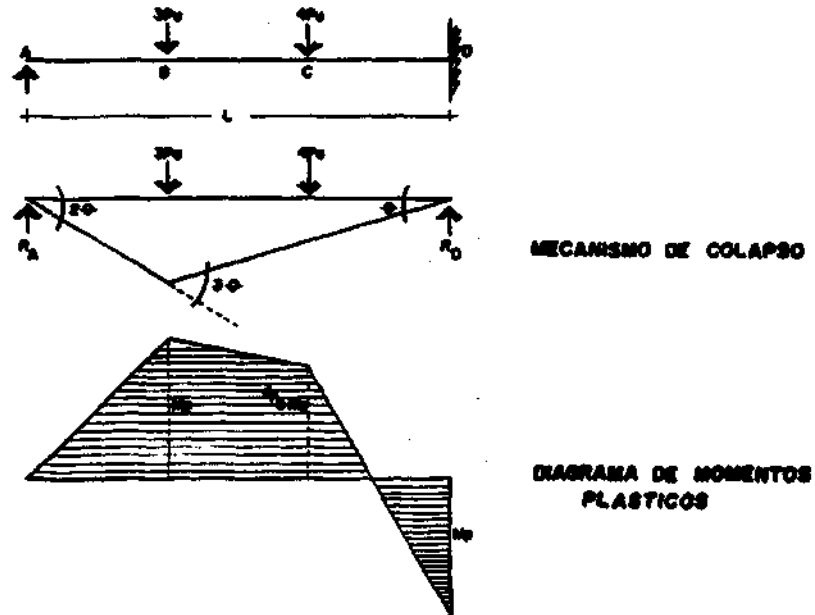


Fig. 9.1

Suma de momentos respecto al punto B

$$\Sigma M_B$$

$$-M_p + \frac{R_A L}{3} = 0$$

$$M_p = \frac{R_A L}{3}$$

$$R_A = \frac{3M_p}{L}$$

Así mismo

$$M_B = \frac{3M_p}{L} \frac{L}{3} = M_p$$

Suma de momentos respecto al punto D

ΣM_D

$$M_p + \frac{3M_p}{L}L - 3P_U \cdot \frac{2L}{3} - \frac{4P_U L}{3} = 0$$

$$M_p + 3M_p - 2 \cdot P_U L - \frac{4P_U L}{3} = 0$$

$$4 \cdot M_p = \frac{6 \cdot P_U L + 4 \cdot P_U L}{3}$$

$$M_p = \frac{10}{12} P_U L = \frac{5}{6} P_U L$$

Suma de momentos respecto al punto C

$$M_C = R_A \frac{2L}{3} - 3P_U \frac{L}{3}$$

$$M_C = \frac{3M_p}{L} \cdot \frac{2L}{3} - P_U L$$

$$M_C = 2M_p - P_U L$$

Como

$$P_U L = \frac{6}{5} M_p$$

$$M_C = 2M_p - \frac{6}{5} M_p = \frac{10M_p - 6M_p}{5}$$

$$M_C = \frac{4}{5} M_p$$

Suma de momentos respecto al punto B

$$M_B = \frac{3M_p}{L} \cdot \frac{L}{3} = M_p$$

Ejemplo 9.2 Calcular el momento plástico y dibujar el diagrama de momentos plásticos de la viga siguiente.

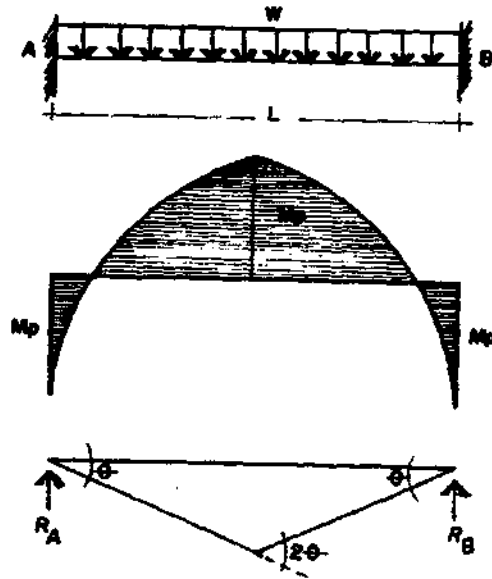


Fig. 9.2

Suma de momentos respecto al punto B

$$\Sigma M_B$$

$$-M_p + \left(\frac{WL}{8} \cdot \frac{L}{2} \right) = 0$$

$$M_p = \frac{WL^2}{16}$$

Ejemplo 9.3 Calcular el momento plástico y dibujar el diagrama de momentos de la viga mostrada en la figura 9.3

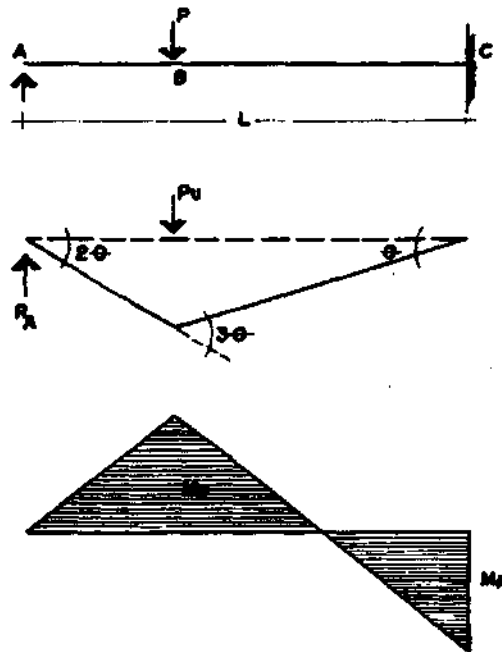


Fig. 9.3

Suma de momento respecto al punto B

$$\Sigma M_B$$

$$-M_p + \left(R_A \cdot \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$R_A = 3 \frac{M_p}{L}$$

De igual forma

$$M_B = R_A \frac{L}{3} = 3 \frac{M_p}{L} \cdot \frac{L}{3} = M_p$$

Suma de momentos respecto al punto C

$$M_p + \left(\frac{3M_p}{L} \cdot L \right) - \left(P_U \frac{2L}{3} \right) = 0$$

$$M_p + 3M_p - \left(\frac{2}{3} P_U L \right) = 0$$

$$4M_p = \frac{2}{3} P_U L$$

$$M_p = \frac{P_U \cdot L}{6}$$

MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Ejemplo 9.4 Calcular la posición de la articulación plástica de la viga mostrada en la figura 9.4.

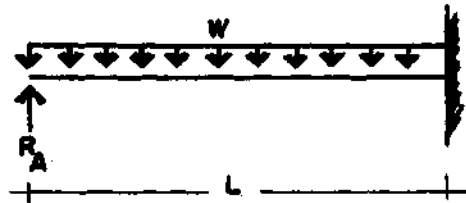


Fig. 9.4

Calcular la posición de la articulación plástica.

$$+ M_p - \frac{WL^2}{2} + R_A L = 0$$

$$R_A = \frac{WL}{2} - \frac{M_p}{L}$$

X es la distancia desde el apoyo libre hasta la articulación plástica

$$\frac{WL}{2} - \frac{M_p}{L} = W \cdot X$$

$$-\frac{M_p}{L} = W \cdot X - \frac{WL}{2}$$

$$M_p = \frac{WL^2}{2} - W \cdot L \cdot X$$

$$\Sigma M_x = \left(\frac{WL}{2} - \frac{M_p}{L} \right) \cdot X - \frac{WX^2}{2} - M_p = 0$$

$$\Sigma M_x = \frac{W \cdot L \cdot X}{2} - \frac{M_p \cdot X}{L} - \frac{W \cdot X^2}{2} - M_p = 0$$

$$\Sigma M_x = \frac{W \cdot L \cdot X}{2} - \left(\frac{W \cdot L^2}{2} - W \cdot L \cdot X \right) \cdot \frac{X}{L} - \left(\frac{W \cdot X^2}{2} \right) - \left(\frac{W \cdot L^2}{2} - W \cdot L \cdot X \right) = 0$$

$$\Sigma M_x = \frac{W \cdot L \cdot X}{2} - \frac{W \cdot L \cdot X}{2} + W \cdot X^2 - \left(\frac{W \cdot X^2}{2} \right) - \left(\frac{W \cdot L^2}{2} \right) + W \cdot L \cdot X = 0$$

Simplificando

$$= \frac{W \cdot X^2}{2} + (2 \cdot L \cdot X) - L^2 = 0$$

Multiplicando la ecuación por $\left(\frac{2}{W}\right)$

$$X^2 + 2 \cdot L \cdot X - L^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$$X = \frac{-2L \pm \sqrt{(2L)^2 - 4(1)(-L^2)}}{2}$$

$$X = \frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 + 4L^2}}{2}$$

$$X = 0.4142 \cdot L$$

VIGAS CONTINUAS

De sección constante, claros iguales y cargas simétricas.

Ejemplo 9.5 Calcular el momento plástico crítico y dibujar el diagrama de momentos y el mecanismo de colapso de la viga mostrada en la figura 9.5.

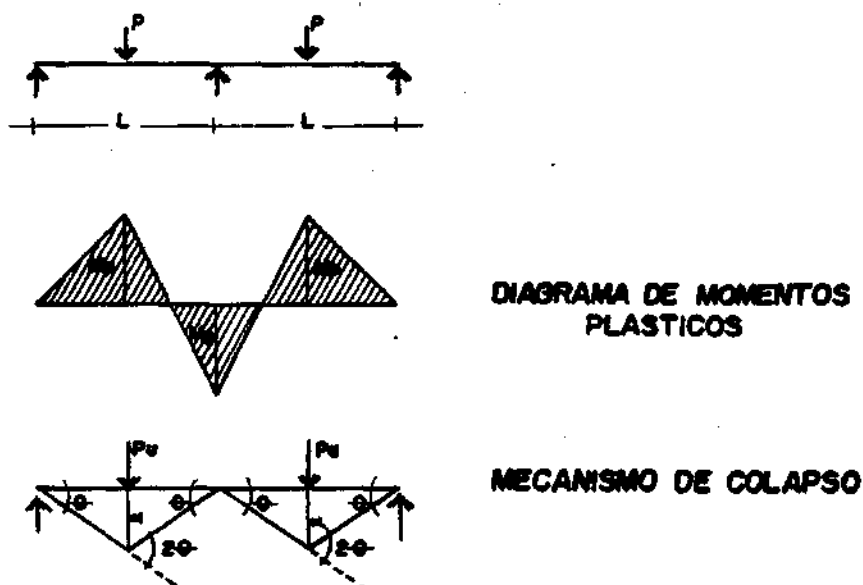


Fig. 9.5

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L/2} = \frac{2\alpha}{L}$$

$$\alpha = \frac{L}{2} \tan \theta \approx \frac{L\theta}{2}$$

$$\text{Trabajo interno} = 2P_u \cdot \alpha = 2P_u \cdot L \frac{\theta}{2} = P \cdot L \cdot \theta$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p (2\theta + \theta + \theta + 2\theta) = 6M_p \theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$PL\theta = 6M_p \theta$$

$$M_p = \frac{PL}{6}$$

Ejemplo 9.6 Calcular el momento plástico crítico y el mecanismo de colapso de la siguiente viga, usando el método del trabajo virtual.

