



**UNIVERSIDAD POPULAR AUTONOMA
DEL ESTADO DE PUEBLA**

MAESTRIA EN ESTRUCTURAS

**ANALISIS MATRICIAL
DE ESTRUCTURAS
(METODOS DE LAS RIGIDECES)**

TRABAJO DE INVESTIGACION

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

P R E S E N T A

ING. JAIME JUAREZ BOTELLO



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyła**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. FUNDAMENTOS	4
2.1 Introducción.	4
2.2 Grados de libertad.	7
2.3 Sistemas Coordinados.	8
2.4 Idealización Estructural.	9
3. MÉTODOS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ESQUELETALES.	10
3.1 Introducción.	10
3.2 Fuerzas y desplazamientos en puntos de una barra.	14
3.3 Indeterminación estructural.	20
3.4 Método de flexibilidades.	20
3.5 Método de rigideces.	25
3.6 Comentarios.	40
4. MODELO DISCRETO ESTÁNDAR DE LA BARRA.	43
4.1 Introducción	43
4.2 Barra plana	44
4.3 Vector de fuerzas de fijación	44
4.4 Vector de desplazamientos en la barra	46
4.5 Vector de fuerzas equilibrantes	47
4.6 Matriz de rigidez	48
4.7 Barras articuladas	56
4.8 Barra tridimensional	59
5. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA ESTRUCTURA.	61
5.1 Introduce.ún	61
5.2 Sistemas de referencia	62
5.3 Transformación de coordenadas	62
5.4 Método de rigideces para resolver una estructura	68
5.5 Construcción de la matriz de rigidez de la estructura	72
5.6 Construcción del vector de fuerzas de fijación	75
5.7 Construcción del vector de fuerzas externas	75

6. ELEMENTOS MECÁNICOS Y CINEMÁTICOS DE LA ESTRUCTURA.	76
6.1 Elementos cinemáticos	77
6.2 Elementos mecánicos	78
7.EJEMPLOS	79
7.1 Introducción	79
7.2 Ejemplo	79
7.3 Solución	80
7.4 Matriz de rigidez de cada barra	82
7.5 Matriz de rigidez de la estructura	87
7.6 Vector de fuerzas de fijación	88
7.7 Caso #1 : Carga vertical	88
7.8 Caso # II : Carga horizontal	93
8. CONCLUSIONES	99
9. BIBLIOGRAFÍA.	

1. INTRODUCCION

El objetivo que se persigue al elaborar este trabajo es el contar con un material para el análisis de estructuras reticulares por el método matricial con un enfoque actualizado y enfocado a su aplicación a una computadora personal.

Existen un sinnúmero de textos de análisis matricial, sin embargo en ninguno de ellos se muestra en forma detallada los distintos pasos para resolver una estructura, la formación de vectores y matrices que intervienen en la ecuación de equilibrio de las estructuras y ejemplos detallados paso a paso.

Los apuntes que aquí se presentan, comprenden el temario de la materia Análisis Estructural II que se cursa en la carrera de Ingeniería Civil en 7° semestre de la U.P.A.E.P., también sirven de base para el curso de posgrado

de la Maestría en Estructuras para la materia de Teoría de las Estructuras I, añadiendo lo relativo a casos particulares como lo son las retículas de entrepiso, armaduras y vigas continuas, así como tratar los referentes a las estructuras tridimensionales.

El segundo capítulo comprende una introducción a la mecánica del medio continuo, y mediante este enfoque, llegar a establecer las ecuaciones constitutivas de la teoría de la elasticidad lineal, material con el que se desarrollará el método.

En el tercer capítulo se describirán los dos métodos para analizar estructuras esqueléticas: el método de flexibilidades y el método de rigideces y mediante un ejemplo paso a paso se llegará a la solución de la estructura induciendo la notación matricial.

En el capítulo cuatro, se muestra la ecuación de equilibrio de la barra una vez que se le ha definido como una barra plana de eje recto y sección constante. Se describirá la formación de los vectores y matrices que intervienen en ésta y al final del capítulo, se verá la forma que tiene la ecuación de equilibrio para la barra tridimensional.

En el capítulo cinco, una vez establecida la ecuación de equilibrio de la barra, se verá el procedimiento para formar la ecuación de equilibrio de la estructura, para esto, se definirán los conceptos de sistemas de referencia y transformación de coordenadas.

En el capítulo seis se muestra la obtención de los elementos mecánicos y cinemáticos de la estructura en base a la posición específica que tiene cada elemento .

En el capítulo siete se presenta el ejemplo de una estructura ante dos condiciones de carga. La solución se describe detalladamente con el enfoque matricial, finalizando con la obtención de los elementos mecánicos y cinemáticos, diagramas de momentos flexionantes, cortantes y normales, así como las reacciones para las dos condiciones de carga.

En el último capítulo se presentan los principales comentarios y conclusiones.

2. FUNDAMENTOS.

2.1 INTRODUCCION.

El análisis estructural involucra 3 factores:

•*Geometría* } *Estructura*
•*Material* }

•*Solicitaciones* } *Cargas*

La interacción de estos factores conduce a conocer el comportamiento (mecánico o cinemático) de la estructura.

Cada uno de estos 3 factores, los podemos subdividir de la siguiente manera:

1. Geometría

Cascarón

Placas

Sólido Axisimétrico (Revolución), como chimeneas, silos, etc.

Sólido tridimensional general

Estados planos

Barras

2. Material

- Sólidos

Elástico lineales (Ley de Hooke)

No lineales

Viscoelásticos

Plásticos

Elasto-plásticos

Etc.

- Fluidos.

Líquidos

Gases

3. Solicitaciones:

- Determinísticas

Estáticas

Dinámicas

- Estocásticas (Probabilísticas)

Estáticas.

Dinámicas.

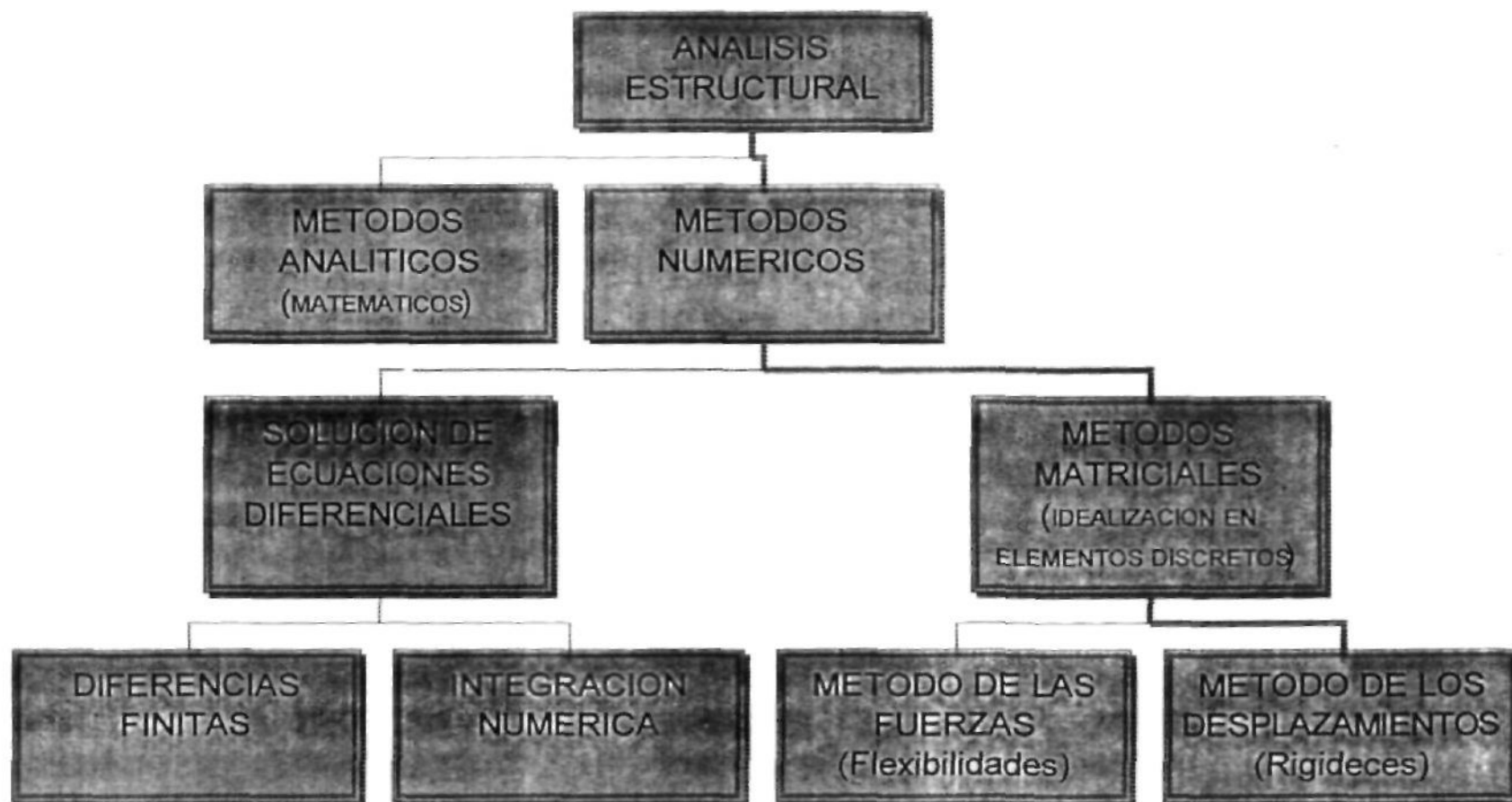


Fig. 2.1 DIAGRAMA PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS.

2.2. GRADOS DE LIBERTAD

El grado de libertad se puede definir como el número de componentes de desplazamiento en un punto de la barra o una estructura.

Barra

- Axial (1 componente de desplazamiento)
- Plana (3 componentes de desplazamiento)
- Tridimensional (6 componentes de desplazamiento)

Estructuras

Grados de Libertad

- | | |
|---------------------------|--------------|
| • Tridimensional general: | 6*(N.P.N.E.) |
| • Plana general: | 3*(N.P.N.E.) |
| • Armaduras: | |
| Tridimensional: | 3*(N.P.N.E.) |
| Plana: | 2*(N.P.N.E.) |

Donde:

N.P.N.E. es el número de puntos nodales de la estructura.

2.3. SISTEMAS COORDENADOS

Se utilizará un sistema coordenado derecho.



Fig. 2.2 Sistema unidimensional

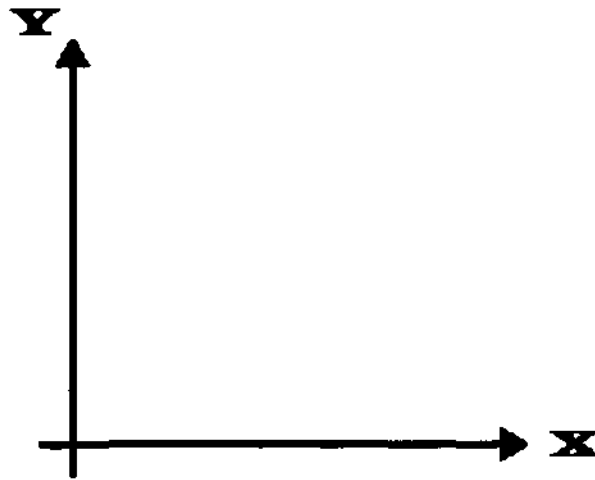


Fig. 2.3 Sistema bidimensional

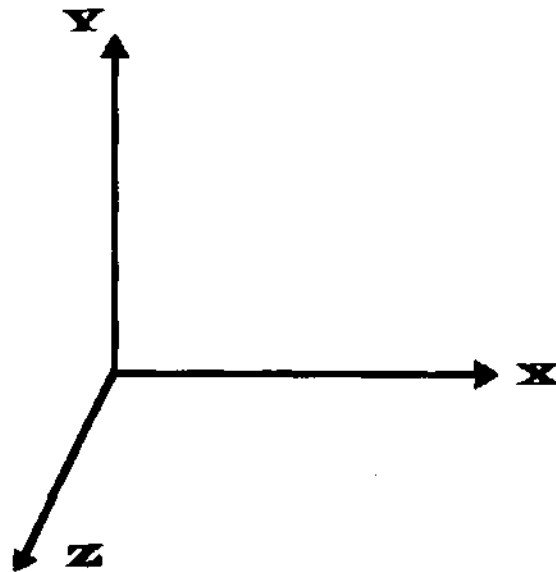


Fig.2.4. Sistema tridimensional

2.4. IDEALIZACION ESTRUCTURAL

Todas las estructuras tienen un número de grados de libertad infinito.

La idealización estructural para reducir el número de grados de libertad a un valor finito, consiste en definir a la nuestra estructura con elementos discretos. Los elementos discretos que forman a la estructura están ligadas por una conexión que puede ser a su vez discreta o continua.

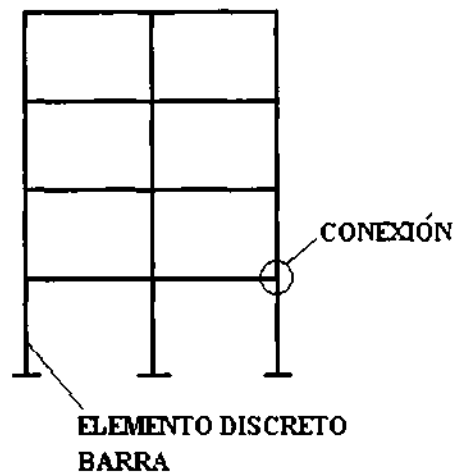


Fig. 2.5 Conexión-Barra

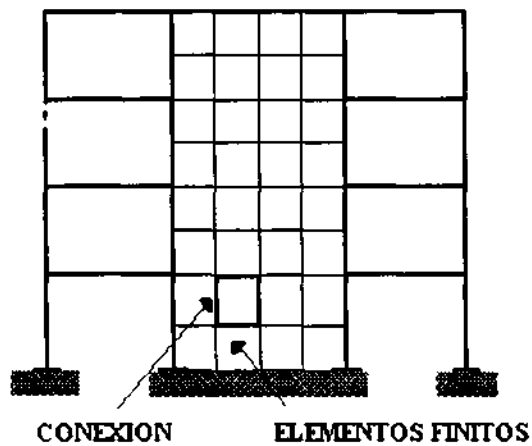


Fig. 2.6 Conexión-Elemento finito.

3. MÉTODOS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ESQUELETALES.

3.1. INTRODUCCIÓN.

3.1.1 RESUMEN DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD LINEAL.

Hipótesis: Material cuyo comportamiento es elástico lineal.

Los desplazamientos en un cuerpo son pequeños y el tensor de deformaciones es infinitesimal.

Tensor de deformaciones.

$$e_{kl} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1.2)$$

$$2 e_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1.5)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.1.3)$$

$$2 e_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.1.6)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.1.4)$$

$$2 e_{zx} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1.7)$$

Tensor de esfuerzos

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

Ecuaciones constitutivas

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{mn} \delta_{kl} - 2\mu e_{kl} \quad (3.1.9)$$

(Ley de Hooke para materiales isotrópicos).

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} e_{mn} \quad (3.1.10)$$

donde:

C_{klmn} son los parámetros o constantes elásticas.

λ, μ son las constantes de Lamé.

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.1.11)$$

ν es el módulo de Poisson.

E es el módulo de elasticidad.

3.1.2 ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

En forma explícita tenemos:

- Esfuerzos en función de deformaciones.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz}) \right] \quad (3.1.12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz}) \right] \quad (3.1.13)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy}) \right] \quad (3.1.14)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.1.15)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (3.1.16)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} \quad (3.1.17)$$

- Las deformaciones en función de los esfuerzos.

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (3.1.18)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] \quad (3.1.19)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.1.20)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{2} \gamma_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{xx} \quad (3.1.21)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{2} \gamma_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{yy} \quad (3.1.22)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{2} \gamma_{zz} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{zz} \quad (3.1.23)$$

3.1.3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO

(Ecuaciones de Cauchy)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(3.1.24)

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1.25)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1.26)$$

Donde:

ρ es la densidad de masa.

f_x, f_y, f_z son las fuerzas de cuerpo.

Al sustituir las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones de movimiento se llegan a definir las ecuaciones de Navier.

$$G \left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1.27)$$

$$G \left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.1.28)$$

$$G \left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1.29)$$

Las expresiones anteriores establecen el modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

3.2 FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS EN PUNTOS DE UNA BARRA.

Barra.- Es un elemento tridimensional en donde dos de sus dimensiones son pequeñas en relación a la tercera.

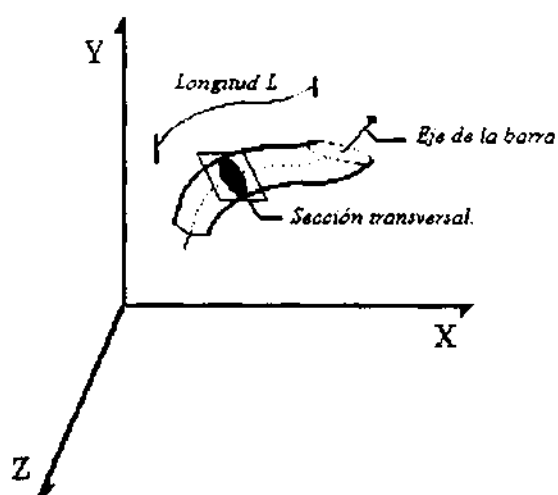


Fig. 3.1 Barra tridimensional.

La barra quedará definida por su geometría:

- Eje de la barra
- Sección transversal.

La barra que se estudiará será de: **eje recto** y de **sección transversal constante**.

3.2.1 FUERZAS EN PUNTOS DE UNA BARRA.

Los esfuerzos que nos interesará conocer en la sección transversal de la barra serán dos esfuerzos cortantes (σ_{xz} , σ_{zy}) y un esfuerzo normal (σ_{xx}).

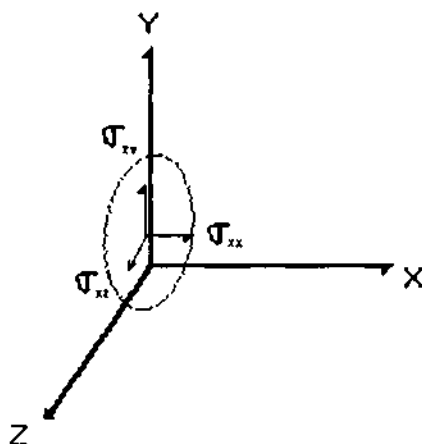


Fig. 3.2 Esfuerzos en una sección transversal.

3.2.2 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS NORMALES:

Las hipótesis que se consideran para la distribución de los esfuerzos normales, son:

1. Hipótesis de Navier.

Las secciones planas y normales al eje de la barra antes de la deformación, permanecen planas y normales al eje después de la deformación.

2. Los esfuerzos normales en una barra son independientes.

$$\sigma_x, \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (\nu = 0)$$

Para el caso de ejes centroidales la distribución de esfuerzos será:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y I_{yz} + M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} Y - \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_{yz}^2 - I_y I_z} Z \quad (3.2.1)$$

Donde:

N_x es el esfuerzo normal.

M_y es el momento alrededor del eje Y.

M_z es el momento alrededor del eje Z.

A es el área de la sección.

I_{yz} es el momento polar.

Si los ejes son centroidales y principales

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} Y - \frac{M_y}{I_y} Z \quad (3.2.2)$$

3.2.3. DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CORTANTES.

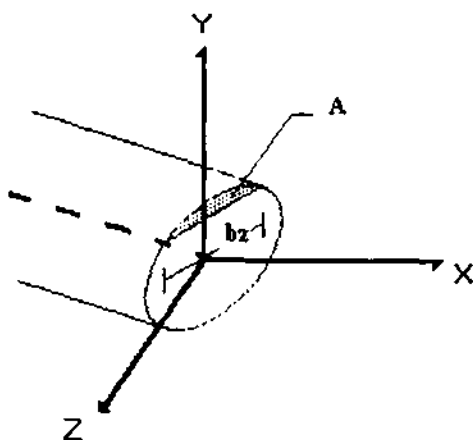


Fig 3.3 Sección transversal.

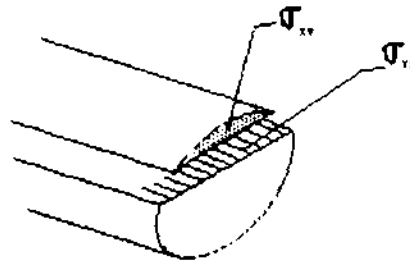


Fig. 3.4 Esfuerzo cortante en sección transversal.

Para un sistema de referencia centroidal la distribución será:

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{b_z} \left(\frac{I_{yz} \bar{Q}_z - I_z \bar{Q}_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} V_z - \frac{I_y \bar{Q}_z - I_{yz} \bar{Q}_y}{I_{yz}^2 - I_y I_z} V_y \right) \quad (3.2.3)$$

Donde:

Q_z es el momento estático con respecto a Z

Q_y es el momento estático con respecto a Y

V_z es el cortante paralelo a Z

V_y es el cortante paralelo a Y

b_z es la base en la sección.

Para una referencia centroidal y principal será:

$$\sigma_{yx} = \frac{V_z \bar{Q}_y}{I_y b_z} + \frac{V_y \bar{Q}_z}{I_z b_z} \quad (3.2.4)$$

3.2.4 FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS EN UNA SECCION TRANSVERSAL DE UNA BARRA.

En una barra existen los elementos mecánicos (Fuerzas) y los elementos cinemáticos (Desplazamientos)

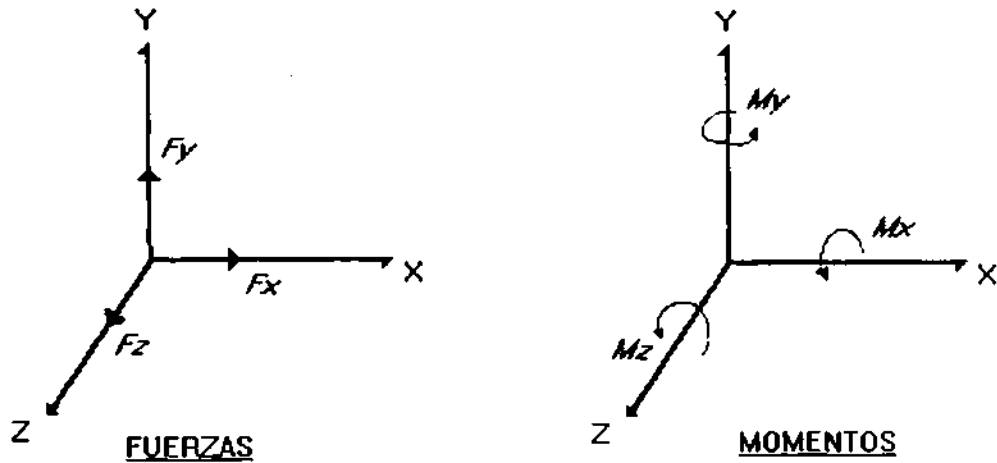


Fig. 3.5 Fuerzas Generalizadas.

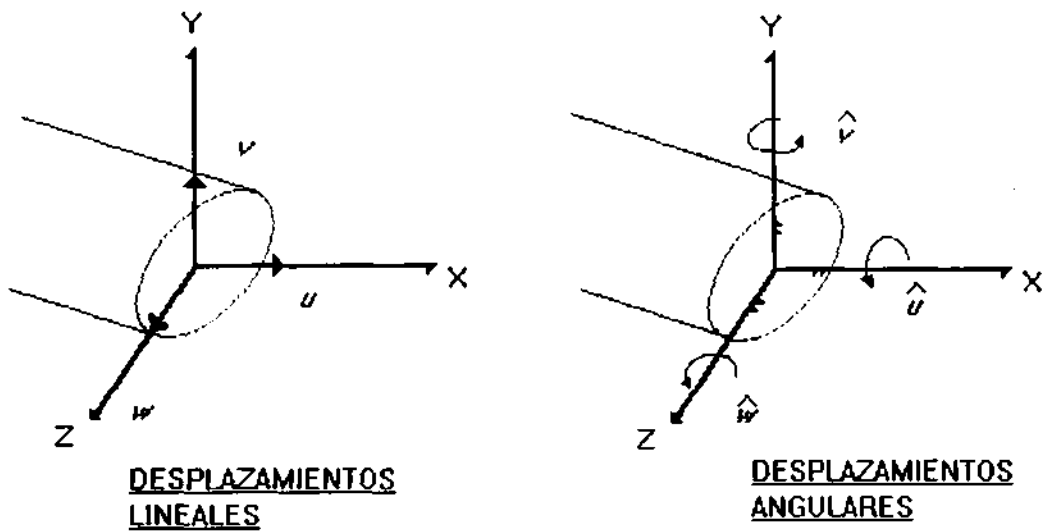


Fig. 3.6 Desplazamientos Generalizados.

Para una barra plana:

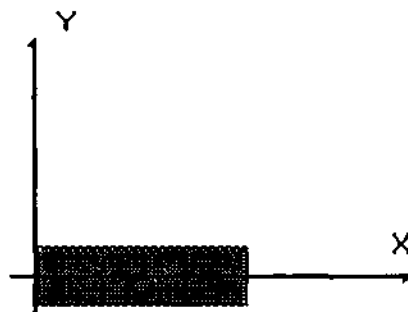


Fig. 3.7 Barra plana.

las fuerzas y desplazamientos generalizados serán:

$$\text{Fuerzas generalizadas} \begin{cases} F_x \\ F_y \\ M_z \end{cases}$$

$$\text{Desplazamientos generalizados} \begin{cases} u \\ v \\ \varphi \end{cases}$$

En cualquier tipo de estructuras, ya sea isostática o hiperestática, las cantidades que se involucran son fuerzas y desplazamientos.

En el caso hiperestático es necesario elegir a las fuerzas o a los desplazamientos como incógnitas y a partir de esta elección, se definen las dos grandes corrientes del análisis estructural:

Método de flexibilidades.

Método de rigideces.

INCOGNITAS	METODO
FUERZAS	METODO DE LAS FUERZAS O METODO DE LAS FLEXIBILIDADES (compatibilidad)
DESPLAZAMIENTOS	METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS O DE LAS RIGIDECES (equilibrio)

Tabla 3.1 Métodos de análisis

3.3 INDETERMINACION ESTRUCTURAL

Si las incógnitas son las fuerzas, se tendrá el caso de una indeterminación estática (Grado de Hiperestaticidad).

En el caso de tener como incógnitas a los desplazamientos, se hablará de una indeterminación cinemática.

3.4 METODO DE FLEXIBILIDADES

En una referencia centroidal y principal, el modelo matemático para una barra plana es:

$$EA \frac{du}{dx} = N_x^e \quad (3.4.1)$$

$$EI_z = \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e \quad (3.4.2)$$

$$EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \phi_y L^2 V_s^e \quad (3.4.3)$$

El planteamiento para resolver la estructura de la Fig. 3.8 por el método de flexibilidades se presenta a continuación.

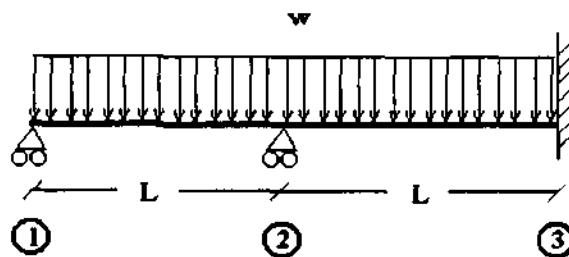


Fig. 3.8 Viga hiperestática.

Determinación del grado de hiperestaticidad

5 Incógnitas.

3 Ecuaciones de estática.

2 (Grado de hiperestaticidad)

La viga se descompone por el principio de superposición de la siguiente manera.