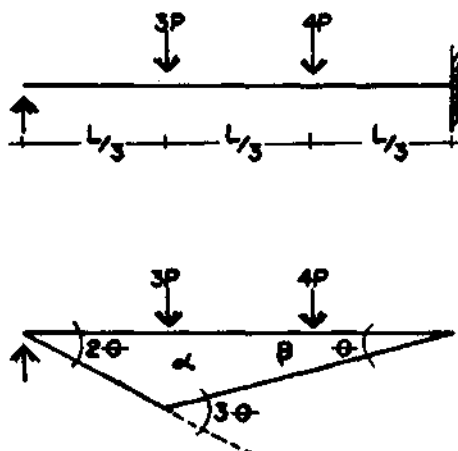


Fig. 9.6

$$\tan 2\theta = \frac{\alpha}{L/3}$$

$$\alpha = \frac{L \cdot \tan 2\theta}{3} \approx \frac{2}{3} L\theta$$

$$\tan \theta = \frac{\beta}{L/3}$$

$$\beta = \frac{L \cdot \tan \theta}{3} \approx \frac{L\theta}{3}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = 3P\alpha + 4P\beta = 3P\left(\frac{2}{3}L\theta\right) + 4P\left(\frac{L\theta}{3}\right) = 2PL\theta + \frac{4}{3}PL\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = M_p(\theta + 3\theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{externo}$$

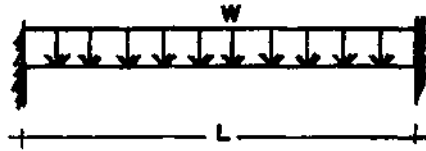
$$2PL\theta + \frac{4}{3}PL\theta = 4M_p\theta$$

$$\frac{6PL\theta + 4PL\theta}{3} = 4M_p\theta$$

$$\frac{10PL\theta}{3} = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{10PL\theta}{12\theta} = \frac{5}{6}PL$$

Ejemplo 9.7 Calcular el momento plástico y el mecanismo de colapso de la viga siguiente.



MECANISMO DE COLAPSO

Fig. 9.7

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L/2}$$

$$\alpha = \frac{L \cdot \tan \theta}{2} = \frac{L\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Trabajo interno} &= \frac{W \cdot L}{2} \alpha = \frac{W \cdot L}{2} \left(\frac{L \cdot \theta}{2} \right) = \frac{W \cdot L^2 \theta}{4} \\ &= M_p (\theta + \theta + 2\theta) = 4 M_p \theta \end{aligned}$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$\frac{W \cdot L^2 \theta}{4} = 4 M_p \theta$$

$$M_p = \frac{W \cdot L^2}{16}$$

Ejemplo 9.8 Calcular el momento plástico y el mecanismo de colapso de la siguiente viga.

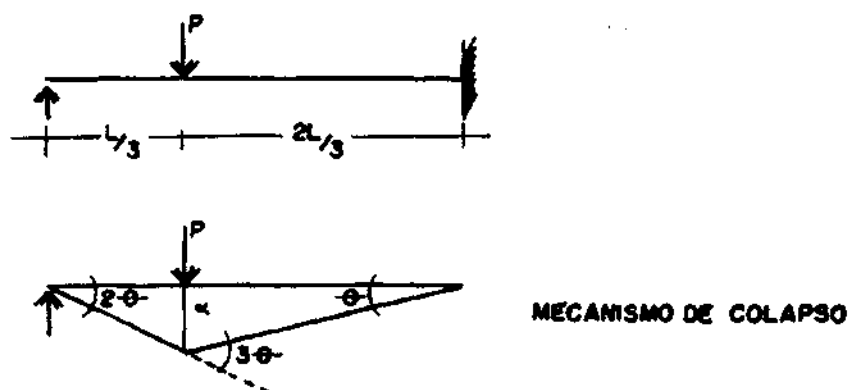


Fig. 9.8

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{\frac{2L}{3}}$$

$$\alpha = \frac{2L \cdot \tan \theta}{3} = \frac{2L\theta}{3}$$

$$\text{Trabajo interno} = P\alpha = P \frac{2L\theta}{3} = \frac{2}{3} PL\theta$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p(3\theta + \theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$\frac{2}{3} PL\theta = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{6}$$

VIGA CONTINUA (SECCION CONSTANTE)

Ejemplo 9.9 Calcular el momento plástico y el mecanismo de colapso de la viga continua de sección constante, mostrada en la figura 9.9

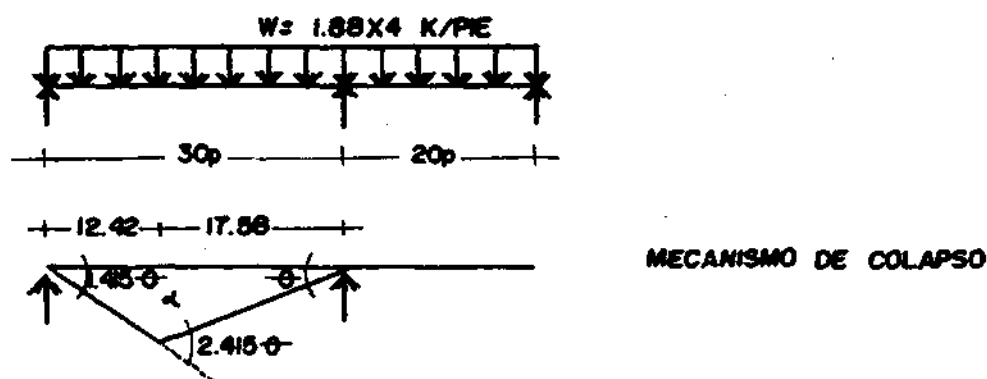


Fig. 9.9

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{17.58}$$

$$\alpha = 17.58 \cdot \tan \theta = 17.58\theta$$

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{12.42}$$

$$\theta' = \frac{17.58\theta}{12.42} = 1.415\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = \frac{W \cdot L}{2} \alpha = \frac{7.52(30)}{2} \cdot 17.58\theta = 1983\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = M_p(\theta + 2.415\theta) = 3.415 M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{externo}$$

$$1983\theta = 3.415 M_p \theta$$

$$M_p = 580.67 \cdot Kp \cdot pie$$

Misma viga anterior (sección variable)
Ejemplo 9.10

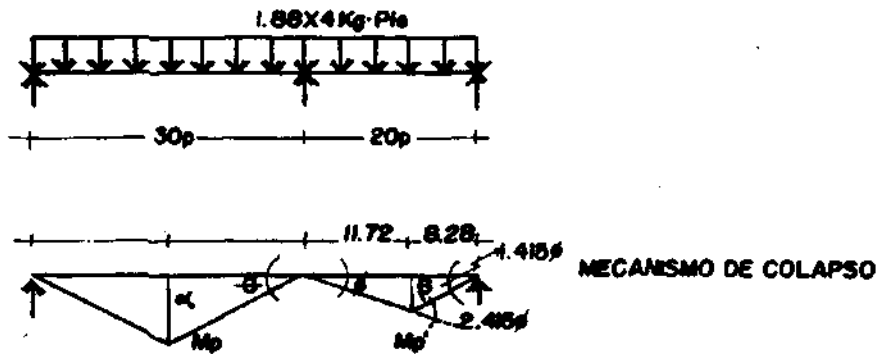


Fig. 9.10

$$\tan \phi = \frac{\beta}{11.72}$$

$$\beta = 11.72\phi$$

$$\phi'' = \frac{\beta}{8.28} = \frac{11.72}{8.28} \phi = 1.415\phi$$

Para el claro de 20'

$$\text{Trabajo interno} = \frac{W \cdot L}{2} \beta = \frac{(1.88)(4)20}{2} 11.72\phi = 881.34\phi$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p' (2.415\theta + \theta) = 3.415 M_p' \phi$$

$$\text{Trabajo externo} = \text{Trabajo interno}$$

$$3.415 M_p' \phi = 881.84\phi$$

$$M_p = 258.22 \cdot Kp \cdot pie$$

Para el claro de 30'

$$M_p = 279 \cdot Kp \cdot pie$$

Ejemplo 9.11 Calcular los momentos plásticos y los mecanismos de colapso de la viga de la figura 9.11

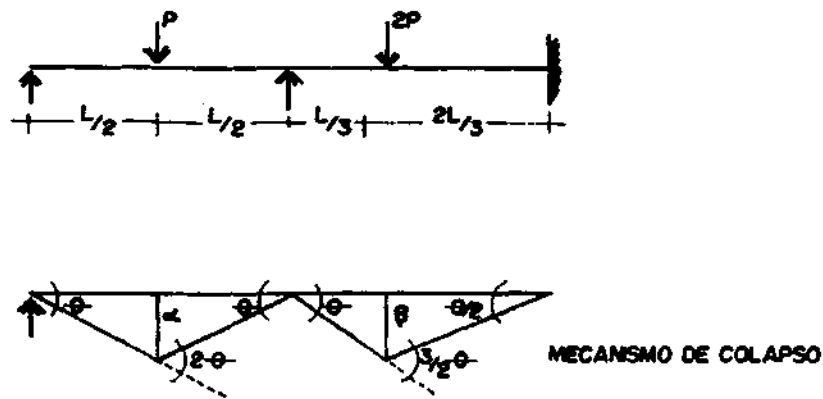


Fig. 9.11

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L/2}$$

$$\alpha = \frac{L \cdot \tan \theta}{2} = \frac{L\theta}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\beta}{L/3}$$

$$\beta = \frac{L \cdot \tan \theta}{3} = \frac{L\theta}{3}$$

$$\tan \theta' = \frac{\beta}{2L/3} = \frac{L\theta/3}{2L/3} = \frac{\theta}{2}$$

$$\theta' = \frac{\theta}{2}$$

Mecanismo 1

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = P \cdot \alpha = \frac{PL\theta}{2}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = (\theta + 2\theta) M_p = 3 M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = \text{Trabajo} \cdot \text{interno}$$

$$3 M_p \theta = \frac{PL\theta}{2}$$

$$M_p = \frac{PL}{6}$$

Mecanismo 2

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = 2P\beta = 2P\left(\frac{L\theta}{3}\right) = \frac{2}{3} PL\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = M_p \left(\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{\theta}{2} \right) = 3 M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = \text{Trabajo} \cdot \text{interno}$$

$$3 M_p \theta = \frac{2}{3} PL\theta$$

$$M_p = \frac{2PL}{9}$$

Ejemplo 9.12 Calcular el momento plástico y el mecanismo de colapso de la viga siguiente.

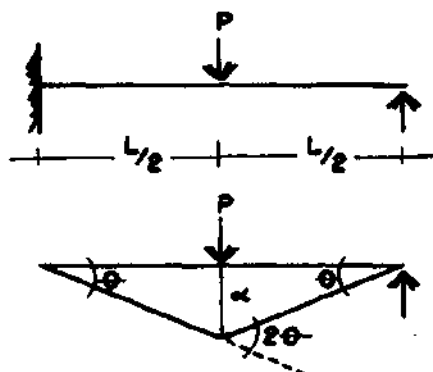


Fig. 9.12

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L/2}$$

$$\alpha = \frac{L \tan \theta}{2} = \frac{L \theta}{2}$$

$$\text{Trabajo interno} = P\alpha = \frac{PL\theta}{2}$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p(\theta + 2\theta) = 3M_p\theta$$

$$\text{Trabajo externo} = \text{Trabajo interno}$$

$$3M_p\theta = \frac{PL\theta}{2}$$

$$M_p = \frac{PL}{6}$$

MARCOS RÍGIDOS

Ejemplo 9.13 Calcular los momentos plásticos de todos los mecanismos de colapso del siguiente marco rígido.