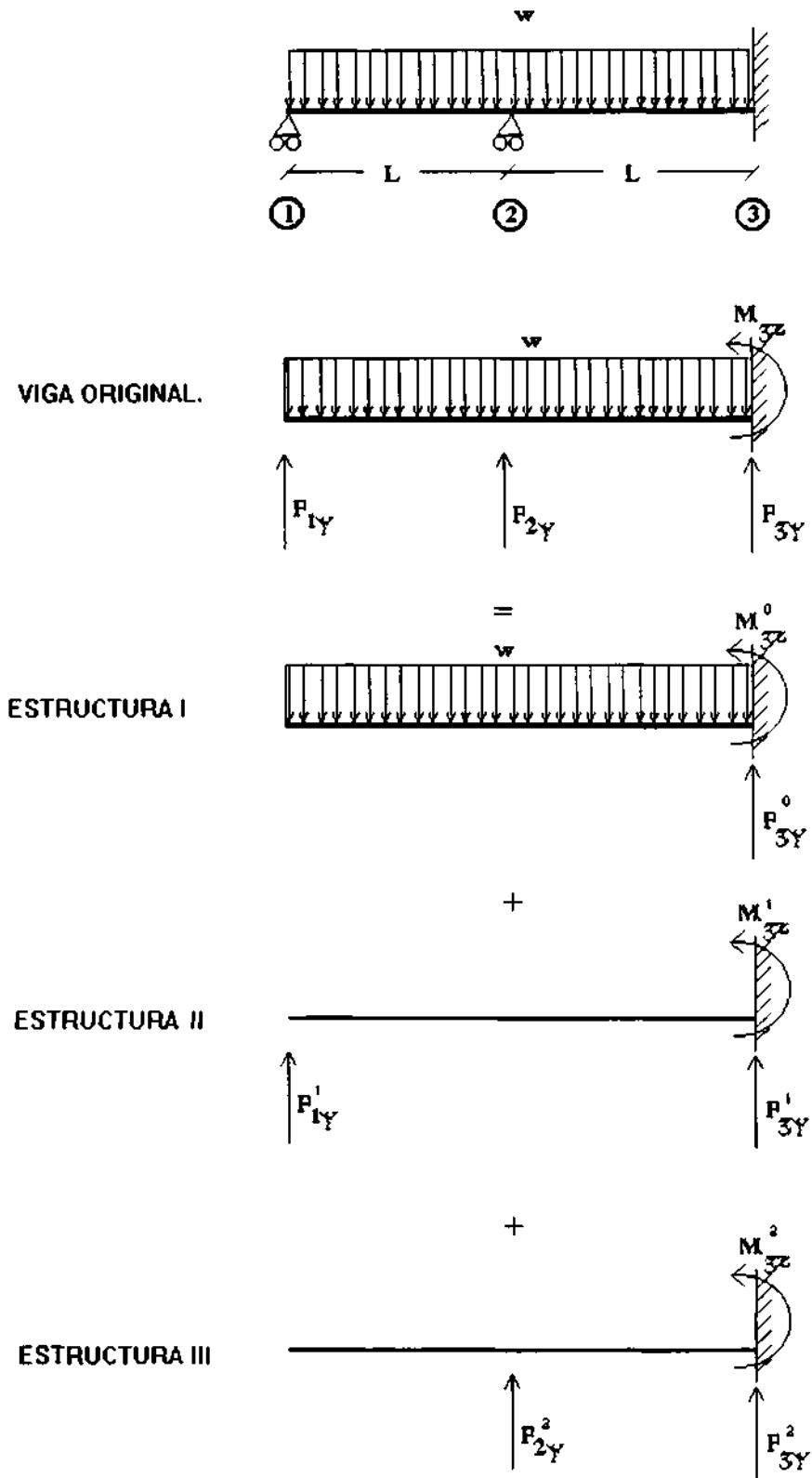


Fig. 3.9 Superposición de cargas.

La estructura I se conoce con el nombre de estructura primaria o isostática. La carga en las estructuras II y III se debe a las redundantes.

Nota: Redundante es cada una de las fuerzas que se eliminan para convertir a la estructura en isostática.

CONDICIONES:

$$\delta_1^0 + \delta_1^1 + \delta_1^2 = 0 \quad (3.4.4)$$

$$\delta_2^0 + \delta_2^1 + \delta_2^2 = 0 \quad (3.4.5)$$

$$F_{3Y} = F_{3Y}^0 + F_{3Y}^1 + F_{3Y}^2 \quad (3.4.6)$$

$$M_{3Z} = M_{3Z}^0 + M_{3Z}^1 + M_{3Z}^2 \quad (3.4.7)$$

Para cada estructura de la Fig. 3.9, las reacciones y deformaciones verticales en cada nudo son para:

ESTRUCTURA I

$$F_{3Y}^0 = 2wL$$

$$M_{3Z}^0 = -2wL^2$$

$$\delta_1^0 = -\frac{1}{6EI_z}(12 + \phi_v)wL^4$$

$$\delta_2^0 = -\frac{1}{24EI_z}(17 + 3\phi_v)wL^4$$

ESTRUCTURA II

$$F_{3Y}^1 = -F_{1Y}$$

$$M_{3Z}^1 = 2F_{1Y}L$$

$$\delta_1^1 = \frac{1}{6EI_z}(16 + \phi_y)F_{1y}L^3$$

$$\delta_2^1 = \frac{1}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{1y}L^3$$

ESTRUCTURA III

$$F_{3y}^2 = -2F_{2y}$$

$$M_{3z}^2 = F_{2y}L$$

$$\delta_1^2 = \frac{1}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{2y}L^3$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{12EI_z}(4 + \phi_y)F_{2y}L^3$$

Sustituyendo en las expresiones dadas en (3.4.4) y (3.4.5) se tiene:

$$-\frac{wL^4}{6EI_z}(12 + \phi_y) + \frac{L^3}{6EI_z}(16 + \phi_y)F_{1y} + \frac{L^3}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{2y} = 0$$

$$-\frac{wL^4}{24EI_z}(17 + 3\phi_y) + \frac{L^3}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{1y} + \frac{L^3}{12EI_z}(4 + \phi_y)F_{2y} = 0$$

Presentándose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\frac{L^3}{6EI_z}(16 + \phi_y)F_{1y} + \frac{L^3}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{2y} = \frac{wL^4}{6EI_z}(12 + \phi_y)$$

$$\frac{L^3}{12EI_z}(10 + \phi_y)F_{1y} + \frac{L^3}{12EI_z}(4 + \phi_y)F_{2y} = \frac{wL^4}{24EI_z}(17 + 3\phi_y)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^0 \\ \delta_2^0 \end{bmatrix}$$

o bien

$$Ff = u''$$

Donde:

F es la matriz de flexibilidades.

f es el vector de fuerzas o de redundantes.

u'' es el vector de desplazamientos en la isostática ante la carga original.

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$F_{1Y} = \frac{(\phi_Y^2 + 17\phi_Y + 22) wL}{(\phi_Y^2 + 20\phi_Y + 28) 2}$$

$$F_{2Y} = \frac{2(\phi_Y^2 + 21\phi_Y + 32) wL}{(\phi_Y^2 + 20\phi_Y + 28) 2}$$

además

$$F_{3Y} = \frac{(\phi_Y^2 + 21\phi_Y + 26) wL}{(\phi_Y^2 + 20\phi_Y + 28) 2}$$

$$M_{3Z} = -\frac{(1 + \phi_Y)}{(\phi_Y^2 + 20\phi_Y + 28)} 2wL^2$$

3.5 METODO DE RIGIDECES

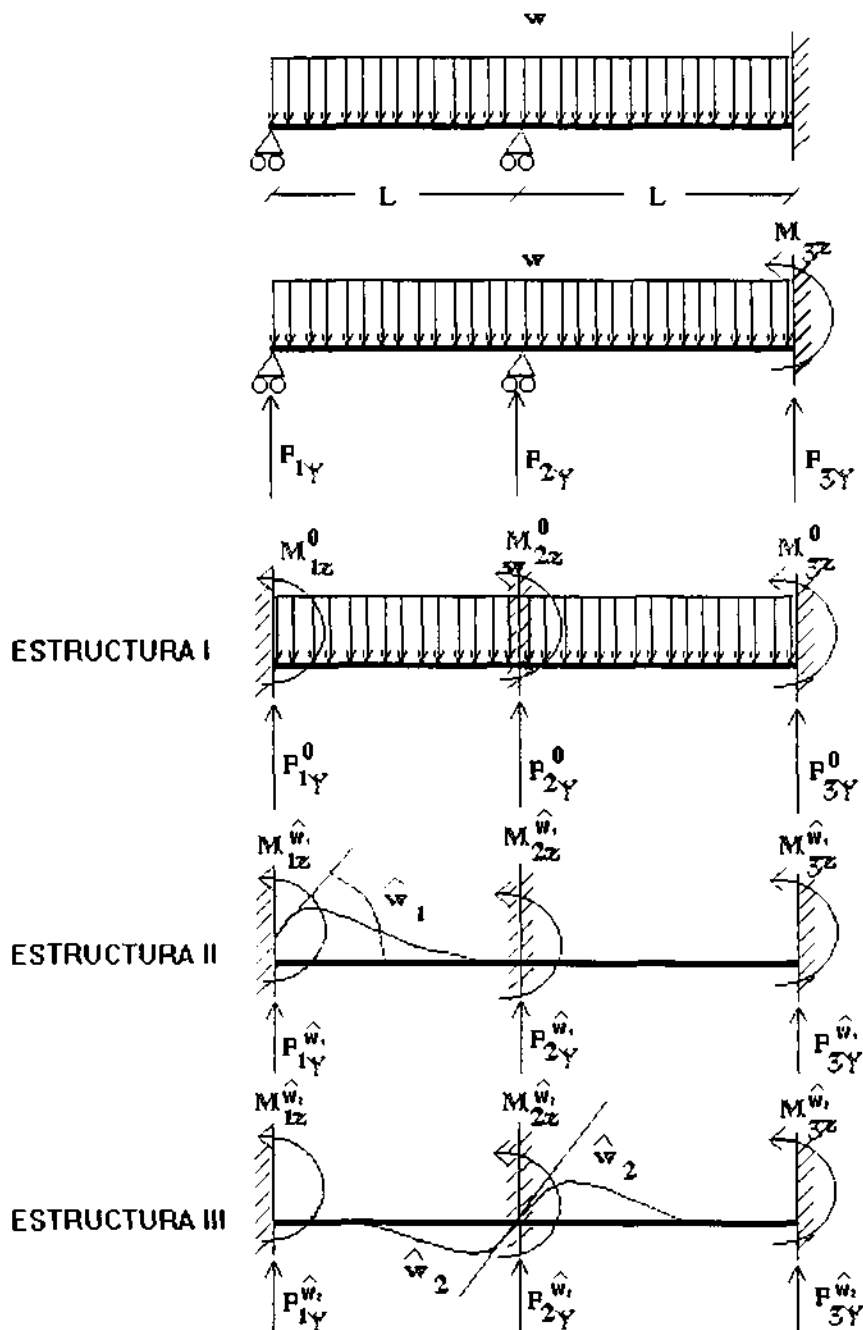


Fig. 2.10 Superposición para método de rigideces.

En el caso del método de las rigideces se establece una estructura cinemáticamente admisible, es decir se impide el desplazamiento angular de los nudos de la estructura. Esto se logra empotrando todos los nudos.

La estructura I de la Fig. 3.10 se conoce con el nombre de estructura cinemáticamente admisible.

Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} M_{1z}^0 + M_{1z}^{\theta_1} + M_{1z}^{\theta_2} &= 0 \\ M_{2z}^0 + M_{2z}^{\theta_1} + M_{2z}^{\theta_2} &= 0 \\ M_{3z}^0 + M_{3z}^{\theta_1} + M_{3z}^{\theta_2} &= M_{3z} \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$\begin{aligned} F_{1y}^0 + F_{1y}^{\theta_1} + F_{1y}^{\theta_2} &= F_{1y} \\ F_{2y}^0 + F_{2y}^{\theta_1} + F_{2y}^{\theta_2} &= F_{2y} \\ F_{3y}^0 + F_{3y}^{\theta_1} + F_{3y}^{\theta_2} &= F_{3y} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

ESTRUCTURA I

Para obtener los elementos mecánicos de la estructura I, previamente se obtendrán estos elementos para el caso general de una barra con nudos "i" y "j", doblemente empotrada con carga uniformemente repartida, Fig.3.11.

Los resultados obtenidos para el caso general se aplicarán posteriormente a nuestro problema específico (Estructura I).

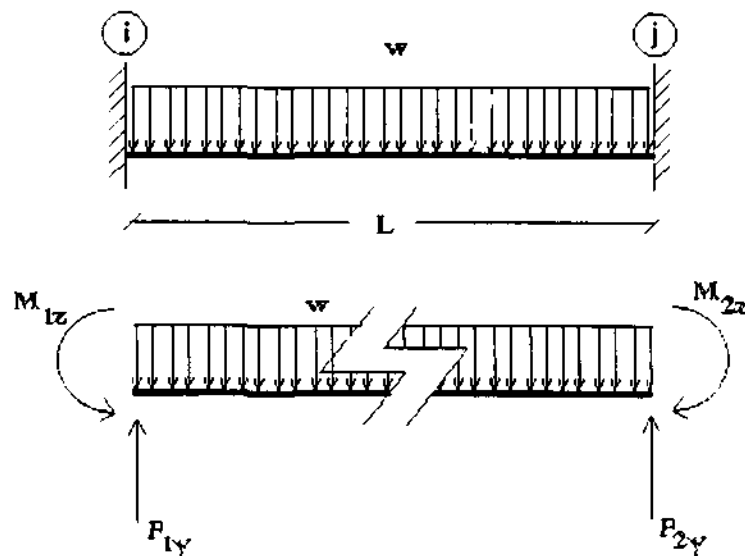


Fig. 3.11 Viga doblemente empotrada.

El modelo matemático de la barra plana es:

$$EA \frac{du}{dx} = N_y^e \quad (3.5.3)$$

$$EI_z \frac{d^2 v_h}{dx^2} = M_z^e \quad (3.5.4)$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{1}{12} \phi_y L^2 V_y^e \quad (3.5.5)$$

Al efectuar un corte a una distancia "x"

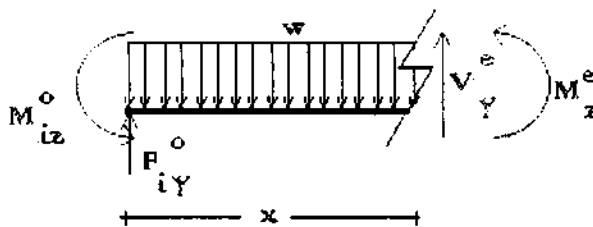


Fig. 3.12 Corte a una distancia x

Por equilibrio se obtiene:

$$\Sigma F_y = F_{iy}^o - wx + V_y^e = 0$$

$$V_y^e = wx - F_{iy}^o \quad (3.5.6)$$

$$\Sigma M^o = -F_{iy}^o x + M_{iz}^o + \frac{wx^2}{2} + M_z^e = 0$$

$$M_z^e = F_{iy}^o x - M_{iz}^o - \frac{wx^2}{2} \quad (3.5.7)$$

Al sustituir en el modelo matemático de la barra (3.5.4):

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = F_{iy} x - M_{iz} - \frac{\varpi x^2}{2}$$

Al integrar:

$$EI_z \frac{d v_b}{dx} = \frac{F_{iy} x^2}{2} - M_{iz} x - \frac{\varpi x^3}{6} + C_1$$

Si se considera que la deflexión total es igual a la debida a flexión y a cortante.

$$v = v_b + v_s \quad (3.5.8)$$

entonces

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx}$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{F_{iy} x^2}{2} - M_{iz} x - \frac{\varpi x^3}{6} + C_1 + \frac{1}{12} \phi_y L^2 (\varpi x - F_{iy}) \quad (3.5.9)$$

Al integrar nuevamente:

$$EI_z v = \frac{F_{iy} x^3}{6} - \frac{M_{iz} x^2}{2} - \frac{\varpi x^4}{24} + C_1 x + \frac{1}{12} \phi_y L^2 \frac{\varpi x^2}{2} - \frac{1}{12} \phi_y L^2 F_{iy} x + C_2 \quad (3.5.10)$$

Las condiciones frontera para esta viga son:

$$v|_{x=0} = 0 \quad (3.5.11)$$

$$v|_{x=L} = 0 \quad (3.5.12)$$

$$\frac{dv_b}{dx}|_{x=0} = 0 \quad (3.5.13)$$

$$\frac{dv_b}{dx}|_{x=L} = 0 \quad (3.5.14)$$

Aplicando las C.F. (3.5.13) y (3.5.11) en (3.5.9) y (3.5.10) tenemos:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

En forma explícita, las ecuaciones generales para obtener la pendiente y deflexión en cualquier parte de la viga será:

$$EI_z \frac{dv_b}{dx} = \frac{F_{iy} x^2}{2} - M_{iz} x - \frac{\omega x^3}{6} \quad (3.5.15)$$

$$EI_z v = \frac{F_{iy} x^3}{6} - \frac{M_{iz} x^2}{2} - \frac{\omega x^4}{24} + \frac{1}{24} \phi_y L^2 \omega x^2 - \frac{1}{12} \phi_y L^2 F_{iy} x \quad (3.5.16)$$

Al sustituir las C.F. restantes (3.5.14) y (3.5.12) en las ecuaciones anteriores

$$0 = \frac{F_{iy} L^2}{2} - M_{iz} L - \frac{\omega L^3}{6}$$

$$0 = \frac{F_{iy} L^3}{6} - \frac{M_{iz} L^2}{2} - \frac{\omega L^4}{24} + \frac{1}{24} \phi_y \omega L^4 - \frac{1}{12} \phi_y L^3 F_{iy}$$

Se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Al despejar y sustituir se tiene:

$$F_{iy} = \frac{\omega L}{2}$$

$$M_{iz} = \frac{\omega L^2}{12}$$

Por equilibrio se obtiene F_{iy}^o y M_{iz}^o

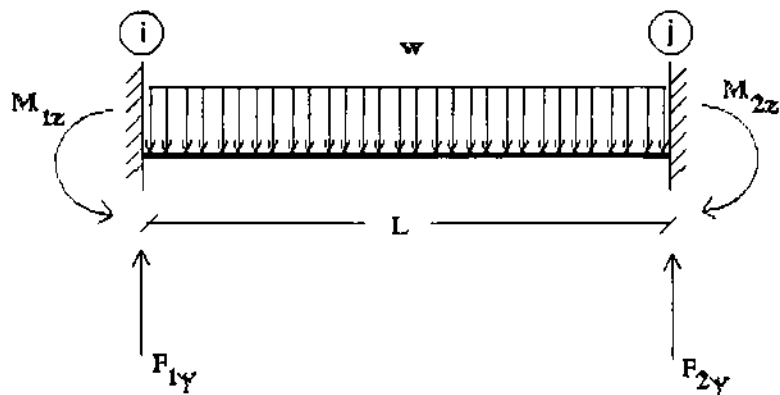


Fig. 3.13 Equilibrio en la barra.

En resumen para una barra doblemente empotrada se tiene:

$$F_{iy}^o = \frac{\omega L}{2}$$

$$F_{jy}^o = \frac{\omega L}{2}$$

$$M_{iz}^o = \frac{\omega L^2}{12}$$

$$M_{jz}^o = -\frac{\omega L^2}{12}$$

Al tomar estos resultados y aplicarlos a la estructura cinemáticamente admisible:

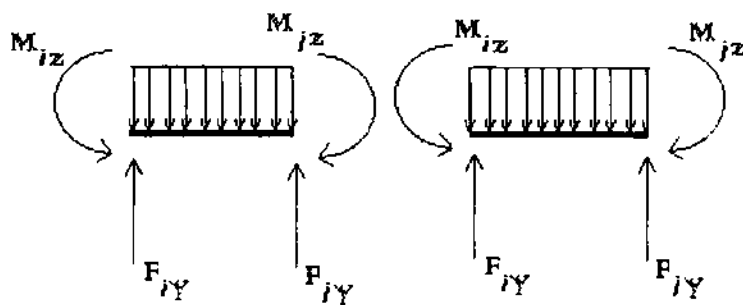


Fig. 3.14 Elementos en estructura original.

Se obtiene para la estructura original I:

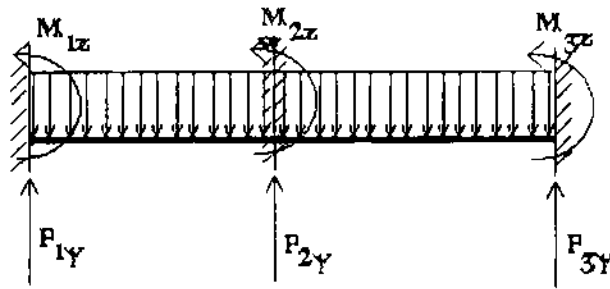


Fig. 3.15 Estructura final.

$$M_{1z}^0 = \frac{\omega L^2}{12} \quad F_{1y}^0 = \frac{\omega L}{2}$$

$$M_{2z}^0 = 0 \quad F_{2y}^0 = \omega L \quad (3.5.17)$$

$$M_{3z}^0 = -\frac{\omega L^2}{12} \quad F_{3y}^0 = \frac{\omega L}{2}$$

Nota:

Los signos se consideran de acuerdo a una notación nudo sobre barra



Fig. 3.16 Notación Nudo Sobre Barra.

ESTRUCTURA II

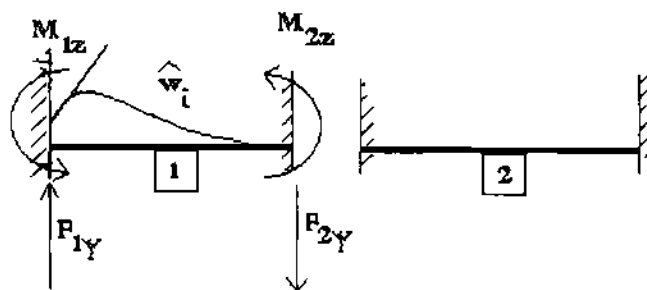


Fig. 3.17 Barras en estructura II

Para obtener los elementos mecánicos de la estructura II, nuevamente se obtendrán para el caso general de una barra doblemente empotrada, a la que se le permite un giro \hat{w}_i en el nudo i .

Las reacciones que se generan se obtendrán aplicando nuevamente el modelo matemático de la barra.(3.5.4 y 3.5.5)

$$EI_z = \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e$$

$$EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \phi_y L^3 V_y^e$$

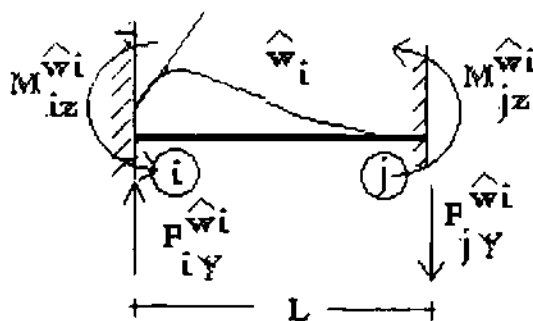


Fig. 3.18 Giro unitario en nudo i

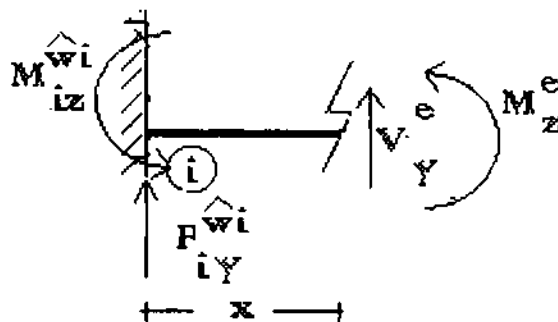


Fig. 3.19 Corte a una distancia x

Al efectuar un corte a una distancia x , y establecer el equilibrio:

$$\Sigma F_y = F_{iy}^e + V_y^e = 0$$

$$V_Y^e = -F_{iY}^{\vec{m}^3}$$

$$\Sigma M^o = 0 = M_{iZ}^{\vec{m}^3} - F_{iY}^{\vec{m}^3}x + M_Z^e$$

$$M_Z^e = F_{iY}^{\vec{m}^3}x - M_{iZ}^{\vec{m}^3}$$

una vez definidas estas dos ecuaciones se puede resolver el modelo matemático de la barra.

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = F_{iY}^{\vec{m}^3}x - M_{iZ}^{\vec{m}^3}$$

Al integrar

$$EI_z \frac{dv_b}{dx} = \frac{1}{2} F_{iY}^{\vec{m}^3} x^2 - M_{iZ}^{\vec{m}^3} x + C_1 \quad (3.5.18)$$

$$v = v_b + v_s \quad (3.5.19)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx}$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{F_{iY}^{\vec{m}^3} x^2}{2} - M_{iZ}^{\vec{m}^3} x + C_1 - \frac{1}{12} \phi_Y L^2 F_{iY}^{\vec{m}^3}$$

Al integrar nuevamente:

$$EI_z v = \frac{F_{iY}^{\vec{m}^3} x^3}{6} - \frac{M_{iZ}^{\vec{m}^3} x^2}{2} + C_1 x - \frac{1}{12} \phi_Y L^2 F_{iY}^{\vec{m}^3} x + C_2 \quad (3.5.20)$$

Las condiciones de frontera para esta barra son:

$$v|_{x=0} = 0 \quad (3.5.21)$$

$$v|_{x=L} = 0 \quad (3.5.22)$$

$$\frac{dv_b}{dx}|_{x=L} = 0 \quad (3.5.23)$$

$$\frac{dv_b}{dx}|_{x=0} = \vec{\omega}_i \quad (3.5.24)$$

Al sustituir la condición de frontera (3.5.24) en la ecuación (3.5.18)

$$C_1 = EI_z \vec{\omega}_i$$

Al sustituir la condición de frontera (3.5.21) en (3.5.20)

$$C_2 = 0$$

Las ecuaciones generales para obtener la pendiente y la deflexión en forma explícita en cualquier punto de la barra son:

$$EI_z \frac{dv_b}{dx} = \frac{F_{iy}^{\vec{\omega}} x^2}{2} - M_{iz}^{\vec{\omega}} x + EI_z \vec{\omega}_i \quad (3.5.25)$$

$$EI_z v = \frac{F_{iy}^{\vec{\omega}} x^3}{6} - \frac{M_{iz}^{\vec{\omega}} x^2}{2} + EI_z \vec{\omega}_i x - \frac{1}{12} \phi_\gamma L^2 F_{iy}^{\vec{\omega}} x \quad (3.5.26)$$

Al sustituir las condiciones de frontera restantes se obtiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$0 = \frac{F_{iy}^{\hat{w}} L^2}{2} - M_{iz}^{\hat{w}} L + EI_z \hat{\theta}_i$$

$$0 = \frac{F_{iy}^{\hat{w}} L^3}{6} - \frac{M_{iz}^{\hat{w}} L^2}{2} + EI_z \hat{\theta}_i L - \frac{1}{12} \phi_y L^3 F_{iy}^{\hat{w}}$$

Al despejar de la primera

$$M_{iz}^{\hat{w}} = \frac{F_{iy}^{\hat{w}} L}{2} + \frac{EI_z}{L} \hat{\theta}_i$$

y sustituir en la segunda

$$0 = -\frac{F_{iy}^{\hat{w}} L^3}{6} - \frac{F_{iy}^{\hat{w}} L^3}{4} - \frac{EI_z L}{2} \hat{\theta}_i + EI_z \hat{\theta}_i L - \frac{1}{12} \phi_y L^3 F_{iy}^{\hat{w}}$$

Se obtiene:

$$F_{iy}^{\hat{w}} = \frac{6EI_z}{(1 + \phi_y)L^2} \hat{\theta}_i$$

$$M_{iz}^{\hat{w}} = \frac{(4 + \phi_y)EI_z}{(1 + \phi_y)L} \hat{\theta}_i$$

Por equilibrio se obtiene $F_{jy}^{\hat{w}}$ y $M_{jz}^{\hat{w}}$

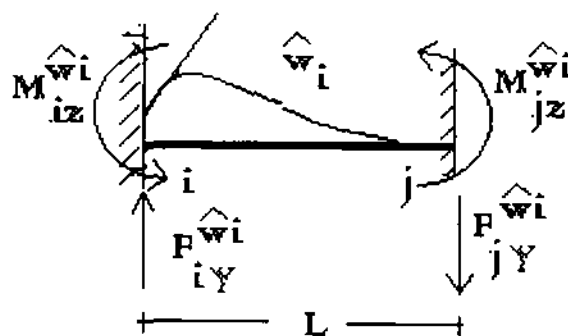


Fig. 3.20 Giro unitario en nudo i

$$\Sigma M_j = \frac{4EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i + \frac{EI_z\phi_y}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i - \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \bar{\theta}_i L + M_{jz}^{\bar{\theta}} = 0$$

$$\Sigma M_i = -\frac{2EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i + \frac{EI_z\phi_y}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i + M_{iz}^{\bar{\theta}} = 0$$

$$M_{jz}^{\bar{\theta}} = \frac{2EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i - \frac{EI_z\phi_y}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i$$

$$M_{iz}^{\bar{\theta}} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i$$

$$F_{jy}^{\bar{\theta}} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i$$

Al tomar estos valores e implementarlos a la estructura II, se tiene:

$$\begin{aligned} F_{1y}^{\bar{\theta}} &= \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \bar{\theta}_i & M_{1z}^{\bar{\theta}} &= \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i \\ F_{2y}^{\bar{\theta}} &= -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \bar{\theta}_i & M_{2z}^{\bar{\theta}} &= \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \bar{\theta}_i \\ F_{3y}^{\bar{\theta}} &= 0 & M_{3z}^{\bar{\theta}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

Los elementos mecánicos de la estructura III se obtendrá a partir de la estructura II.