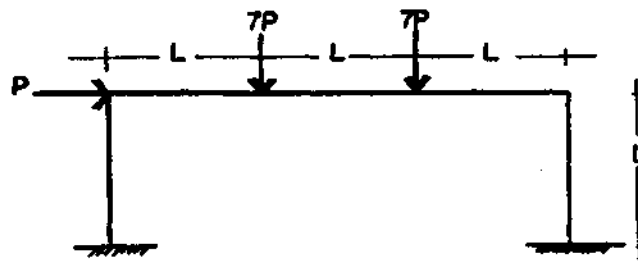


Fig. 9.13

$$P=3k$$

$$L=20'$$

4 articulaciones plásticas posibles, por lo tanto hay 3 mecanismos; 2 de viga y uno de recuadro más sus combinaciones.

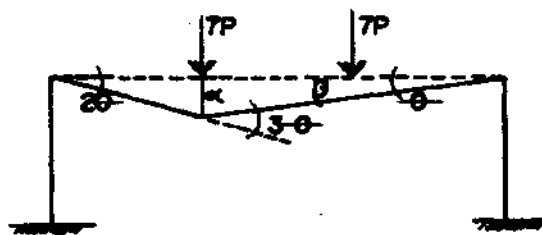


Fig. 9.13a

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= 2L\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\beta}{L} \\ \beta &= L\theta\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = 7P\alpha + 7P\beta = 7P(\alpha + \beta) = 7P(2L\theta + L\theta) = 21PL\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} = M_p(2\theta + 3\theta + \theta) = 6M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{externo}$$

$$21PL\theta = 6M_p\theta$$

$$M_p = \frac{7PL}{2}$$

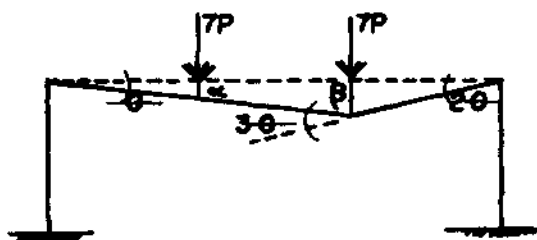


Fig. 9.13b

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\tan 2\theta = \frac{\beta}{L}$$

$$\beta = 2L\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = 7P\alpha + 7P\beta = 7P(\alpha + \beta) = 7P(3\theta \cdot L) = 21PL\theta$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p(\theta + 3\theta + 2\theta) = 6M_p\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$21PL\theta = 6M_p\theta$$

$$M_p = \frac{7PL}{2}$$



Fig. 9.13c

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} \approx P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{externo} \approx M_p(\theta + \theta) = 2M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{interno} \approx \text{Trabajo} \cdot \text{externo}$$

$$PL\theta \approx 2M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{2}$$

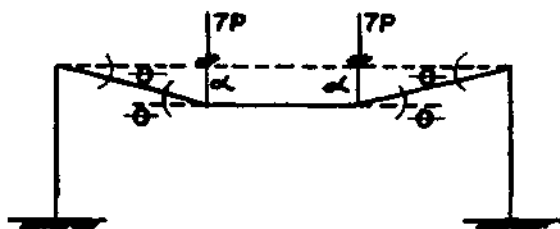


Fig. 9.13d

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = L\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = 2 \cdot 7P\alpha = 14P\alpha = 14PL\theta$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p(4\theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$14PL\theta = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{7PL}{2}$$

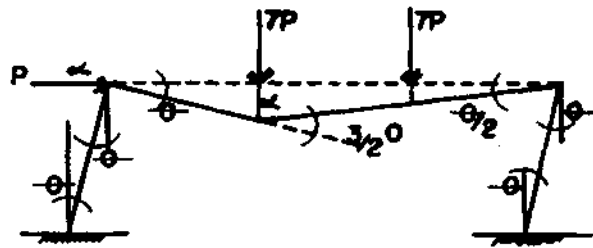


Fig. 9.13e

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= L\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\beta}{L} \\ \beta &= \frac{L\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo interno} = P\alpha + 7P\alpha + 7P\beta = 8P\alpha + 7P\beta = 8PL\theta + 7\frac{PL\theta}{2} = \frac{23PL\theta}{2}$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p \left(\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{\theta}{2} \right) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$\frac{23PL\theta}{2} = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{23}{6}PL$$

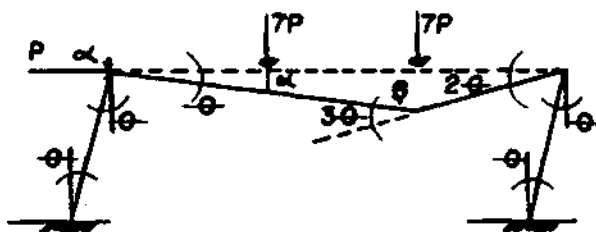


Fig. 9.13f

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= \theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\beta}{L} \\ \beta &= 2\theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo interno} = 7P\alpha + 7P\beta + P\alpha = 8P\alpha + 7P\beta = 8P\theta \cdot L + 14P\theta \cdot L = 22P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo externo} = M_p(3\theta + 2\theta + \theta) = 6M_p\theta$$

$$\text{Trabajo interno} = \text{Trabajo externo}$$

$$22P\theta \cdot L = 6M_p\theta$$

$$M_p = \frac{11}{3} PL$$

El mecanismo crítico es el que resulta con un momento plástico mayor

$$M_p = \frac{23}{6} PL$$

MARCOS DE SECCIÓN VARIABLE.

Ejemplo 9.14 Calcular los mecanismos de colapso y momentos plásticos para el marco de una cruz de sección variable.

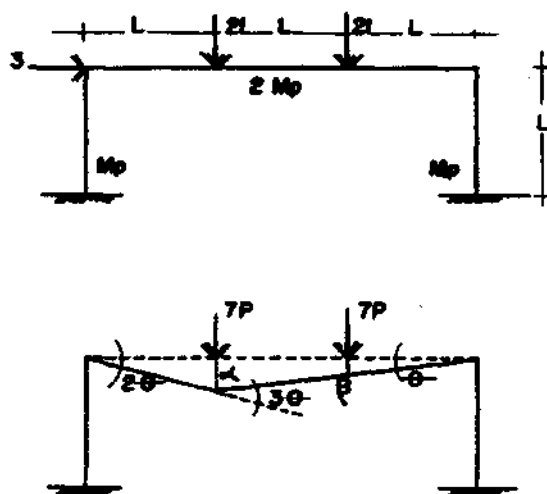


Fig. 9.14 a y b

Solución:

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= 2\theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\beta}{L} \\ \beta &= \theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 7P\alpha + 7P\beta = 7P \cdot 2\theta \cdot L + 7P\theta \cdot L = 21P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(2\theta + 6\theta + \theta) = 9M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$21P\theta \cdot L = 9M_p\theta$$

$\therefore$

$$M_p = \frac{7PL}{3}$$

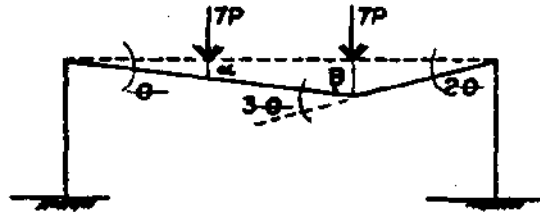


Fig. 9.14c

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\tan 2\theta = \frac{\beta}{L}$$

$$\beta = 2\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo Interno} = 7P\alpha + 7P\beta = 7P\theta L + 7P \cdot 2\theta \cdot L = 21P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo Externo} = M_p(\theta + 6\theta + 2\theta) = 9M_p\theta$$

$$\text{Trabajo Interno} = \text{Trabajo Externo}$$

$$21P\theta \cdot L = 9M_p\theta$$

$$\therefore$$

$$M_p = \frac{7PL}{3}$$

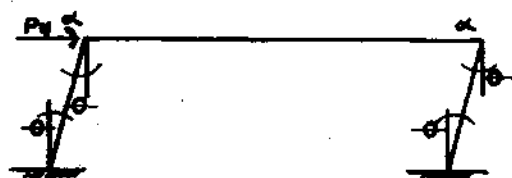


Fig. 9.14d

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta) = 2M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$P\theta \cdot L = 2M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{2}$$

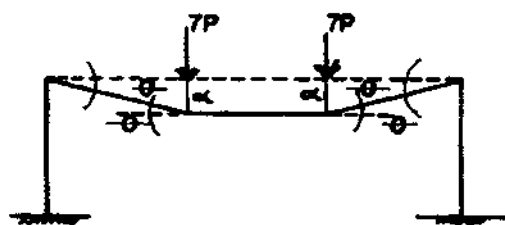


Fig. 9.14e

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 27 P \alpha = 14 P \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p (\theta + 2\theta + 2\theta + \theta) = 6 M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$14 P \theta \cdot L = 6 M_p \theta$$

$$\therefore$$

$$M_p = \frac{7 PL}{3}$$

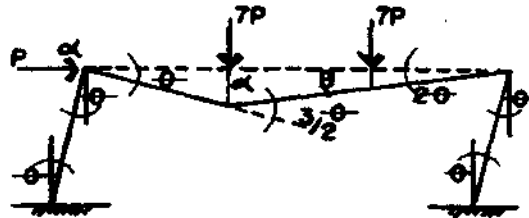


Fig. 9.14f

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= \theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\beta}{L} \\ \beta &= \frac{\theta \cdot L}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 7P\alpha + 7P\beta = P\theta \cdot L + 7P\theta \cdot L + \frac{7P\theta \cdot L}{2} = \frac{23PL\theta}{2}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\theta + 3\theta + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{9}{2} M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$\frac{23PL\theta}{2} = \frac{9}{2} M_p \theta$$

$$M_p = \frac{23}{9} PL$$

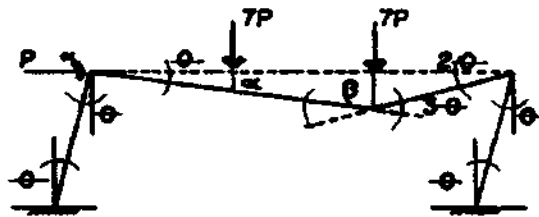


Fig. 9.14g

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\tan 2\theta = \frac{\beta}{L}$$

$$\beta = 2\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 7P\alpha + 7P\beta = P\theta \cdot L + 7P\theta \cdot L + 14P\theta \cdot L = 22P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + 6\theta + 2\theta) = 9M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$22P\theta \cdot L = 9M_p\theta$$

$$M_p = \frac{22}{9} PL$$

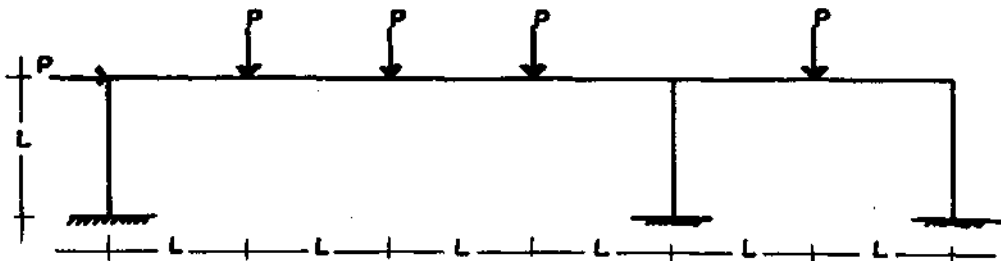
MARCO RECTANGULAR EMPOTRADO.**Ejemplo 9.15** Analizar el marco rectangular empotrado.