Al resumir los resultados anteriores para las estructuras I, II y III:

Estructura I

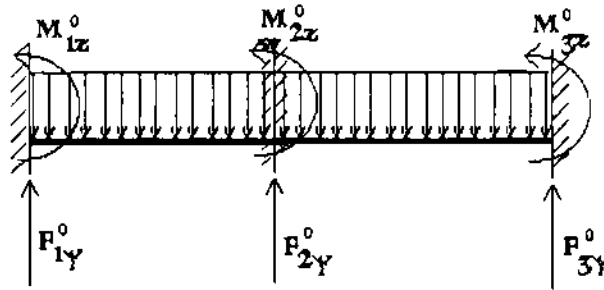


Fig. 3.21 Fuerzas y momentos en estructura I

$$F_{1Y}^0 = \frac{wl}{2}$$

$$M_{1z}^0 = \frac{wL^2}{12}$$

$$F_{2Y}^0 = wl$$

$$M_{2z}^0 = 0$$

$$F_{3Y}^0 = \frac{wl}{2}$$

$$M_{3z}^0 = -\frac{wL^2}{12}$$

Estructura II

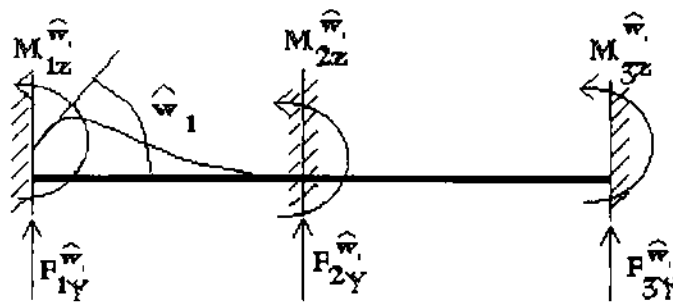


Fig. 3.22 Fuerzas y momentos en estructura II

$$F_{1Y}^{w_1} = \frac{6EI_z}{(1+\phi)L^2} w_1$$

$$M_{1z}^{w_1} = \frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)L} w_1$$

$$F_{2Y}^{\partial 1} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_r)L^2} \bar{\omega}_1 \quad M_{2z}^{\partial 1} = \frac{(2-\phi_r)EI_z}{(1+\phi_r)L} \bar{\omega}_1$$

$$F_{3Y}^{\partial 1} = 0 \quad M_{3z}^{\partial 1} = 0$$

Estructura III

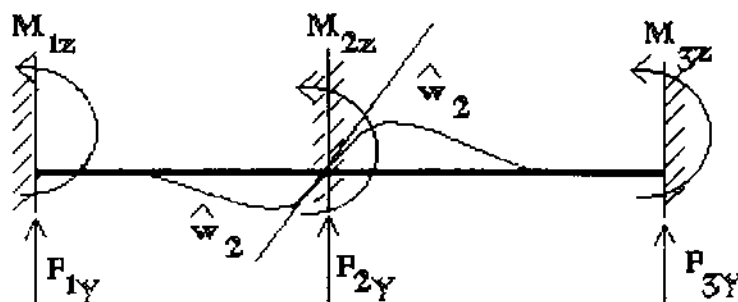


Fig. 3.23 Fuerzas y momentos en estructura III

$$F_{1Y}^{\partial 2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_r)L^2} \bar{\omega}_2 \quad M_{1z}^{\partial 2} = \frac{(2-\phi_r)EI_z}{(1+\phi_r)L} \bar{\omega}_2$$

$$F_{2Y}^{\partial 2} = 0 \quad M_{2z}^{\partial 2} = 2 \frac{(4-\phi_r)EI_z}{(1+\phi_r)L} \bar{\omega}_2$$

$$F_{3Y}^{\partial 2} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_r)L^2} \bar{\omega}_2 \quad M_{3z}^{\partial 2} = \frac{(2-\phi_r)EI_z}{(1+\phi_r)L} \bar{\omega}_2$$

Al establecer el equilibrio

$$M_{1z}^0 + M_{1z}^{\partial 1} + M_{1z}^{\partial 2} = 0$$

$$M_{2z}^0 + M_{2z}^{\partial 1} + M_{2z}^{\partial 2} = 0$$

(3.5.28)

$$M_{3Z}^0 + M_{3Z}^{\delta 1} + M_{3Z}^{\delta 2} = M_{3Z}$$

$$F_{1Y}^0 + F_{1Y}^{\delta 1} + F_{1Y}^{\delta 2} = F_{1Y}$$

$$F_{2Y}^0 + F_{2Y}^{\delta 1} + F_{2Y}^{\delta 2} = F_{2Y} \quad (3.5.29)$$

$$F_{3Y}^0 + F_{3Y}^{\delta 1} + F_{3Y}^{\delta 2} = F_{3Y}$$

Y al sustituir en las primeras dos ecuaciones de momento (3.5.28) se obtiene el sistema:

$$\frac{\omega L^2}{12} + \frac{(4 - \phi_Y) EI_Z}{(1 + \phi_Y) L} \bar{\alpha}_1 + \frac{(2 - \phi_Y) EI_Z}{(1 + \phi_Y) L} \bar{\alpha}_2 = 0$$

$$0 + \frac{(2 - \phi_Y) EI_Z}{(1 + \phi_Y) L} \bar{\alpha}_1 + 2 \frac{(4 + \phi_Y) EI_Z}{(1 + \phi_Y) L} \bar{\alpha}_2 = 0$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega L^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4 + \phi_Y}{1 + \phi_Y} \frac{EI_Z}{L} & \frac{2 - \phi_Y}{1 + \phi_Y} \frac{EI_Z}{L} \\ \frac{2 - \phi_Y}{1 + \phi_Y} \frac{EI_Z}{L} & \frac{2(4 + \phi_Y)}{1 + \phi_Y} \frac{EI_Z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O bien:

$$F^0 + K U = F^e \quad (3.5.30)$$

Donde:

F^0 es el vector de fuerzas de fijación.

K es la matriz de rigidez.

U es el vector de desplazamientos.

F^e es el vector de fuerzas externas.

$$K U = F^e - F^o$$

Si $F^e - F^o = P$, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$K U = P \quad (3.5.31)$$

La solución de $K U = P$ es:

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{2(4 + \phi_y)(1 + \phi_y)}{(\phi_y^2 + 20\phi_y + 28)} \frac{\omega L^3}{12EI_z}$$

El signo negativo indica que el giro real es inverso al giro supuesto.

$$\bar{\omega}_2 = \frac{(2 - \phi_y)(1 + \phi_y)}{(\phi_y^2 + 20\phi_y + 28)} \frac{\omega L^3}{12EI_z}$$

La convención de signos de los giros sigue la misma convención de signos de los momentos.

3.6 COMENTARIOS

Una vez realizado el ejemplo de una estructura en forma detallada tanto por el método de flexibilidades como de rigideces, se puede observar que con el enfoque matricial, los procesos matemáticos son básicamente los mismos.

Tanto en el método de las rigideces como en el de las flexibilidades, la estructura hiperestática, mediante el principio de superposición la descomponemos en varias estructuras con determinadas características cada una.

Así se tiene que el primer paso del método de flexibilidades (o de las fuerzas), consiste en obtener una estructura primaria o isostática, esto se obtiene al eliminar las fuerzas o redundantes para convertir a la estructura en isostática.

En el caso del método de rigideces (o de los desplazamientos), el primer paso es el de establecer una estructura cinemáticamente admisible, es decir se impide el desplazamiento total de los nudos en la estructura. Esto se logra empotrando todos los nudos.

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, los desarrollos matemáticos son similares en ambos casos con el enfoque matricial. Al final de ambos métodos se llega a definir la solución mediante un sistema de ecuaciones.

En el método de flexibilidades tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{F} \mathbf{f} = \mathbf{u}^{\circ} \quad (3.5.32)$$

En el método de las rigideces, el sistema de ecuaciones es:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.5.33)$$

Si el problema se resuelve en forma manual, las operaciones en cualquiera de ellos serán las mismas. Se puede decir que no es lo más conveniente emplear éstos métodos para resolver una estructura manualmente, se optaría por simplificar estos métodos o bien inclinarse por algún método iterativo.

La ventaja que tendrían estos métodos con el enfoque matricial, es la de su aplicación a la computadora. Al aplicar los métodos se tendría que el primer paso en el de flexibilidades es el encontrar a una estructura isostática quitando las redundantes, pero generalmente existen varias isostáticas en

una misma estructura por lo que un programa para obtenerlas sería bastante complejo, o bien la proporcionaría el usuario del programa.

En cambio en el método de las rigideces el primer paso es determinar una estructura cinemáticamente admisible, lo que se obtiene simplemente al empotrar todos los nudos, lo cual mediante un programa de computadora con instrucciones sencillas, podemos indicar que no existan desplazamientos en ningún nudo.

Como conclusión, esta es la única razón por la que el método de rigideces es más eficiente de aplicar a una computadora personal, por lo cual será el método que se describirá para su posterior aplicación a la computadora

4 MODELO DISCRETO ESTANDAR DE LA BARRA.

4.1 INTRODUCCIÓN.

Como se ha definido anteriormente, la barra es un elemento tridimensional alargado en donde dos de sus dimensiones son pequeñas en relación a la tercera.

El modelo discreto estándar de la barra es la ecuación de equilibrio de la barra.

Para una estructura se ha establecido la ecuación

$$F^o + KU = F^e \quad (4.1.1)$$

De manera similar, la ecuación de equilibrio de la barra, tiene la misma forma

$$f^o + k u = f^e \quad (4.1.2)$$

(modelo discreto estándar de una barra.)

donde:

f^o son las fuerzas de fijación.

f^e son las fuerzas equilibrantes.

k es la rigidez.

u son los desplazamientos.

4.2 BARRA PLANA.

Con objeto de poder manejar las expresiones y desarrollos matemáticos de una manera más clara, se partirá de la barra plana, para posteriormente pasar a la barra tridimensional.

La barra plana la podemos definir en un sistema de coordenadas cartesianas x - y . Los extremos de ésta se han nombrado como los puntos nodales "i" y "j" (Fig. 4.1)

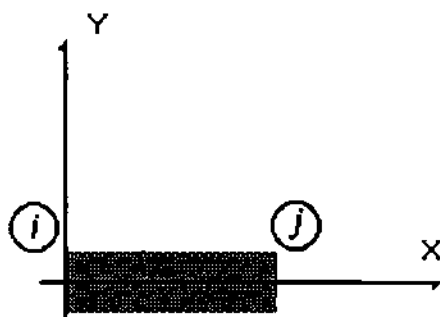


Fig. 4.1 Barra Plana

El modelo matemático para la barra plana es:

$$EA \frac{du}{dx} = N_x^e \quad (4.2.1)$$

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_x^e \quad (4.2.2)$$

$$EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \phi_y I^2 V_y^e \quad (4.2.3)$$

4.3 VECTOR DE FUERZAS DE FIJACIÓN.

Es aquel que se compone de las fuerzas y momentos de reacción ante las cargas externas en una barra doblemente empotrada.

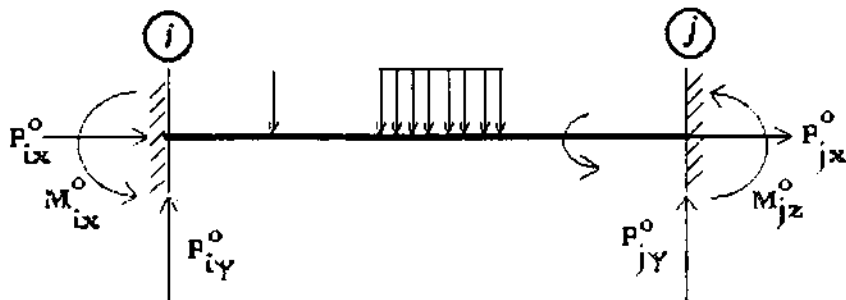


Fig. 4.2 Fuerzas y momentos de reacción.

Nota:

La convención de signos adoptada es una convención nudo sobre barra (NSB), esto es son reacciones (efectos del nudo sobre la barra).

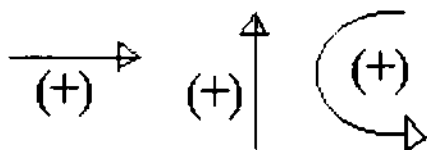


Fig. 4.3 Convención de signos.

$$\mathbf{f}^0 = \begin{bmatrix} F_{ix}^0 \\ F_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ F_{jx}^0 \\ F_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{ncb} F_{ix}^{0(k)} \\ \sum_{k=1}^{ncb} F_{iy}^{0(k)} \\ \sum_{k=1}^{ncb} M_{iz}^{0(k)} \\ \sum_{k=1}^{ncb} F_{jx}^{0(k)} \\ \sum_{k=1}^{ncb} F_{jy}^{0(k)} \\ \sum_{k=1}^{ncb} M_{jz}^{0(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ - \\ f_j \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Donde:

n_{cb} es el número de cargas en la barra

La sumatoria que aparece en 4.3.1, indica la superposición de todas las cargas que actúan en la barra.

4.4 VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS EN LA BARRA.

Está formado por los desplazamientos o grados de libertad de cada uno de los puntos nodales de la barra.

Los elementos de este vector son valores desconocidos.

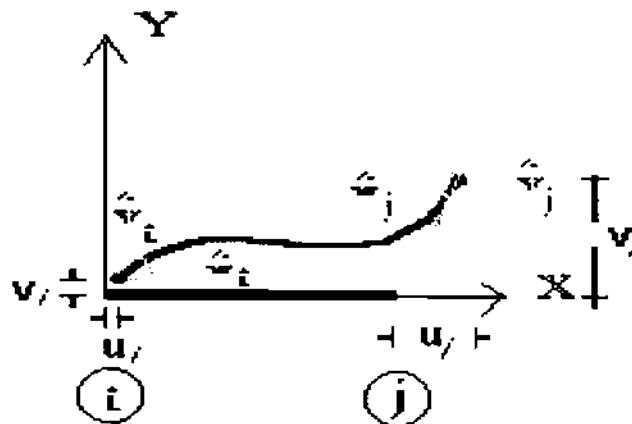


Fig. 4.4 Desplazamientos en la barra.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \bar{w}_i \\ u_j \\ v_j \\ \bar{w}_j \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \quad (4.4.1)$$

Nota :

La convención de signos será igual a las fuerzas de fijación.

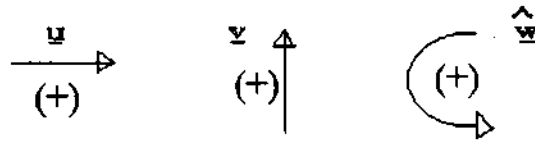


Fig. 4.5 Convención de signos.