Fig. 9.15a

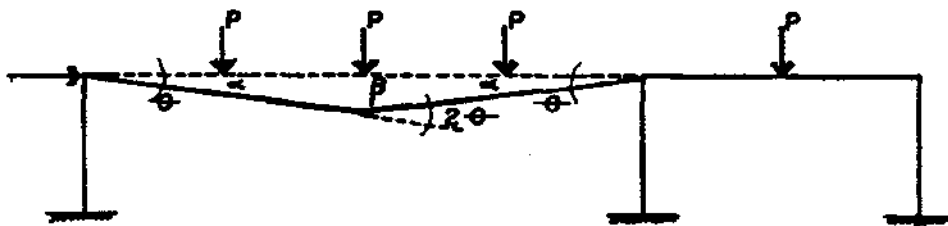
Solución:**Mecanismo de viga**

Fig. 9.15b

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\tan \theta = \frac{\beta}{2L}$$

$$\beta = 2\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo Interno} = P\alpha + P\beta + P\alpha = P\theta \cdot L + 2P\theta \cdot L + P\theta \cdot L = 4P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo Externo} = M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo Interno} = \text{Trabajo Externo}$$

$$4P\theta \cdot L = 4M_p\theta$$

$$M_p = PL$$

Mecanismo de viga

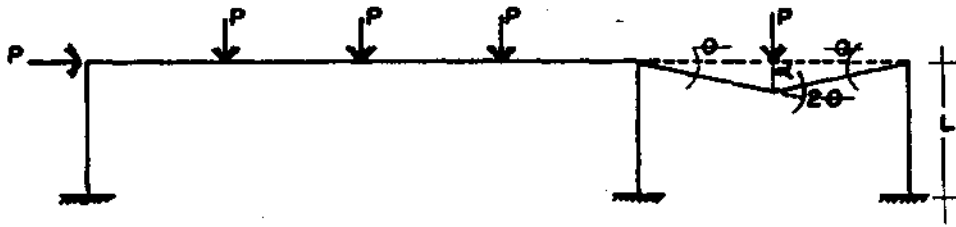


Fig. 9.15c

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta + 2\theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$P\theta \cdot L = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{4}$$

Mecanismo de recuadro

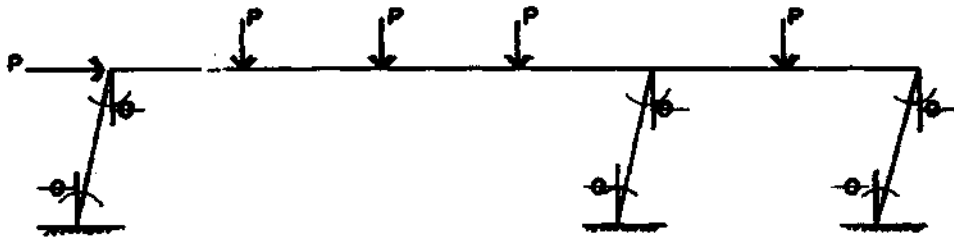


Fig. 9.15d

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta + \theta + \theta + \theta + \theta) = 6M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$P\theta \cdot L = 6M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{6}$$

Mecanismo de nudo

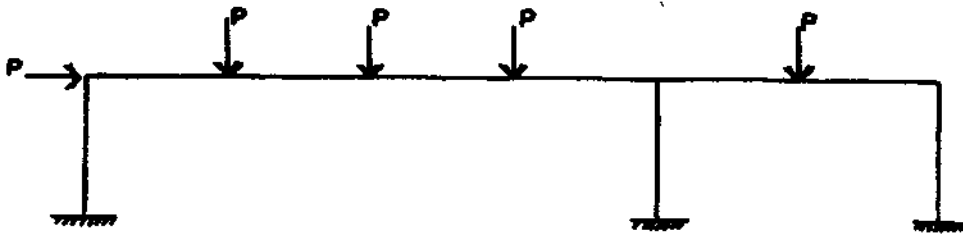


Fig. 9.15e

$$M_p = 0$$

Mecanismo combinado

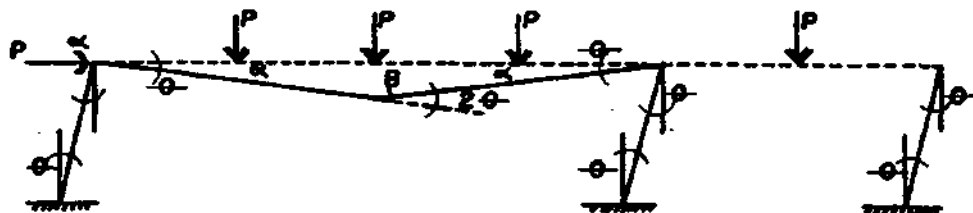


Fig. 9.15f

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\tan \theta = \frac{\beta}{2L}$$

$$\beta = 2\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 3P\alpha + P\beta = 3P\theta \cdot L + 2P\theta \cdot L = 5P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta + 2\theta + \theta + \theta + \theta) = 8M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$5P\theta \cdot L = 8M_p\theta$$

$$M_p = \frac{5PL}{8}$$

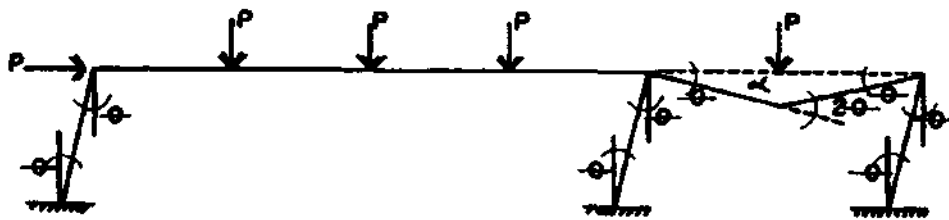


Fig. 9.15g

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + P\alpha = 2P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta + \theta + \theta + 2\theta + \theta + \theta + \theta) = 9M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$2P\theta \cdot L = 9M_p\theta$$

$$M_p = \frac{2PL}{9}$$

MARCO DE CABEZAL ANUDADO (Articulado).

Ejemplo 9.16 Calcular los mecanismos de colapso y momentos plásticos.

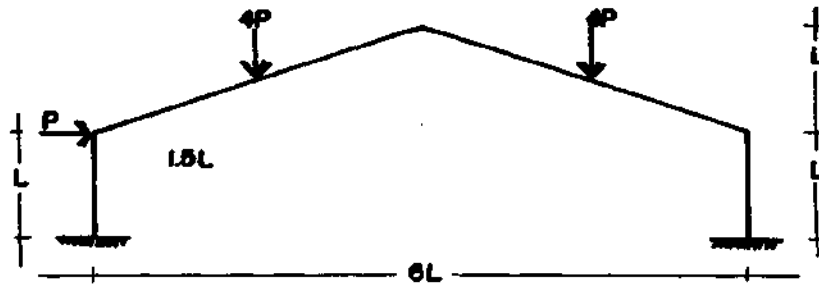


Fig. 9.16a

Mecanismo = 7 articulaciones – 1 grado = 6

Mecanismo de viga

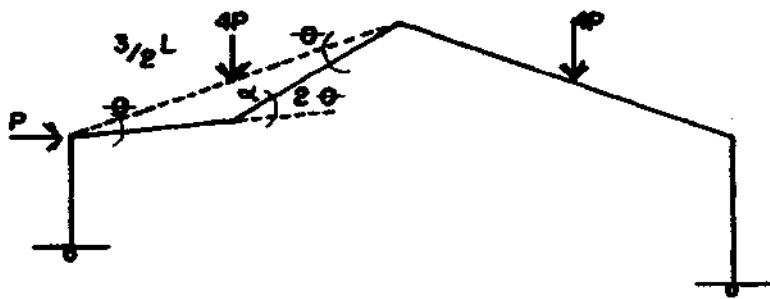


Fig. 9.16b

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{3L/2}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 4P\alpha = 4P\left(\frac{3}{2}\theta \cdot L\right) = 6P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$6P\theta \cdot L = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{3}{2} PL$$

Mecanismo de recuadro

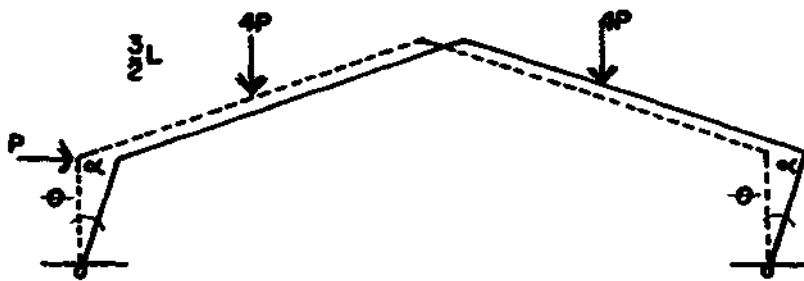


Fig. 9.16c

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta) = 2M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$P\theta \cdot L = 2M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{2}$$

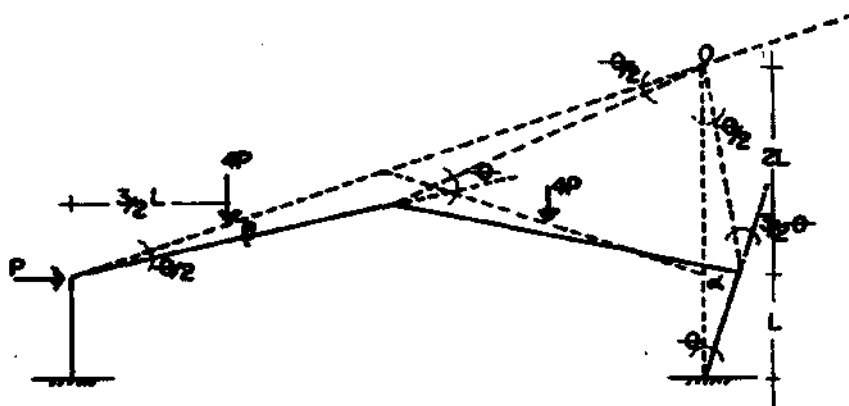


Fig. 9.16d

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\alpha}{L} \\ \alpha &= \theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\beta}{3L/2} \\ \beta &= \frac{3}{4} \theta \cdot L\end{aligned}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 4P\beta + 4P\beta = 8P\beta = 8\left(\frac{3}{4}\right)P\theta \cdot L = 6P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{\theta}{2} + \theta + \frac{3}{2}\theta \right) = 3M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$6P\theta \cdot L = 3M_p\theta$$

$$M_p = 2PL$$

Mecanismo combinado de recuadro y cabezal acodado

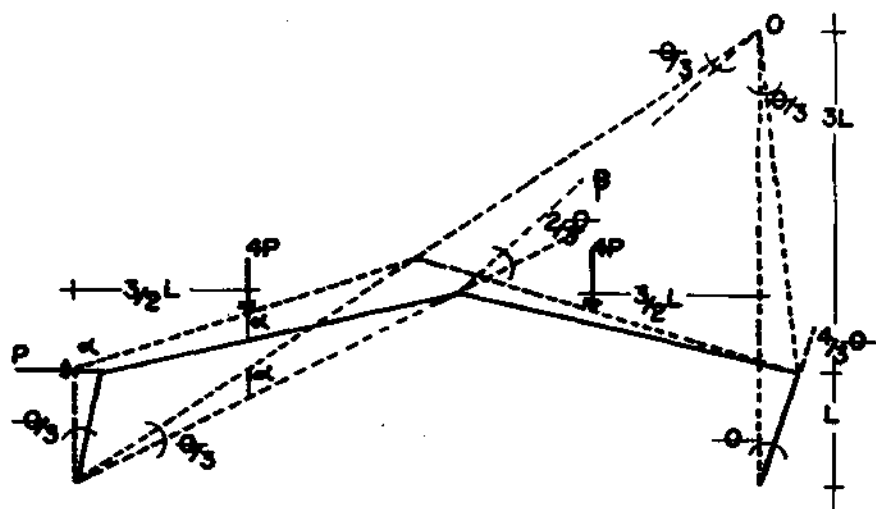


Fig. 9.16f

$$\tan \frac{2}{3} \theta = \frac{\beta}{3L/2}$$

$$\beta = \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{3} = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \frac{L\theta}{3}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 4P\alpha = \frac{PL \cdot \theta}{3} + 4P\theta \cdot L = \frac{PL \cdot \theta + 12PL \cdot \theta}{3} = \frac{13}{3} P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{2}{3} \theta + \frac{4}{3} \theta \right) = 2M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$\frac{13}{3} P\theta \cdot L = 2M_p \theta$$