4.5 VECTOR DE FUERZAS EQUILIBRANTES.

Está formado por fuerzas y momentos que mantienen en equilibrio a la barra ante sus cargas externas y de acuerdo a sus restricciones de frontera.

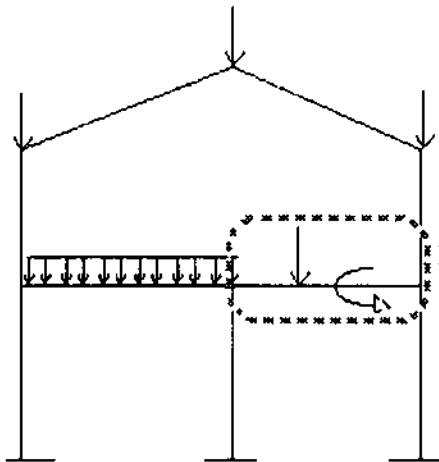


Fig. 4.6 Barra con cargas exteriores

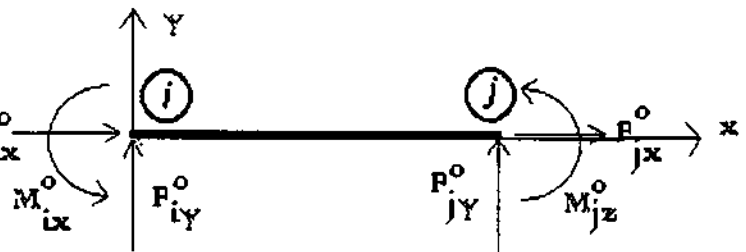


Fig. 4.7 Fuerzas equilibrantes.

$$f^e = \begin{bmatrix} F_{ix}^e \\ F_{iy}^e \\ M_{iz}^e \\ F_{jx}^e \\ F_{jy}^e \\ M_{jz}^e \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \end{Bmatrix}$$

Los elementos de este vector también son valores desconocidos.

4.6 MATRIZ DE RIGIDEZ.

Está formada en las columnas, por fuerzas y momentos que provocarían un desplazamiento (lineal o angular) unitario en cada extremo de la barra.

$$k = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} f^u \\ u_i = 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f^v \\ v_i = 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f^w \\ \bar{w}_i = 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f^{uvj} \\ u_j = 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f^v \\ v_j = 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} f^{uvj} \\ \bar{w}_j = 1 \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (4.6.1)$$

Para obtener cada columna es necesario analizar la barra totalmente fija pero permitiéndole el desplazamiento que le ha sido restringido.

Es necesario realizar el análisis de las siguientes seis configuraciones.

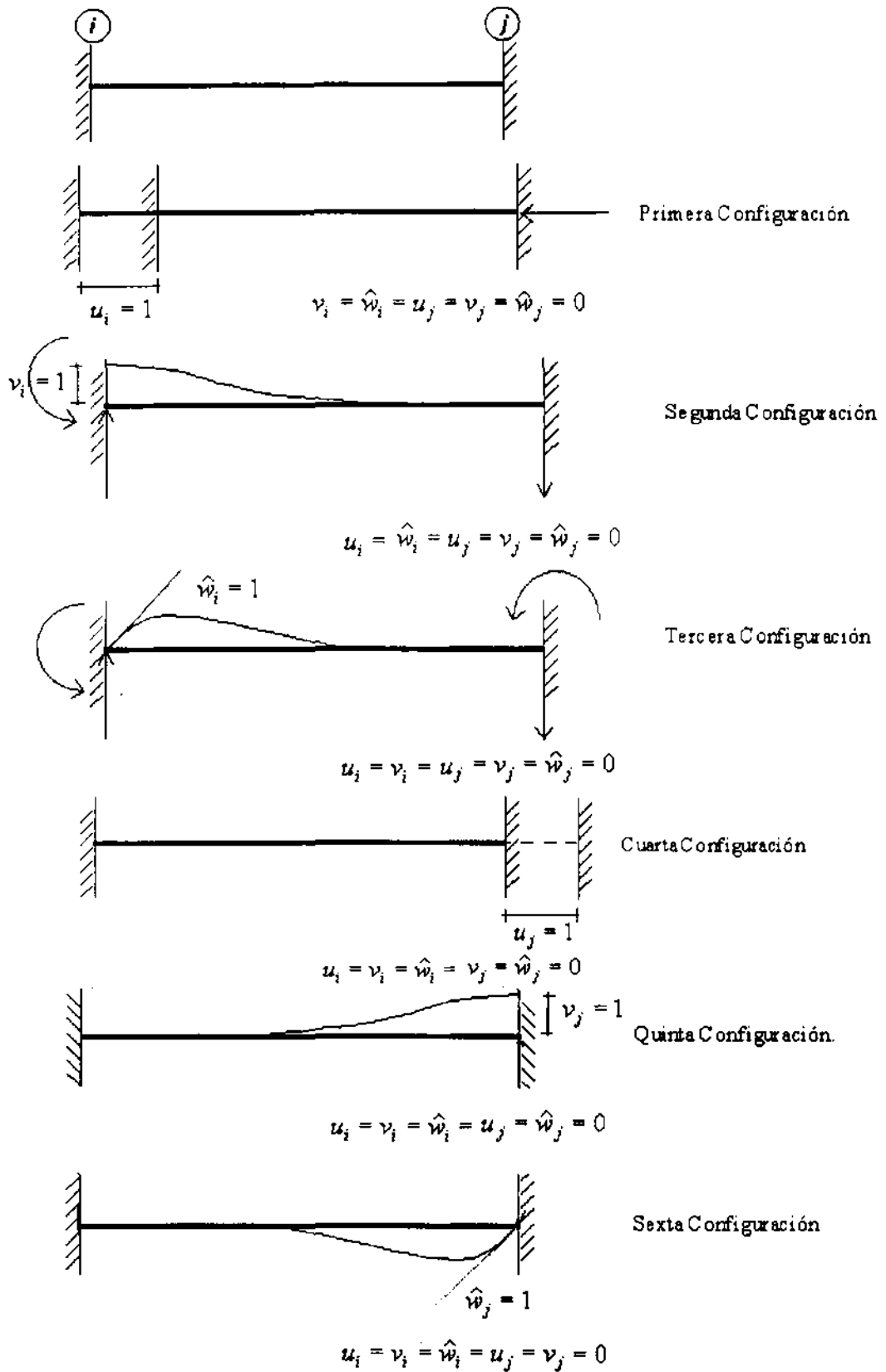


Fig. 4.8 Configuraciones en la barra.

Para obtener explícitamente cada una de las fuerzas que integran las seis configuraciones de la matriz de rigideces, es necesario resolver el modelo matemático de la barra.

$$EA \frac{du}{dx} = N_x^e \quad (4.6.2)$$

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e \quad (4.6.3)$$

$$EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \phi_y l^2 V_y^e \quad (4.6.4)$$

Primera configuración.

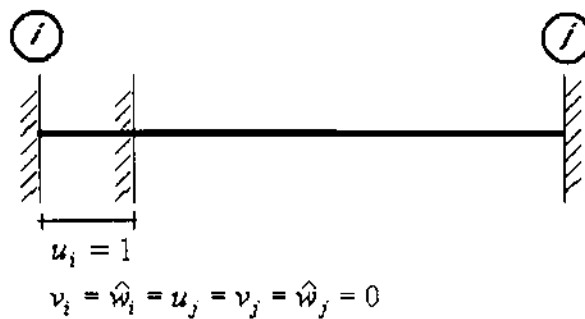


Fig. 4.9 Desplazamiento $u_i = 1$

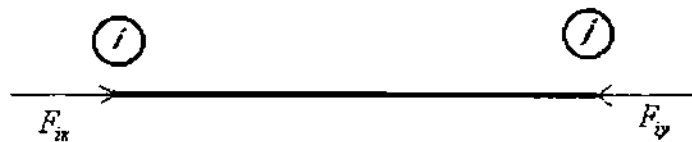


Fig. 4.10 Fuerzas en la barra

Haciendo un corte en la sección a una distancia x .

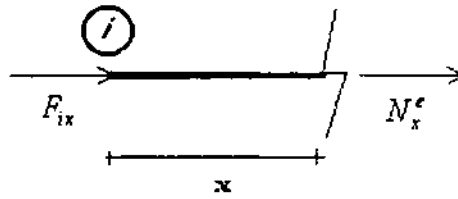


Fig. 4.11 Corte

$$\sum F_x = F_{ix} + N_x^e = 0$$

Al despejar:

$$N_x^e = -F_{ix}$$

Al sustituir en la ecuación (4.6.2)

$$EA \frac{du}{dx} = -F_{ix}$$

Al integrar:

$$EA u = -F_{ix}x + C_1$$

Las condiciones de frontera de acuerdo a Fig. 4.9 son:

$$u \Big|_{x=0} = 1 \quad u \Big|_{x=L} = 0$$

De donde:

$$C_1 = EA$$

$$EA u = -F_{ix}x + EA$$

Aplicando la segunda condición de frontera.

$$F_{ix} = \frac{EA}{L}$$

por equilibrio

$$F_{ix} = -\frac{EA}{L}$$

Al colocar estos valores como elementos del vector aparecerán en la siguiente posición.

$$f^u = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6.5)$$

Para la cuarta configuración se procede de manera similar. El desplazamiento permitido será en el nudo "j". El vector resultante será :

$$f^u = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6.6)$$

Para la segunda configuración:

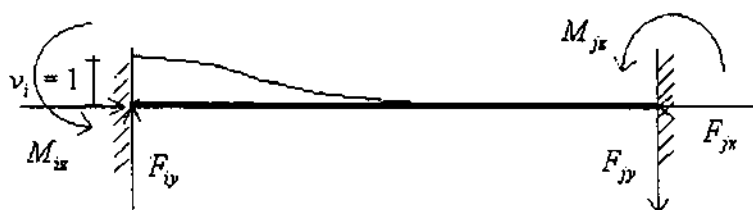


Fig. 4.12 Desplazamiento $u_i = 1$

$$v_i = l$$

$$u_i = \bar{u}_i = u_j = v_j = \bar{u}_j = 0$$

Al resolver el modelo matemático se tiene :

$$f^w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 \\ \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \end{bmatrix} \quad (4.6.7)$$

Para la quinta configuración:

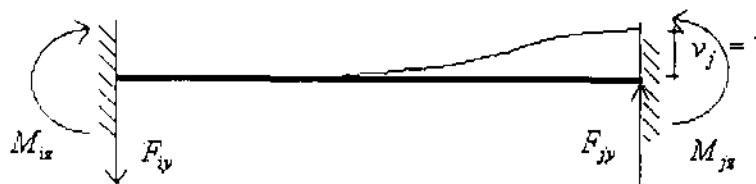


Fig. 4.13 Desplazamiento $v_i = 1$

$$v_j = l$$

$$u_i = v_i = \bar{u}_i = u_j = \bar{u}_j = 0$$

$$f^{**} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 \\ \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \end{bmatrix} \quad (4.6.8)$$

Para la tercera configuración.

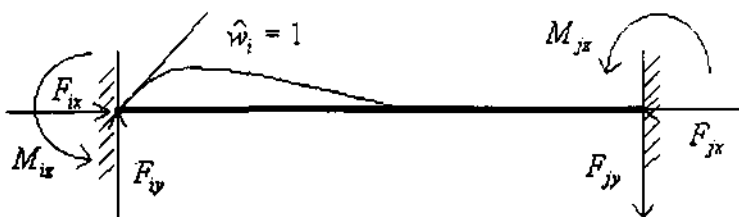


Fig. 4.14 Desplazamiento $\hat{w}_i = 1$

$$\hat{w}_i = 1$$

$$u_i = v_i = u_j = v_j = \hat{w}_j = 0$$

Los elementos equilibrantes para esta configuración ya se han obtenido con anterioridad y son :

$$F_{ix} = 0$$

$$F_{jx} = 0$$

$$F_{iy} = \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}$$

$$F_{jy} = -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}$$

$$M_{ix} = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L}$$

$$M_{jx} = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L}$$

De esta manera, la tercera columna de la matriz de rigidez será:

$$f^w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \\ 0 \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad (4.6.9)$$

De manera similar, para la sexta configuración.

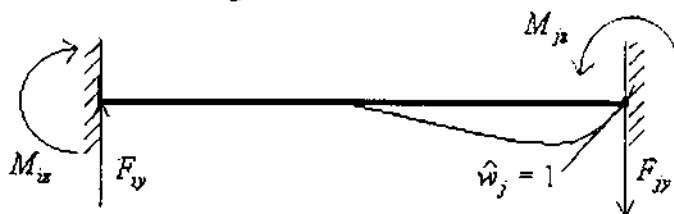


Fig. 4.15 Desplazamiento $\bar{w}_j = 1$

$$\bar{w}_j = 1$$

$$u_i = v_i = \bar{w}_i = u_j = v_j = 0$$

$$f^w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \\ 0 \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad (4.6.10)$$

De esta manera la matriz de rigidez quedará de la siguiente forma.

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad (4.6.11)$$

4.7 BARRAS ARTICULADAS

La ecuación de equilibrio para una barra plana es :

$$f^o + ku = f^e,$$

si consideramos $ku = f^u$

Para una barra doblemente empotrada se tiene:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix}^0 \\ F_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ F_{jx}^0 \\ F_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{k}] \quad [\underline{u}] = [\underline{f}^u] \quad (4.7.1)$$

Nota: Cada elemento de la matriz $[k]$ tiene un valor que ya se ha asignado en (4.6.11)

Se pueden presentar los 3 casos siguientes:

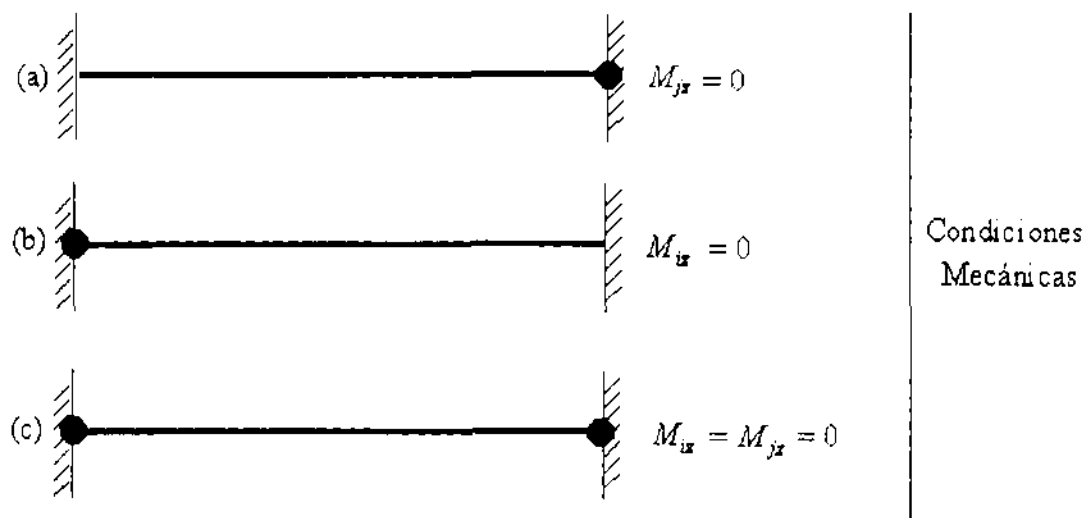


Fig 4.16 Articulaciones en la barra.