$$M_p = 2.16 PL$$

Mecanismo combinado viga y de recuadro

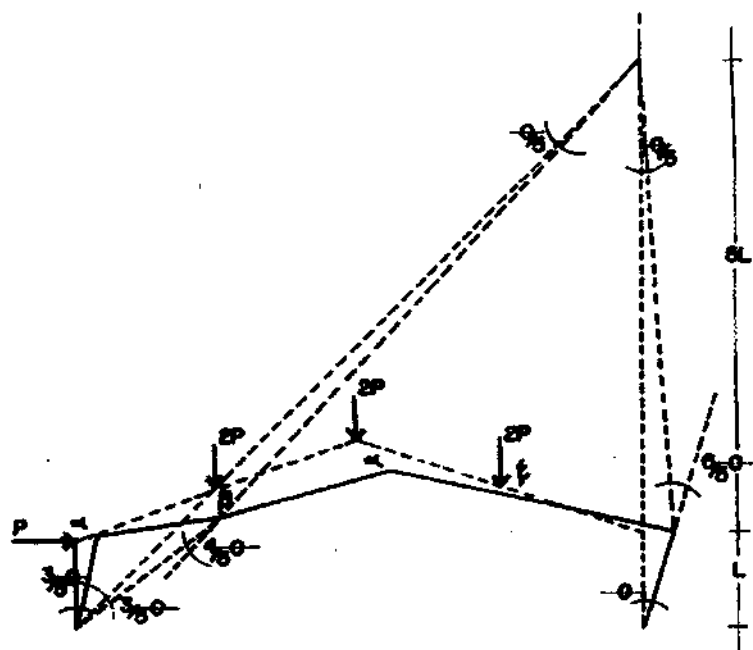


Fig. 9.16g

$$\tan \frac{3}{5} \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \frac{3}{5} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{4}{5} \theta = \frac{\beta}{3L/2}$$

$$\beta = \frac{6}{5} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 4P\beta = P\left(\frac{3\theta \cdot L}{5}\right) + 4P\left(\frac{6\theta \cdot L}{5}\right) = \frac{27}{5} P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{4}{5} \theta + \frac{6}{5} \theta \right) = 2 M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$\frac{27}{5} P\theta \cdot L = 2 M_p \theta$$

$$M_p = 2.7 PL$$

Ejemplo 9.17, Análisis de un marco empotrado de cabezal acodado y sección constante.

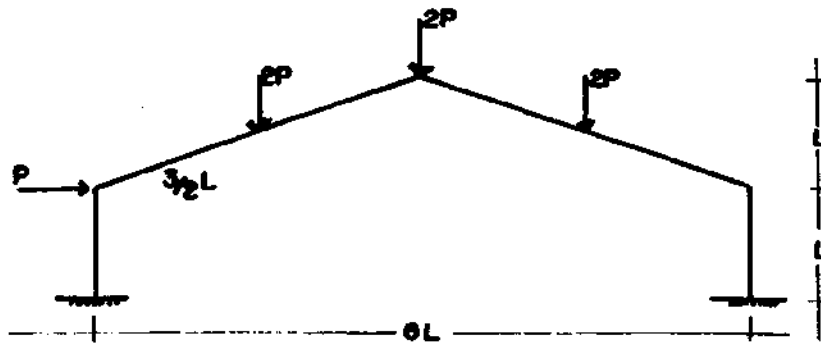


Fig. 9.17a

El marco tiene 4 mecanismos de colapso

Mecanismo de viga

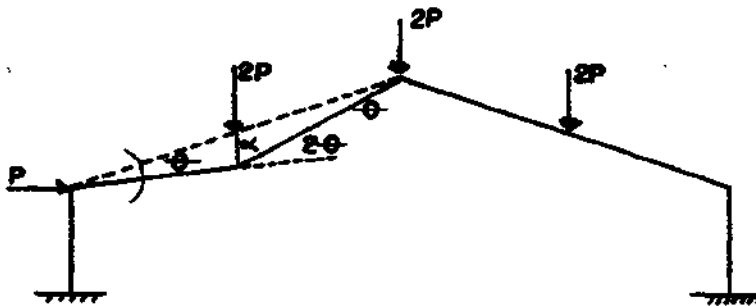


Fig. 9.17b

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{3L/2}$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 2P\alpha = 3P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$3P\theta \cdot L = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{3}{4} PL$$

Mecanismo de recuadro

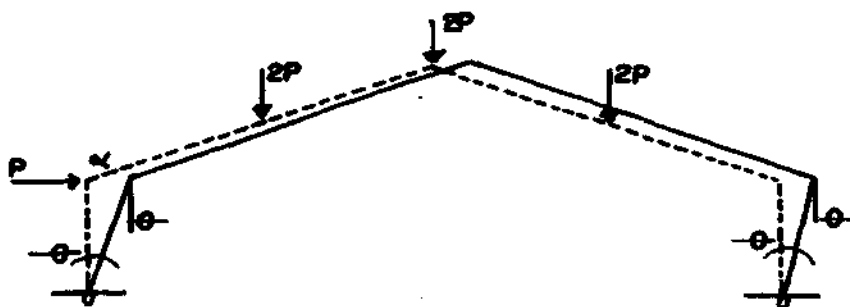


Fig. 9.17c

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha = P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p(\theta + \theta + \theta + \theta) = 4M_p\theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$P\theta \cdot L = 4M_p\theta$$

$$M_p = \frac{PL}{4}$$

Mecanismo de cabezal acodado

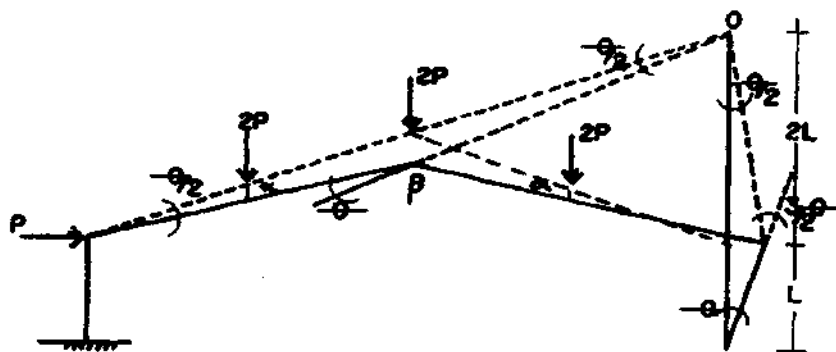


Fig. 9.17d

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{3L_2}$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{3L}$$

$$\beta = \frac{3}{2} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 2P\alpha + 2P\alpha + 2P\beta = 4P\left(\frac{3}{4} \frac{\theta}{L}\right) + 2P\left(\frac{3}{2} \theta \cdot L\right) = 6P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{\theta}{2} + \theta + \frac{3}{2} \theta + \theta \right) = 4M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$6P\theta \cdot L = 4M_p \theta$$

$$M_p = \frac{3}{2} PL$$

Mecanismo combinado de viga y cabezal acodado

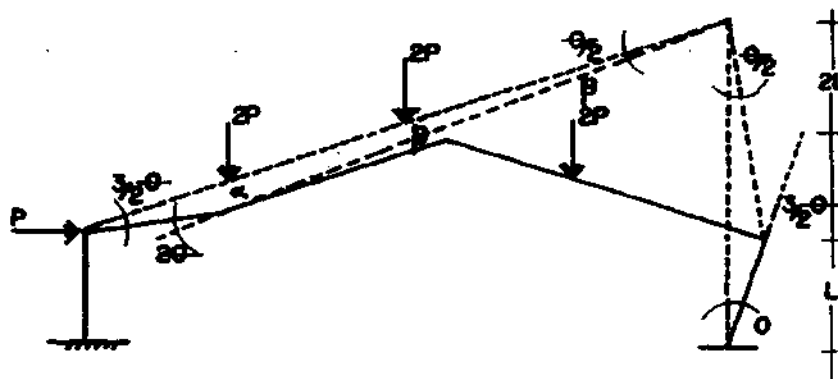


Fig. 9.17e

$$\tan \frac{3}{2} \theta = \frac{\alpha}{3L/2}$$

$$\alpha = \frac{9}{4} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{3L/2}$$

$$\beta = \frac{3}{4} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\gamma}{3L}$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = 2P\alpha + 2P\gamma + 2P\beta = 2P \left(\frac{9}{4} \theta \cdot L + \frac{3}{4} \theta \cdot L + \frac{3}{2} \theta \cdot L \right) = 9P\theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{3}{2} \theta + 2\theta + \frac{3}{2} \theta + \theta \right) = 6M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$9P\theta \cdot L = 6M_p \theta$$

$$M_p = \frac{3}{2} PL$$

Mecanismo combinado de recuadro y cabezal acodado

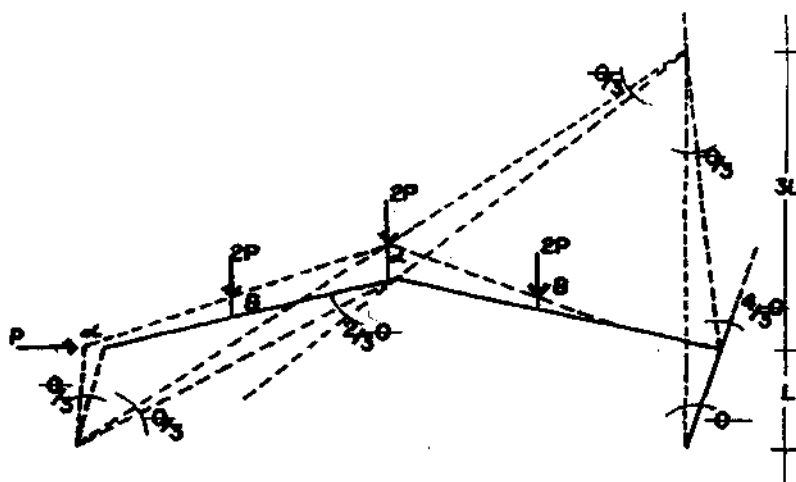


Fig. 9.17f

$$\tan \frac{\theta}{3} = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \frac{\theta \cdot L}{3}$$

$$\tan \frac{\theta}{3} = \frac{\beta}{3L/2}$$

$$\beta = \frac{\theta \cdot L}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{3} = \frac{\gamma}{3L}$$

$$\gamma = \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 4P\beta + 2P\gamma = \frac{P\theta \cdot L}{3} + 2P\theta \cdot L + 2P\theta \cdot L = \frac{P\theta L + 12P\theta \cdot L}{3} = \frac{13}{3} P\theta \cdot L$$