Para una barra articulada en j , Fig 4.16(a), al efectuar el producto $[k][u] = [f^u]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{ix}^u &= k_{11} u_i + k_{14} u_j \\
 F_{iy}^u &= k_{22} v_i + k_{23} \bar{w}_i + k_{25} v_j + k_{26} \bar{w}_j \\
 M_{iz}^u &= k_{32} v_i + k_{33} \bar{w}_i + k_{35} v_j + k_{36} \bar{w}_j
 \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

$$\begin{aligned}
 F_{jx}^u &= k_{41} v_i + k_{14} u_j \\
 F_{jy}^u &= k_{52} v_i + k_{53} \bar{w}_i + k_{55} v_j + k_{56} \bar{w}_j \\
 M_{jz}^u &= k_{62} v_i + k_{63} \bar{w}_i + k_{65} v_j + k_{66} \bar{w}_j
 \end{aligned}$$

La condición mecánica que se presenta es:

$$M_{jz}^u = 0$$

por lo tanto

$$k_{62} v_i + k_{63} \bar{w}_i + k_{65} v_j + k_{66} \bar{w}_j = 0$$

Despejando, el desplazamiento asociado a la condición mecánica es :

$$\bar{w}_j = -\frac{I}{k_{66}}(k_{62} v_i + k_{63} \bar{w}_i + k_{65} v_j)$$

Sustituyendo en las ecuaciones dadas en (4.7.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{xi}'' &= k_{11}u_i + 0 + 0 + k_{14}u_j + 0 + 0 \\ F_{yi}'' &= 0 + \left(k_{32} - \left(\frac{k_{36}k_{62}}{k_{66}}\right)\right)v_i + \left(k_{23} - \left(\frac{k_{26}k_{63}}{k_{66}}\right)\right)\bar{w}_i + 0 + \left(k_{25} - \left(\frac{k_{26}k_{65}}{k_{66}}\right)\right)v_j + 0 \\ M_{zi}'' &= 0 + \left(k_{32} - \left(\frac{k_{36}k_{62}}{k_{66}}\right)\right)v_i + \left(k_{33} - \left(\frac{k_{36}k_{63}}{k_{66}}\right)\right)\bar{w}_i + 0 + \left(k_{35} - \left(\frac{k_{36}k_{65}}{k_{66}}\right)\right)v_j + 0 \\ F_{xj}'' &= k_{41}u_i + 0 + 0 + k_{44} + 0 + 0 \\ F_{yj}'' &= 0 + \left(k_{52} - \left(\frac{k_{56}k_{62}}{k_{66}}\right)\right)v_i + \left(k_{53} - \left(\frac{k_{56}k_{63}}{k_{66}}\right)\right)\bar{w}_i + 0 + \left(k_{55} - \left(\frac{k_{56}k_{65}}{k_{66}}\right)\right)v_j + 0 \\ M_{zj}'' &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Donde la matriz de rigidez para una barra articulada en j será:

$$[k^j] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} - \left(\frac{k_{26}k_{62}}{k_{66}}\right) & k_{23} - \left(\frac{k_{26}k_{63}}{k_{66}}\right) & 0 & k_{25} - \left(\frac{k_{26}k_{65}}{k_{66}}\right) & 0 \\ 0 & k_{32} - \left(\frac{k_{36}k_{62}}{k_{66}}\right) & k_{33} - \left(\frac{k_{36}k_{63}}{k_{66}}\right) & 0 & k_{35} - \left(\frac{k_{36}k_{65}}{k_{66}}\right) & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} - \left(\frac{k_{56}k_{62}}{k_{66}}\right) & k_{53} - \left(\frac{k_{56}k_{63}}{k_{66}}\right) & 0 & k_{55} - \left(\frac{k_{56}k_{65}}{k_{66}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7.4)$$

4.8 BARRA TRIDIMENSIONAL

La formación de los vectores f^o, f^e, u y de la matriz de rigidez k para una barra tridimensional se efectuará de la misma manera. A partir del modelo matemático de la barra tridimensional se tiene:

$$EA \frac{du}{dx} = N_x^e \quad (4.8.1)$$

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e \quad (4.8.2)$$

$$EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{2} \phi_y l^2 V_y^e \quad (4.8.3)$$

$$EI_y \frac{d^2 w_b}{dx^2} = -M_y^e \quad (4.8.4)$$

$$EI_z \frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{12} \phi_z l^2 V_z^e \quad (4.8.5)$$

$$GJ\theta = GJ \frac{d\bar{w}}{dx} = M_x^e \quad (4.8.6)$$

El modelo matemático de la barra tridimensional (3D) tiene la misma forma:

$$f^o + ku = f^e \quad (4.8.7)$$

donde el vector de fuerzas de fijación (f^o), el de desplazamientos (u) y la matriz de rigidez (k) se obtienen de manera similar al de la barra plana (2D), teniendo la forma siguiente:

$$f^0 = \begin{bmatrix} F_{ix}^0 \\ F_{iy}^0 \\ F_{iz}^0 \\ M_{iz}^0 \\ M_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ F_{jx}^0 \\ F_{jy}^0 \\ F_{jz}^0 \\ M_{jz}^0 \\ M_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix} \quad (4.8.8)$$

Vector de fuerzas de fijación

$$u = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ \hat{w}_j \end{bmatrix} \quad (4.8.9)$$

Vector de desplazamientos

$$k = \begin{bmatrix} f^0 & f^1 & f^2 & f^3 & f^4 & f^5 & f^6 & f^7 & f^8 & f^9 & f^{10} & f^{11} \\ u_i = 1 & v_i = 1 & w_i = 1 & \hat{u}_i = 1 & \hat{v}_i = 1 & \hat{w}_i = 1 & u_j = 1 & v_j = 1 & w_j = 1 & \hat{u}_j = 1 & \hat{v}_j = 1 & \hat{w}_j = 1 \end{bmatrix} \quad (4.8.10)$$

matriz de rigidez

5 ECUACION DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA

5.1 INTRODUCCION.

Una vez que se ha definido la ecuación de equilibrio de la barra en el capítulo anterior de la forma $[f^o] + [ku] = [f^e]$ y definidas cada uno de sus elementos, en el presente capítulo se describirá la formación de la ecuación de equilibrio para una estructura general, que como se ha visto en la ecuación (4.1.1) tiene la forma $F^o + KU = F^e$ ya que una estructura la podemos considerar como formada por varias barras con direcciones específicas, es necesario relacionar las referencias de cada una de las barras a una referencia única que será la de la estructura.

Para realizar esto, se tendrá que definir los sistemas de referencia y la transformación de coordenadas.

5.2 SISTEMAS DE REFERENCIA.

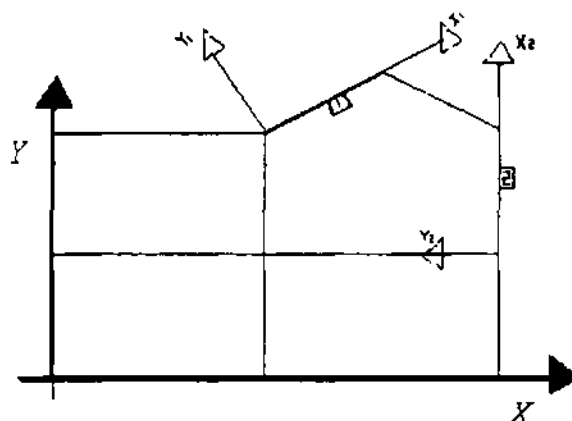


Fig. 5.1 Sistemas de referencia local y global.

En la figura anterior se puede observar una estructura formada por trece barras, cada una de ellas con su propio sistema de referencia x_1-y_1 , x_2-y_2 , ..., x_i-y_i . A esta referencia se le llamará sistema de referencia local o de la barra y define las características de cada barra.

Para la estructura es conveniente manejar otro sistema de referencia diferente ya que con los anteriores no es posible. A este nuevo sistema de coordenadas X-Y se llamará sistema de referencia global ó de la estructura.

Para poder relacionar a cada una de las barras con la estructura, es necesario hacer referencia a un solo sistema coordinado. Los sistemas coordinados de cada barra se transformarán al sistema de referencia de la estructura mediante una transformación de coordenadas.

5.3 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

La ecuación de equilibrio de una barra la podemos establecer en dos sistemas de referencias y de la misma forma.

$$\underline{f}^o + \underline{k}\underline{u} = \underline{f}^e \quad \text{Referencia local.} \quad (5.3.1)$$

$$\overline{\underline{f}}^o + \overline{\underline{k}}\underline{u} = \overline{\underline{f}}^e \quad \text{Referencia global.} \quad (5.3.2)$$

Para realizar la transformación de una referencia local a una referencia global se requiere de una matriz de transformación. Esta matriz de transformación es la matriz de cosenos directores.

Para un punto en el espacio, la matriz de cosenos directores es:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \cos x X & \cos y X & \cos z X \\ \cos x Y & \cos y Y & \cos z Y \\ \cos x Z & \cos y Z & \cos z Z \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

Para un punto en el plano

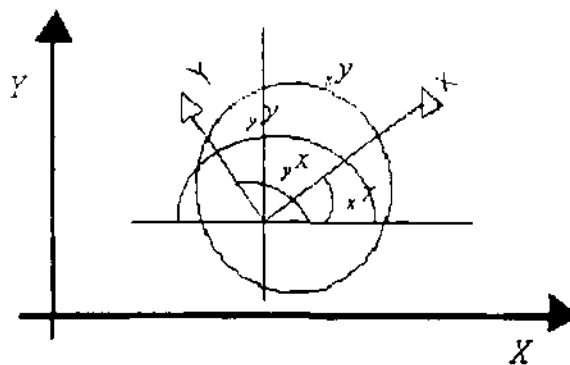


Fig. 5.2 Referencial local y global.

La matriz de cosenos directores se simplifica

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \cos x X & \cos y X & 0 \\ \cos x Y & \cos y Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

Llamando θ al ángulo formado por los ejes X y x

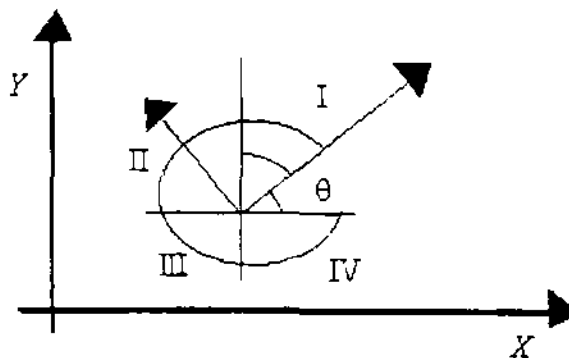


Fig. 5.3 Cuadrantes.

y considerando el primer cuadrante

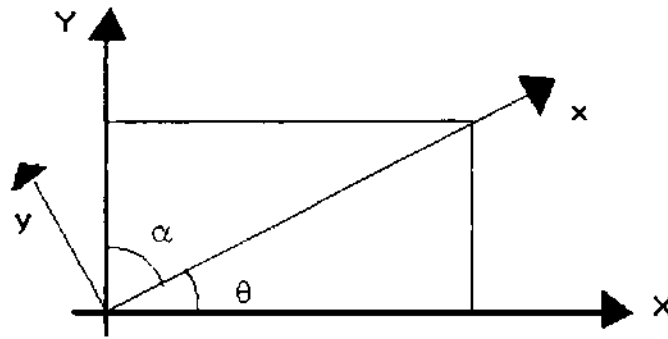


Fig. 5.4 Primer Cuadrante.

Se tiene

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta & 0 \\ -\text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

En forma abreviada: $\underline{a} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.6)$$

La matriz de transformación de una barra plana, definida por dos puntos nodales "i" y "j" es:

$$\bar{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{a} \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

La primera matriz \underline{a} (elemento 1,1) de la matriz $\bar{\underline{a}}$ indica la transformación de los elementos del nudo "i", y la segunda (elemento 2,2) de "j".

Al sustituir los elementos de \underline{a} en $\bar{\underline{a}}$ se tiene explícitamente

$$\bar{\underline{a}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.3.8)$$

Esta matriz indicará una transformación de una referencia global a una referencia local.

La traspuesta de la matriz $\bar{\underline{a}}$ será:

$$\bar{\underline{a}}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.3.9)$$

Esta matriz indicará la transformación de una referencia local a una referencia global.

Al aplicar la matriz de transformación a los vectores de fuerza de fijación, desplazamientos y fuerzas equilibrantes, se tiene:

$$\bar{\underline{f}}^0 = \bar{\underline{a}}^T \underline{f}^0 \quad \underline{f}^e = \bar{\underline{a}} \bar{\underline{f}}^e \quad (5.3.10)$$

$$\bar{\underline{u}}^0 = \bar{\underline{a}}^T \underline{u} \quad \underline{u} = \bar{\underline{a}} \bar{\underline{u}} \quad (5.3.11)$$

$$\bar{\underline{f}}^e = \bar{\underline{a}}^T \underline{f}^e \quad \underline{f}^e = \bar{\underline{a}} \bar{\underline{f}}^e \quad (5.3.12)$$

Transformación
Local a Global

Transformación
Global a Local.