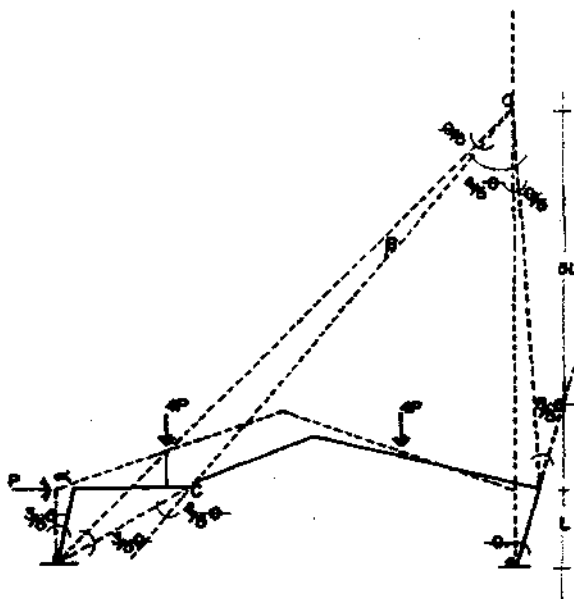
$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}\theta + \frac{4}{3}\theta + \theta \right) = \frac{10}{3} M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$\frac{13}{3} P\theta \cdot L = \frac{10}{3} P\theta \cdot L$$

$$M_p = 1.3PL$$

Mecanismo combinado de viga y recuadro



$$\tan \frac{3}{5} \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \frac{3}{5} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{3}{5} \theta = \frac{\beta}{3L/2}$$

$$\beta = \frac{9}{10} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{5} = \frac{\gamma}{3L}$$

$$\gamma = \frac{3}{5} \theta \cdot L$$

$$\tan \frac{\theta}{5} = \frac{\varepsilon}{3L/2}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{10} \theta \cdot L$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = P\alpha + 2P\beta + 2P\gamma + 2P\varepsilon = \frac{3}{5} P\theta \cdot L + 2P \left(\frac{9}{10} \theta \cdot L + \frac{3}{5} \theta \cdot L + \frac{3}{10} \theta \cdot L \right) = \frac{21}{5} P\theta \cdot L$$

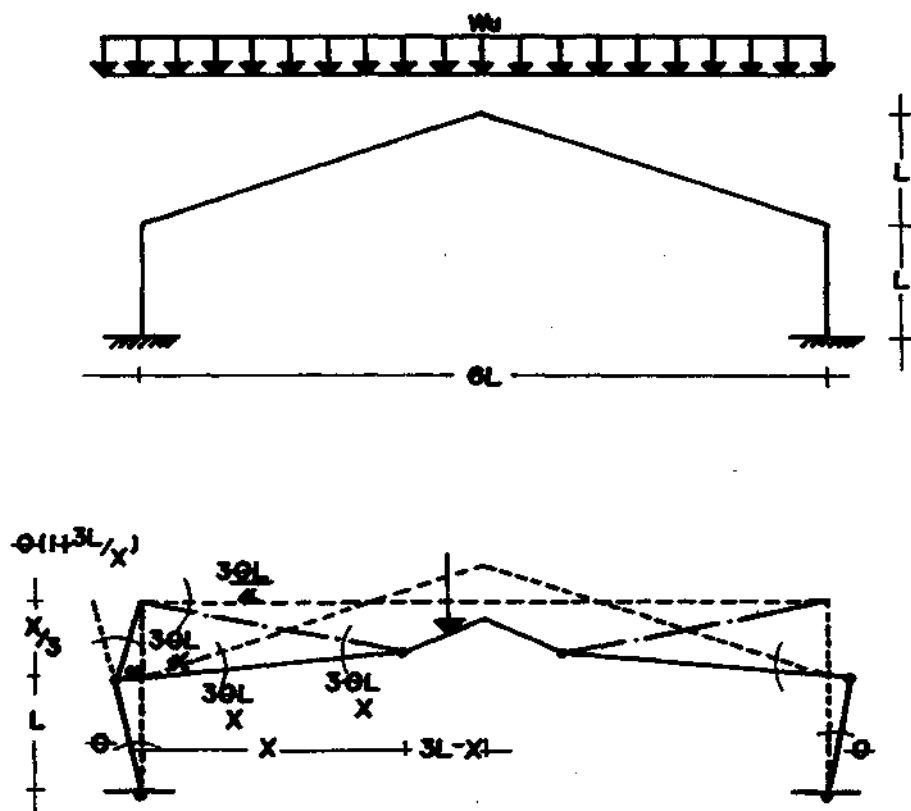
$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\frac{3}{5} \theta + \frac{4}{5} \theta + \frac{6}{5} \theta + \theta \right) = \frac{18}{5} M_p \theta$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

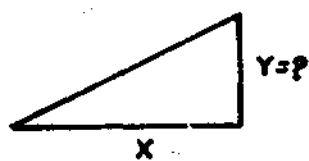
$$\frac{21}{5} P\theta \cdot L = \frac{18}{5} M_p \theta$$

$$M_p = 1.16 PL$$

Ejemplo 9.18 Análisis de marcos con carga uniforme.



POR RELACION DE TRIANGULOS SEMEJANTES:



$$\frac{Y}{L} = \frac{X}{3L}$$

$$Y = \frac{X}{3}$$

Fig. 9.18

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{L}$$

$$\alpha = \theta \cdot L$$

$$\frac{3\alpha}{x} = \tan \phi$$

$$\frac{3\theta \cdot L}{x} = \phi$$

$$\theta + \frac{\theta \cdot L}{x} = \frac{\theta \cdot x + 3\theta \cdot L}{x} = \theta \left(1 + \frac{3L}{x} \right)$$

$$W_y = W_u \sin \theta = W_u \sin \phi = W_u \phi = W_u \frac{3\theta \cdot L}{x}$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = W_u \frac{3\theta \cdot L}{x} \cdot \frac{x \cdot x}{2} + W_u \frac{3\theta \cdot L}{x} (3L - x)x = \frac{W_u 3\theta \cdot L}{x} \left(\frac{x^2}{2} + (3L - x)x \right)$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Externo} = M_p \left(\theta + \theta + \frac{3\theta \cdot L}{x} + \frac{3\theta \cdot L}{x} \right) = M_p \cdot \theta \left(2 + \frac{6L}{x} \right)$$

$$\text{Trabajo} \cdot \text{Interno} = \text{Trabajo} \cdot \text{Externo}$$

$$\frac{W_u 3\theta \cdot L}{x} \left(\frac{x^2}{2} + (3L - x)x \right) = M_p \theta \left(2 + \frac{6L}{x} \right)$$

$$W_u = 1.88$$

$$L = 20$$

$$M_p \left(2 + \frac{120}{x} \right) = \frac{112.8}{x} \left(\frac{x^2}{2} + (60 - x)x \right)$$

$$M_p (2x + 120) = \frac{112.8}{2} x^2 + 6768x - 112.8x^2$$

$$M_p (2x + 120) = 56.4x^2 + 6768x - 112.8x^2 \rightarrow (\div 2)$$

$$M_p (x + 60) = 3384x - 28.2x^2$$

$$M_p = \frac{3384x - 28.2x^2}{x + 60}$$

$$M_p' = \frac{x + 60 D_x (3384x - 28.2x^2) - (3384x - 28.2x^2) D_x (x + 60)}{(x + 60)^2}$$

$$M_p' = \frac{(x + 60)(3384 - 56.4x) - (3384x - 28.2x^2)}{(x + 60)^2}$$

$$M_p' = \frac{203040 - 3384x - 28.2x^2}{(x + 60)^2} = 0$$

$$28.2x^2 + 3384x - 203040 = 0$$

$$x = 43.92$$

10. PROPUESTA DEL TRABAJO, PARA IMPLEMENTARLO EN LOS CURSOS DE ESTRUCTURAS DE ACERO EN EL PLAN DE ESTUDIO DE LA LICENCIATURA DE INGENIERIA CIVIL Y LA MAESTRIA EN INGENIERIA, ESPECIALIDAD ESTRUCTURAS.

Uno de los objetivos de este trabajo es tener unos apuntes, acompañados de ejemplos, que sirvan de introducción al tema de Análisis y Diseño Plástico al estudiante de la maestría en estructuras y al alumno de licenciatura en Ingeniería Civil, cursos afines o personas con deseos de conocer el análisis y diseño plástico y que se aplica a estructuras de acero sencillas.

Al hacer un análisis del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Civil vigente a la elaboración de este trabajo, este cuenta con 78 materias distribuidas en 3 áreas de formación: La básica, Profesional e integración.

El perfil del egresado de la licenciatura en ingeniería civil es poseer una formación integral que incluya el dominio de las áreas: Matemáticas y sistemas, Estructuras, Construcción y Administración, Geotécnia, Hidráulica e Investigación.

Este trabajo puede complementar los cursos del área profesional en el campo de las estructuras y en particular en la materia de **Estructuras de Acero**.

El curso de Estructuras de Acero contempla, 3 horas teóricas semanales, 1 hora práctica semanal, lo cual da un total de 60 horas clase.

El objetivo general de la asignatura es que el alumno conozca el comportamiento y el dimensionamiento de elementos estructurales de acero ante las diversas condiciones de carga, bajo el criterio de diseño por factores de carga y resistencia. Y Estudiar los casos de comportamiento elástico y plástico

El curso de Estructuras de Acero es básico y constituye un antecedente para cursos de posgrado en estructuras.

Contenido temático del curso para licenciatura.

1. Materiales

Objetivo: Ubicar la industria del acero en México y su calidad, identificar las propiedades del acero y su influencia en el comportamiento de las estructuras metálicas.

Horas clase para este tema 6 horas.

- 1.1 Producción del acero en México
- 1.2 Propiedades mecánicas y cinemáticas
- 1.3 Efectos de temperatura
- 1.4 Acero estructural
- 1.5 Acero para remaches
- 1.6 Acero para tornillos
- 1.7 Tipos de falla
- 1.8 Comportamiento del acero

2. Tensión y compresión

Objetivo: Analizar el comportamiento aislado de elementos sujetos a tensión o compresión y definir su resistencia.

Diseño de elementos a tensión y compresión sobre la base de especificaciones y reglamentos.

Definición de los rangos elástico e inelástico.

8 horas clase

- 2.1 Piezas en tensión, sección neta.**
- 2.2 Procedimiento de diseño**
- 2.3 Piezas en compresión**
- 2.4 Inestabilidad**
- 2.5 Pandeo elástico y carga crítica**
- 2.6 Pandeo inelástico**
- 2.7 Diseño de elementos a compresión**
- 2.8 Estructuras que trabajan a tensión y compresión**
- 2.9 Curvas de diseño**
- 2.10 Esfuerzos residuales**
- 2.11 Especificaciones para diseño**

3. Flexión

Objetivo: Estudiar el comportamiento a flexión de una viga, tanto en el rango elástico como en el plástico.

Revisar especificaciones de diseño.

10 horas clase

- 3.1 Flexión simple**
- 3.2 Comportamiento elástico e inelástico**

- 3.3 Carga de colapso
- 3.4 Diseño por flexión
- 3.5 Cortantes
- 3.6 Especificaciones y diseño por cortante
- 3.7 Vigas compuestas de acero y concreto

4. Torsión

Objetivo: Entender el comportamiento de secciones de acero sujetas a torsión y estudiar los criterios de diseño

4 Horas clase

- 4.1 Centro de cortantes
- 4.2 Torsión en secciones abiertas
- 4.3 Torsión en secciones huecas de pared delgada
- 4.4 Resistencia a torsión

5. Flexocompresión

Objetivo: Establecer los criterios de diseño a flexocompresión, tanto en piezas cortas y largas. Comentar los efectos de segundo orden.

10 Horas clase

- 5.1 Piezas cortas sin problemas de inestabilidad. Flexocompresión uniaxial y biaxial.
- 5.2 Piezas largas flexionadas alrededor de un eje.
- 5.3 Piezas largas en flexión biaxial.
- 5.4 Diseño por esfuerzos permisibles y diseño plástico.

6. Conexiones

Objetivo: Comprender la importancia de las conexiones para transmitir los diferentes elementos mecánicos.

Estudiar las expresiones y criterios de diseño de las diferentes conexiones que se pueden realizar

10 Horas clase

- 6.1 Conexiones atornilladas, remachadas y pasadores.
- 6.2 Esfuerzos reales
- 6.3 Sección neta
- 6.4 Consideración de diseño
- 6.5 Conexiones soldadas
- 6.6 Tipos y calidad de soldadura
- 6.7 Placas base, placas de asiento, diseño de espesores.
- 6.8 Diferentes tipos de unión de elementos

7. Análisis y diseño plástico

8. Casos prácticos

Objetivo: Aplicar los criterios de diseño a casos reales.

6 Horas clase

- 8.1 Ejemplos de diseño de estructuras de acero
- 8.2 Naves industriales, edificios y otros.

En el tema 7 es en donde puede este trabajo servir de apoyo al temario de Estructuras de acero a nivel licenciatura. Con las siguientes consideraciones:

7. Análisis y diseño plástico de vigas y marcos.

Objetivo: Distinguir los aspectos principales de comportamiento plástico del acero y aplicarlo a estructuras sencillas.

7.1 (Capítulo 1) Introducción al análisis y diseño plástico.

1 hora clase.

7.2 (Capítulo 2) Bases de la teoría plástica. 1 horas clase

7.3 (Capítulo 3) Vigas hiperestáticas de un solo claro.

2 horas clase.

7.4 (Capítulo 5) Marco de un piso y una crujía. 2 horas clase

Las sugerencias metodológicas son:

7.1 Exposición del catedrático para introducir al alumno en el análisis y diseño plástico.

7.2 Solicitar al alumno una investigación preliminar de los conceptos básicos, reforzado con exposición y explicación por parte del catedrático.

7.3 Explicación del catedrático de los conceptos fundamentales, comentar en clase el ejemplo 3.2.1, 3.2.2 que hacen referencia al método de equilibrio, y como ejercicio al alumno el ejercicio 3.2.3 y 3.2.4

Para aplicar el método del trabajo virtual explicar el ejemplo 3.4.1.

7.4 Explicación del ejercicio 5.1.1 para análisis y diseño plástico de un marco una crujía así como el 5.4.1 para un marco de sección variable. Se recomienda como ejercicio de tarea resolver el ejemplo 5.5.1

Para la parte de ejercicios se recomienda que el alumno resuelva algunos de los que se encuentran en el anexo de ejercicios de análisis plástico, con el fin de practicar el análisis plástico. Estos ejercicios sólo son de análisis plástico, la parte de diseño es muy sencilla y por esa razón se omite en este anexo.

Los recursos didácticos para el catedrático son el uso de acetatos para la explicación de ejercicios, uso de fotografías para apoyo de explicación y de ser posible videos.

Para la evaluación de esta parte, realizar una investigación en normas y reglamentos, y realizar una evaluación por escrito de este tema.

Planteamiento para Maestría

El análisis del plan de estudios de la maestría en estructuras, que consta de 9 materias: Matemáticas aplicadas, mecánica estructural, métodos numéricos, Teoría de las estructuras I, Diseño avanzado de estructuras de concreto, Ingeniería sísmica, Teoría general de las estructuras II, Diseño avanzado de estructuras de acero y Cimentaciones. Y 3 seminarios: Seminario de investigación, Seminario de dinámica estructural y Seminario de tesis.

El perfil del egresado de la maestría en estructuras es poseer una formación completa en el área de estructuras, así como fomentar la investigación.

Este trabajo puede complementar el curso de **Diseño avanzado de estructuras de acero**.

El curso de Diseño avanzado de Estructuras de Acero contempla, 3 horas teóricas semanales, para un total de 36 a 40 horas clase.

El objetivo general de la asignatura es desarrollar los métodos de análisis plástico de estructuras y aplicarlos a aquellas construidas con acero. Establecer criterios respecto a los materiales que se tienen en el mercado y sus características. Comparar los criterios de diseño elástico, plástico y factores de carga y resistencia en todos sus casos.

Contenido temático del curso para maestría.

1. Introducción y programa. 30 minutos
2. Criterios de diseño. 15 minutos
3. El acero en México. 15 minutos
4. Materiales y especificaciones. 30 minutos
5. Conceptos elásticos y plásticos del comportamiento del acero. 1 1/2 hora clase.

En este tema es donde algunos temas de este trabajo pueden servir de apoyo.

5.1 Capítulo 1. Introducción

5.2 Capítulo 2. Bases de la teoría plástica. 1 hora clase

6. Propiedades geométricas de las secciones. 1 hora clase

7. Tensión. 3 horas clase

7.1 Introducción

7.2 Diseño elástico y plástico.

8. Flexión y cortante. 5 horas clase

8.1 Introducción

8.2 Comportamiento de vigas en flexión.

En este tema se puede incluir los capítulos correspondientes a este trabajo como:

8.3 Capítulo 3 Vigas hiperestáticas de un solo claro. En el que se incluye los métodos de análisis de equilibrio y del trabajo virtual. 2 horas clase.

8.4 Capítulo 4 Análisis y diseño plástico de vigas continuas. 2 horas clase

9. Torsión. 3 horas clase

9.1 Introducción

- 9.2 Torsión pura.
- 9.3 Torsión en diferentes secciones transversales.
- 9.4 Comentarios sobre torsión en estructuras.

10. Compresión (Columnas aisladas). 4 horas clase

- 10.1 Introducción
- 10.2 Inestabilidad.
- 10.3 Pandeo elástico.
- 10.4 Pandeo por flexión.
- 10.5 Obtención de curvas para diseño.
- 10.6 Fórmulas de diseño.
- 10.7 Fórmulas empíricas.
- 10.8 Diseño basado en resistencia última.

11. Pandeo lateral de vigas. 3 horas clase

- 11.1 Introducción
- 11.2 Pandeo lateral elástico e inelástico.
- 11.3 Diseño de vigas ante pandeo lateral.
- 11.4 Fórmulas para determinar la carga crítica de pandeo.
- 11.5 Especificaciones de diseño.

12. Flexocompresión. 3 horas clase

- 12.1 Introducción
- 12.2 Comportamiento de barras en flexocompresión.
- 12.3 Piezas cortas.
- 12.4 Piezas largas.
- 12.5 Piezas largas en flexión biaxial.
- 12.6 Especificaciones de diseño.

13. Placas. 2 horas clase

- 13.1 Introducción
- 13.2 Placas comprimidas en una dirección
- 13.3 Placas sometidas a cortante
- 13.4 Placas atiesadas
- 13.5 Aplicación de la teoría del pandeo de placas al diseño de miembros estructurales.

14. Trabes armadas. 3 horas clase

- 14.1 Introducción
- 14.2 Criterios de diseño
- 14.3 Diseño por resistencia al pandeo
- 14.4 Diseño por resistencia real.

15. Marcos rígidos. 5 horas clase

- 15.1 Introducción

En este tema se puede incluir los capítulos siguientes del trabajo:

- 15.2 Capítulo 5. Análisis y diseño de marcos de un piso y una crujía. 2 horas clase
- 15.3 Capítulo 6. Marcos de un piso y de varios claros. 2 horas clase

Las sugerencias metodológicas son:

- 5.1 Exposición del catedrático para introducir al alumno en el análisis y diseño plástico.
 - 5.2 Solicitar al alumno una investigación preliminar de los conceptos básicos, reforzado con exposición y explicación por parte del catedrático.
 - 8.3 Explicación del catedrático de los conceptos fundamentales, comentar en clase el ejemplo 3.2.1, 3.2.2 que hacen referencia al método de equilibrio, y como ejercicio al alumno el ejercicio 3.2.3 y 3.2.4
- Para aplicar el método del trabajo virtual explicar el ejemplo 3.4.1.

8.4 Explicación del ejemplo 4.2.1 para análisis y diseño de vigas de sección variable. Ejemplo 4.4.1 para vigas de más de dos claros.

15.2 Explicación del ejercicio 5.1.1 para análisis y diseño plástico de un marco una crujía así como el 5.4.1 para un marco de sección variable. 5.8.1 Marco con carga uniforme. Se recomienda como ejercicio de tarea resolver el ejemplo 5.5.1

15.3 Explicación del ejercicio 6.1.1. para combinación de mecanismos

Para la parte de ejercicios se recomienda que el alumno resuelva algunos de los que se encuentran en el capítulo 9 de ejercicios de análisis plástico, con el fin de practicar el análisis plástico. Estos ejercicios sólo son de análisis plástico, la parte de diseño es muy sencilla y por esa razón se omite en este anexo.

Los recursos didácticos para el catedrático son el uso de acetatos para la explicación de ejercicios, uso de fotografías para apoyo de explicación y de ser posible videos. Además con visitas de campo a talleres de fabricación y sitios de montaje.

Para la evaluación de esta parte, realizar una investigación en normas y reglamentos, y realizar una evaluación por escrito de este tema.

11. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Se puede establecer que el uso en vigas continuas y estructuras pequeñas de uno o dos pisos, tiene sus ventajas: Rapidez en la obtención de los momentos de diseño, se economiza algo en acero, porque es posible usar secciones más ligeras y da una idea del modo de colapso y la resistencia de la estructura.

El análisis y diseño plástico, debe ser incluido en los programas de licenciatura de la carrera de ingeniero civil, como una introducción en el curso de acero, pero sentando las bases e inquietud en el futuro ingeniero, en utilizar las bondades que ofrece el análisis plástico, se recomienda revisar los ejemplos básicos, que por su simplicidad, permite la comprensión para su aplicación a estructuras más complejas.

Para maestría, es indispensable que el ingeniero conozca y aplique, ya sea en el campo del ejercicio profesional o en el académico, el análisis y diseño plástico, por lo que en el curso de diseño avanzado de estructuras de acero, debe contemplarse en mayor parte del programa del curso de esta materia a nivel maestría.

Las sugerencias de tiempos propuesta en este trabajo, para los dos niveles académicos, puede ser flexible, pero es muy importante aplicar la teoría a ejercicios prácticos que permiten la comprensión total del análisis plástico.

Finalmente un agradecimiento a la institución y en particular a la facultad de ingeniería civil de la UPAEP, por el apoyo a este trabajo, que pretende principalmente en servir como apuntes para los estudiantes en su inicio en el estudio del análisis plástico.

12. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Bresles, Lin, Scalzi. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. LIMUSA

De Buen, Oscar. ESTRUCTURAS DE ACERO, COMPORTAMIENTO Y DISEÑO. LIMUSA.

Johnston, Galambos. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. Prentice Hall.

Lothers. CÁLCULO SUPERIOR DE ESTRUCTURAS DE ACERO. CECSA.

L. Tall. STRUCTURAL STEEL DESIGN. Ronald Press Co. N.Y.

Facultad de Ingeniería. APUNTES DE ESTRUCTURAS DE ACERO. UNAM

Maestría en Estructuras. APUNTES DEL CURSO ESTRUCTURAS DE ACERO. UPAEP.

TABLAS

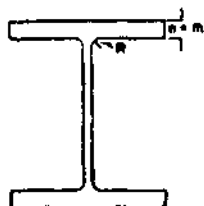
TABLA A. TABLA DE MOMENTOS PLASTICOS

(Basada en $F_y = 33 \text{ kips/plg}^2$)

M_p kip-pie	Sección	M_p kip-pie	Sección	M_p kip-pie	Sección	M_p kip-pie	Sección
3490	36 WF 300	696	24 WF 94	285	18 I 54.7	80.7	12 B 22
3210	36 WF 280	682	18 WF 114	282	14 WF 61	77.1	10 I 25.4
2960	36 WF 260	667	14 WF 136			74.5	8 WF 28
2770	36 WF 245	657	24 I 100	277	18 WF 98		
		623	18 WF 105	269	10 WF 77	68.1	12 B 19
2590	36 WF 230	622	21 WF 96				
2520	33 WF 240	621	14 WF 127	255	14 WF 98	67.1	14 B 17.2
				249	10 WF 72	66.3	10 WF 21
2300	33 WF 220	616	24 WF 84	240	14 WF 53	64.4	8 M 24
		606	24 I 90	238	12 WF 58	63.5	8 WF 24
2110	36 WF 194	578	14 WF 119	228	10 WF 66	59.3	10 B 19
2080	33 WF 200	577	12 WF 133				
2020	30 WF 210	567	18 WF 96	226	14 WF 45	56.7	12 B 16.5
				216	14 WF 48	52.7	8 I 23
1972	36 WF 182	558	24 I 79.9	215	12 WF 53	52.5	8 WF 20
				210	15 I 50	52.3	6 WF 25
1833	36 WF 170	550	24 WF 76	207	10 WF 60	51.2	10 B 17
1814	30 WF 190	539	14 WF 111			49.1	6 M 25
		528	20 I 95	200	16 WF 40	48.0	8 M 20
1714	36 WF 160	527	21 WF 82	200	12 WF 50	45.0	8 I 18.4
1631	30 WF 172	513	12 WF 120	192.8	8 WF 67		
		512	16 WF 96	191.5	14 WF 43	43.9	10 B 15
1594	36 WF 150	488	18 WF 85	188.6	15 I 42.9	43.4	8 WF 17
1535	33 WF 152	488	20 I 85	184.2	10 WF 54	41.4	6 WF 20
1532	27 WF 177			178.4	12 WF 45	40.0	6 M 20
		473	21 WF 73			39.5	7 I 20
1411	33 WF 141	465	16 WF 88	173.7	16 WF 36		
1387	27 WF 160	449	12 WF 106	169.1	14 WF 38	39.1	12 Jt 11.8
		441	18 WF 77	166.8	12 I 50	37.4	8 B 15
1282	33 WF 130			164.7	8 WF 58	32.8	7 I 15.3
1275	24 WF 160	439	21 WF 68	158.4	12 WF 40	31.9	6 B 16
1243	27 WF 145	417	12 WF 99	151.1	10 WF 45	31.2	8 B 13
1201	30 WF 132	417	20 I 75			31.2	5 WF 18.5
1144	24 WF 145	406	10 WF 112	149.9	14 WF 34	30.5	5 M 18.9
		400	14 WF 84	144.2	12 I 40.8	28.8	6 I 17.25
1120	30 WF 124	400	16 WF 78	141.4	12 WF 36	26.4	5 WF 16
		398	18 WF 70	134.8	8 WF 48		
1038	30 WF 116					25.4	10 Jt 9
1015	24 WF 130	396	21 WF 62	129.5	14 WF 30	23.0	6 I 12.5
982	21 WF 142	386	12 WF 92	129.1	10 WF 39	22.7	6 B 12
		378	20 I 65.4	122.0	12 I 35	20.3	5 I 14.75
950	30 WF 100	369	14 WF 78	120.9	12 WF 31	17.3	4 WF 13
943	27 WF 114	362	18 WF 64	114.3	12 I 31.8	16.8	4 M 13
926	24 WF 120	362	16 WF 71	109.7	8 WF 40	15.3	5 I 10
874	21 WF 127	358	10 WF 100				
857	12 WF 150	355	12 WF 85	104.4	12 WF 27	15.0	8 Jt 6.5
846	24 WF 110	345	14 WF 74	96.7	10 I 35		
		340	18 I 70	95.4	10 WF 29	11.1	7 Jt 5.5
837	27 WF 102			95.4	8 WF 35	11.1	4 I 9.5
820	24 I 120	337	18 WF 60			9.5	4 I 7.7
		328	12 WF 79	81.1	10 WF 25		
765	24 WF 100	324	16 WF 64			7.8	6 Jt 4.4
765	21 WF 112	316	14 WF 68			6.4	3 I 7.5
		315	10 WF 89			5.3	3 I 5.7
764	27 WF 94						
751	24 I 105.9	307	18 WF 58				
713	12 WF 161	292	16 WF 58				

* De Plastic Design in Steel, American Institute of Steel Construction Inc. Usado con autorización.

TABLA A

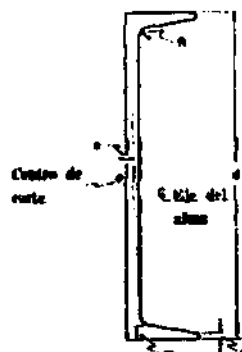


**DIMENSIONES Y CONSTANTES
DE TORSION DE VIGAS LIVIANAS Y DE ALA
ANCHA CON PATINES DE CARAS PARALELAS**

Peso (lb/pie)	*K (pie ⁴)	m = n (pie)	Peso (lb/pie)	*K (pie ⁴)	m = n (pie)	Peso (lb/pie)	*K (pie ⁴)	m = n (pie)
14 × 16 (R = 0.60pie)			14 × 12 (R = 0.60pie)			(12 × 8 (R = 0.60pie)		
426	338.60	3.033	84	4.48	0.778	50	1.82	0.641
398	278.71	2.843	78	3.57	0.718	45	1.34	0.576
370	226.99	2.658				40	0.97	0.516
342	181.48	2.468	14 × 10 (R = 0.60pie)			10 × 10 (R = 0.50pie)		
314	142.60	2.283	74	3.92	0.783	112	15.31	1.248
287	109.96	2.093	68	3.06	0.718	100	11.05	1.118
264	86.86	1.938	61	2.22	0.643	89	7.88	0.998
246	70.93	1.813	14 × 8 (R = 0.60pie)			77	5.19	0.868
237	63.63	1.748	53	1.97	0.658	72	4.23	0.808
228	57.10	1.688	48	1.47	0.593	66	3.32	0.748
219	50.72	1.623	43	1.06	0.528	60	2.53	0.683
211	45.49	1.563	12 × 12 (R = 0.60pie)			54	1.87	0.618
202	40.22	1.503	190	49.96	1.736	49	1.39	0.558
193	35.21	1.438	161	31.20	1.486	10 × 8 (R = 0.50pie)		
184	30.80	1.378	133	17.95	1.236	45	1.53	0.618
176	26.87	1.313	120	13.13	1.106	33	0.99	0.433
167	23.08	1.248	106	9.23	0.986	8 × 8 (R = 0.40pie)		
158	19.79	1.188	99	7.54	0.921	67	5.14	0.933
150	16.96	1.128	92	6.09	0.856	58	3.37	0.808
142	14.39	1.063	85	4.87	0.796	48	1.99	0.683
14 × 14½ (R = 0.60pie)			79	3.90	0.736	40	1.13	0.558
136	13.69	1.063	72	2.98	0.671	35	0.78	0.493
127	11.22	0.998	65	2.21	0.606	31	0.54	0.433
119	9.31	0.938	12 × 10 (R = 0.60pie)			8 × 6½ (R = 0.40pie)		
111	7.56	0.873	58	2.14	0.641	28	0.54	0.465
103	6.09	0.813	53	1.61	0.576	24	0.35	0.398
95	4.75	0.748						
87	3.72	0.688						

* K es una constante de torsión análoga al momento de inercia.

TABLA B

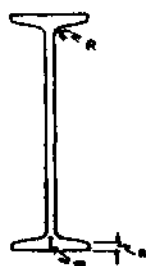


**DIMENSIONES Y CONSTANTES
DE TORSION DE CANALES AMERICANOS
NORMALES**

d (pulg)	Peso (lb/pulg)	*K (pulg ⁴)	c (pulg)	J _c (pulg ⁴)	w (pulg)	t (pulg)	d (pulg)	Peso (lb/pulg)	*K (pulg ⁴)	c (pulg)	J _c (pulg ⁴)	w (pulg)	t (pulg)
18	58.0	2.63	0.82				8	28.25	0.613	0.45			
	51.9	1.87	0.86					18.75	0.404	0.48			
	45.8	1.33	0.94	0.625	0.686	0.564		16.25	0.260	0.52	0.32	0.56	0.22
	42.7	1.12	0.96					13.75	0.170	0.56			
15							7	11.5	0.124	0.61			
	50.0	2.47	0.67					19.75	0.653	0.40			
	40.0	1.33	0.75	0.50	0.90	0.40		17.25	0.409	0.42			
	33.9	0.951	0.82					14.75	0.244	0.46	0.31	0.523	0.21
12							6	12.25	0.145	0.51			
	30.0	0.798	0.55					9.00	0.095	0.57			
	25.0	0.499	0.68	0.38	0.723	0.28		15.50	0.404	0.40			
	20.7	0.355	0.75					13.00	0.222	0.43	0.30	0.487	0.20
10							5	10.50	0.117	0.47			
	30.0	1.17	0.51					8.20	0.071	0.54			
	25.0	0.643	0.53	0.34	0.633	0.24		9.0	0.097	0.43	0.29	0.45	0.19
	20.0	0.339	0.60					6.7	0.051	0.50			
9							4	7.25	0.072	0.40	0.28	0.413	0.18
	30.0	0.394	0.53					5.40	0.036	0.46			
	15.0	0.194	0.61	0.33	0.597	0.23		6.0	0.064	0.37			
	13.4	0.161	0.65					5.0	0.037	0.39	0.27	0.377	0.17
							3	4.1	0.024	0.42			

* K es una constante de torsión análoga al momento de inercia.

TABLA C



**DIMENSIONES Y CONSTANTES
DE TORSION DE VIGAS AMERICANAS
NORMALES**

Tamaño	Peso (lb/pie)	*K (pie²)	R (pie)	m (pie)	n (pie)	Tamaño	Peso (lb/pie)	*K (pie²)	R (pie)	m (pie)	n (pie)
24 × 7½	120.0	13.15	0.60	1.404	0.80	12 × 5	35.0	1.10	0.45	0.738	0.35
	105.9	10.62					31.8	0.921			
24 × 7	100.0	7.70	0.60	1.142	0.60	10 × 4½	35.0	1.310	0.41	0.673	0.31
	90.0	6.14					25.4	0.617			
	79.9	5.01				8 × 4	23.0	0.557	0.37	0.581	0.27
20 × 7	95.0	8.55	0.70	1.183	0.65		18.4	0.344			
	85.0	6.76				7 × 3½	20.0	0.456	0.35	0.534	0.25
20 × 6½	75.0	4.66	0.60	1.029	0.55		15.3	0.246			
	65.4	3.57				6 × 3½	17.25	0.379	0.33	0.488	0.23
18 × 6	70.0	4.19	0.56	0.922	0.46		12.50	0.171			
	54.7	2.58				5 × 3	14.75	0.327	0.31	0.443	0.21
15 × 5½	50.0	2.15	0.51	0.834	0.41		10.00	0.116			
	42.9	1.57				4 × 2½	9.5	0.122	0.29	0.396	0.19
12 × 5½	50.0	2.85	0.56	0.859	0.46		7.7	0.074			
	40.8	1.78				3 × 2½	7.5	0.093			
							5.7	0.045			

* K es una constante de torsión análoga al momento de inercia.

TABLA D