Para obtener la matriz de rigidez en referencia global, es necesario realizar las siguientes operaciones:

$$\underline{f}^u = \underline{k} \underline{u}$$

$$\underline{f}^u = \underline{a}^T \underline{f}^u$$

$$\underline{f}^u = \underline{a}^T \underline{k} \underline{u}$$

$$\underline{f}^u = \underline{a}^T \underline{k} \underline{a} \underline{u},$$

$$\underline{k} \underline{u} = \underline{a}^T \underline{k} \underline{a} \underline{u}$$

$$\underline{k} = \underline{a}^T \underline{k} \underline{a} \tag{5.3.13}$$

En general:

$$\underline{x} = \underline{a} \underline{x} \quad (\text{Transformación de global a local}) \tag{5.3.14}$$

$$\underline{x} = \underline{a}^T \underline{x} \quad (\text{Transformación de local a global}) \tag{5.3.15}$$

Se cumple:

$$\underline{a}^T \underline{a} = \underline{a} \quad \underline{a}^T = \underline{I} \tag{5.3.16}$$

Nota:

Para no tener que efectuar continuamente estas operaciones, es conveniente tener en forma explícita la transformación de vectores y matriz de rigidez. Para ello se efectuarán los productos antes mencionados.

Obtención del vector de fuerzas de fijación en referencia global (\bar{f}^0)

$$\bar{f}^0 = \mathbf{a}^T \mathbf{f}^0$$

Donde:

$$\bar{f}^0 = \begin{bmatrix} F_{ix}^0 \\ F_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ F_{jx}^0 \\ F_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix} \quad (5.3.17)$$

$$\bar{f}^0 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ix}^0 \\ F_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ F_{jx}^0 \\ F_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cF_{ix}^0 - sF_{iy}^0 \\ sF_{ix}^0 + cF_{iy}^0 \\ M_{iz}^0 \\ cF_{jx}^0 - sF_{jy}^0 \\ sF_{jx}^0 + cF_{jy}^0 \\ M_{jz}^0 \end{bmatrix} \quad (5.3.18)$$

De manera similar pueden definirse en referencia local a \bar{u} y \bar{f}^e , suponiendo conocido \bar{u} y \bar{f}^e aplicando la ecuación (5.3.14).

La obtención de la matriz de rigidez \bar{k} en referencia global se obtiene al efectuar los

productos : $\bar{k} = \mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a}$

$$\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} =$$

\mathbf{a}^T

\mathbf{k}

$$\begin{bmatrix} c k_{11} & -s k_{22} & -s k_{23} & c k_{14} & -s k_{25} & -s k_{26} \\ s k_{11} & c k_{22} & c k_{23} & s k_{14} & c k_{25} & c k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ c k_{41} & -s k_{52} & -s k_{53} & c k_{44} & -s k_{55} & -s k_{56} \\ s k_{41} & c k_{52} & c k_{53} & s k_{44} & c k_{55} & c k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \end{matrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} c^2 k_{11} + s^2 k_{22} & c s k_{11} - c s k_{22} & -s k_{23} & c^2 k_{14} + s^2 k_{25} & c s k_{14} - c s k_{25} & -s k_{26} \\ c s k_{11} - c s k_{22} & s^2 k_{11} + c^2 k_{22} & c k_{23} & c s k_{14} - c s k_{25} & s^2 k_{14} + c^2 k_{25} & c k_{26} \\ -s k_{23} & c k_{23} & k_{33} & -s k_{35} & c k_{35} & k_{36} \\ c^2 k_{14} + s^2 k_{25} & c s k_{14} - c s k_{25} & -s k_{35} & c^2 k_{44} + s^2 k_{55} & c s k_{44} - c s k_{55} & -s k_{56} \\ c s k_{14} - c s k_{25} & s^2 k_{14} + c^2 k_{25} & c k_{35} & c s k_{44} - c s k_{55} & s^2 k_{44} + c^2 k_{55} & c k_{56} \\ -s k_{26} & c k_{26} & k_{36} & -s k_{56} & c k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \end{matrix} \begin{matrix} \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \\ \bar{k} \end{matrix} \quad (5.3.19)$$

Los coeficientes \bar{k} que se indican, son los coeficientes de la matriz \bar{k} en referencia local.

5.4 MÉTODO DE RIGIDECES PARA RESOLVER UNA ESTRUCTURA.

El método de rigideces consistirá de los siguientes pasos:

- Establecer la ecuación de equilibrio en referencia local.

$$\bar{f}^o + \bar{k} \bar{u} = \bar{f}^e \quad (5.4.1)$$

- Establecer la ecuación de equilibrio en referencia global.

$$\bar{f}^o + \bar{k} \bar{u} = \bar{f}^e \quad (5.4.2)$$

- Definir la ecuación de equilibrio de la estructura.

$$\sum_{m=1}^{NB} \left(\bar{f}_m^o + \bar{k}_m \bar{u}_m \right) = \sum_{m=1}^{NB} \bar{f}_m^e \quad (5.4.3)$$

Representado en notación vectorial.

$$F^o + K U = F^e \quad (5.4.4)$$

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$K U = P \quad (5.4.5)$$

Donde $P = F^e - F^o$

- Obtener el vector de desplazamientos de la estructura U .
- Obtener el vector de desplazamientos en referencia global de cada barra \bar{u} .
- Obtener el vector de desplazamientos en referencia local de cada barra u .
- Sustituir en la ecuación de equilibrio de cada barra.

$$f^o + k u = f^e \quad (5.4.6)$$

y obtener las fuerzas equilibrantes f^e .

Los pasos anteriores se describirán con detalle a continuación:

- Ecuación de equilibrio en referencia local

$$f^o + k u = f^e$$

De la ecuación anterior se obtendrá el vector \underline{f}^o y la matriz de rigidez de cada barra. Los vectores \underline{u} y \underline{f}^e son incógnitas.

- Ecuación de equilibrio en referencia global.

Para obtener los valores de estos vectores y matrices, se define la matriz de transformación para cada barra y se obtiene \bar{f}^o y \bar{k} .

$$\bar{f}^o = \bar{a}^T f^o$$

$$\bar{k} = \bar{a}^T k \bar{a}$$

Los vectores \bar{u} y \bar{f}^e siguen siendo incógnitas.

Nota:

No se requiere hacer los productos de transformación puesto que ya se han realizado en forma explícita. Solo hay que sustituir valores conociendo L , $\cos\theta$, $\sin\theta$.

- Ecuación de equilibrio de la estructura.

$$\sum_{m=1}^{NB} \begin{pmatrix} - & - & - \\ f^o + k_m & u_m & \\ - & - & - \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{NB} \begin{pmatrix} - \\ f_m^e \\ - \end{pmatrix}$$

Esta ecuación no indica una suma algebraica de todas las barras sino la superposición de efectos de todas las barras en el lugar que le corresponde. En otras palabras representa un ensamble de todas la barras para definir la ecuación de equilibrio de la estructura.

$$F^o + K U = F^e$$

Donde:

F^o es el vector de fuerzas de fijación de la estructura.

K es la matriz de rigidez de la estructura.

U es el vector de desplazamiento de la estructura.

F^e es el vector de fuerzas externas de la estructura aplicadas directamente en sus puntos nodales.

Para poder hacer la superposición antes indicada de efectos en el lugar que le corresponde, se partirá de que existen 3 grados de libertad por punto nodal; por lo tanto el número de elementos del vector de desplazamientos u será igual a $3 \times NPE$ (Desplazamientos conocidos).

Para definir el número de incógnitas y el orden del sistema se definirá al vector CF (código de frontera) de la siguiente manera:

Convención:

Desplazamiento Libre = 0

Desplazamiento Restringido = 1

Desplazamiento Prescrito = -1

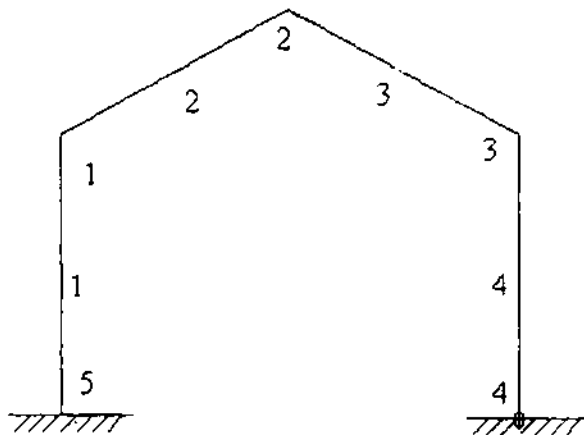


Fig. 5.5 Estructura reticular.

El vector CF para la estructura anterior Fig. 5.5 y de acuerdo a la convención antes señalada, será de la forma:

$$CF = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Nudo} \\ \text{Despl. x} \\ \text{Despl. y} \\ \text{Despl. z} \end{array} \quad (5.4.7)$$

ARREGLO DE NÚMERO DE ECUACIONES.

Este arreglo se forma por columnas cambiando por 1 el primer cero que encontraremos en el arreglo CF y después incrementamos en 1 el valor anterior por cada cero que encontremos. En caso de tener el valor 1 ó -1, este se cambiará en el arreglo NE por un cero sin afectar el valor anterior.

$$NE = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.8)$$

El máximo valor en el arreglo nos indica el orden del sistema de ecuaciones o el número de incógnitas en la estructura. Cada columna del arreglo NE nos define las ecuaciones que corresponden a los desplazamientos de cada nudo en la dirección correspondiente.

De esta manera cada nudo tiene una posición específica en los vectores y matrices.

Para la estructura anterior, el vector de desplazamientos de la estructura U tendrá los siguientes elementos con la posición que le corresponde a cada desplazamiento.

$$U = \begin{bmatrix} - \\ u_{1x} \\ - \\ - \\ u_{1y} \\ - \\ - \\ u_{1z} \\ - \\ - \\ u_{2x} \\ - \\ - \\ u_{2y} \\ - \\ - \\ u_{2z} \\ - \\ - \\ u_{3x} \\ - \\ - \\ u_{3y} \\ - \\ - \\ u_{3z} \\ - \\ - \\ u_{4z} \\ - \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (5.4.9)$$

5.5 CONSTRUCCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

Para formar la matriz de rigidez de la estructura, los elementos de la matriz de rigidez en referencia global se ensamblarán de acuerdo a su posición dada por el vector IE basado en el arreglo NE

Posición de acuerdo al vector IE basado en el arreglo NE de la Fig. 5.5

Barra 1

$i = 5$

$j = 1$

Los elementos que aparecen en la matriz k indicados con una x representan valores reales cualesquiera. Se indican de esta manera para ejemplificar el ensamble.

$$k = \begin{array}{c|cccccc|c} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & x & x & x & x & x & x & 0 \\ & x & x & x & x & x & x & 0 \\ & x & x & x & x & x & x & 0 \\ \hline & x & x & x & x & x & x & 1 \\ & x & x & x & x & x & x & 2 \\ & x & x & x & x & x & x & 3 \end{array} \quad IE = \begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ \hline & 1 \\ & 2 \\ & 3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i=⑤ \\ \\ j=① \\ \end{array} \quad (5.5.1)$$

Vector de indicadores de ecuación
Para la barra 1

Barra 3

$i = 2$

$j = 3$

$$k = \begin{array}{c|cccccc|c} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \hline & x & x & x & x & x & x & 4 \\ & x & x & x & x & x & x & 5 \\ & x & x & x & x & x & x & 6 \\ & x & x & x & x & x & x & 7 \\ & x & x & x & x & x & x & 8 \\ & x & x & x & x & x & x & 9 \end{array} \quad IE = \begin{array}{c|c} & 4 \\ & 5 \\ & 6 \\ \hline & 7 \\ & 8 \\ & 9 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i=② \\ \\ j=③ \\ \end{array} \quad (5.5.2)$$

Vector de indicadores de ecuación
Para la barra 3

5.6 CONSTRUCCION DEL VECTOR DE FUERZAS DE FIJACION.

El vector de fuerzas de fijación de la estructura F^e , se formará con el ensamble de cada vector \bar{f}^e , con cada elemento colocado en su posición específica de acuerdo al vector IE.

5.7 CONSTRUCCION DEL VECTOR DE FUERZAS EXTERNAS.

El vector F^e se formará con el ensamble de cada vector \bar{f}^e , con cada elemento colocado en su posición específica de acuerdo al vector IE.

$$F = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1x} & 1 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{1y} & 2 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{1z} & 3 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{2x} & 4 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{2y} & 5 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{2z} & 6 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{3x} & 7 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{3y} & 8 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{3z} & 9 \\ - & \\ - & \\ \bar{F}_{4z} & 10 \\ - & \end{bmatrix}$$

(5.7.1)

6 ELEMENTOS MECANICOS Y CINEMATICOS DE LA ESTRUCTURA

Una vez establecida la ecuación de equilibrio de la estructura.

$$F^o + K U = F^e$$

se procede a resolver el sistema de ecuaciones

$$K U = F^e - F^o = P$$

Para efectuar la solución, se empleará cualquier método de solución de sistemas de ecuaciones:

- Métodos Directos.
- Métodos Iterativos.

6.1 ELEMENTOS CINEMATICOS

La solución del sistema de ecuaciones $KU=P$, es el vector de desplazamientos de la estructura.

$$U = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \\ \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_9 \\ \bar{u}_{10} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nudo 1} \\ \\ \text{nudo 2} \\ \\ \text{nudo 3} \\ \\ \text{nudo 4} \end{matrix} \quad \cdot \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \bar{w}_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \bar{w}_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 \end{bmatrix} \quad (6.1.1)$$

La posición del vector de desplazamientos global de cada barra estará de acuerdo al vector **IE**

Así por ejemplo, para la barra 1

$$i=1, j=5$$

Se tiene

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

El vector de desplazamiento en referencia local, se obtiene al hacer la transformación

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{u}}.$$

En forma explícita

$$\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c u_i + s v_i \\ -s u_i + c v_i \\ w_i \\ c u_j + s v_j \\ -s u_j + c v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{a}} \quad \underline{\mathbf{u}} \quad \underline{\mathbf{u}} \quad (6.1.2)$$

esto se hará para cada barra.

6.2 ELEMENTOS MECANICOS

Para obtener los elementos mecánicos de cada barra, sustituimos en la ecuación de equilibrio de la barra.

$$\mathbf{f}^o + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f}^e$$

y se obtiene el vector de fuerzas equilibrantes, que es la solución del problema.

Ya que los elementos que se encuentran a la izquierda son conocidos, efectuamos las operaciones, terminando de esta manera el análisis de la estructura.

7. EJEMPLOS.

7.1 INTRODUCCION.

En el presente capítulo se resolverá el ejemplo de un marco con 5 barras, donde se mostrará paso a paso las operaciones para resolverlo y comprender la metodología del método de rigideces.

7.2 EJEMPLO.

Resolver el marco ante las dos condiciones de carga siguientes:

I) Para la carga vertical:

II) Para la carga horizontal:

y obtener :

- M (Diagrama de momentos)
- V (Diagrama de cortantes)
- N (Diagrama de normales)
- Reacciones.

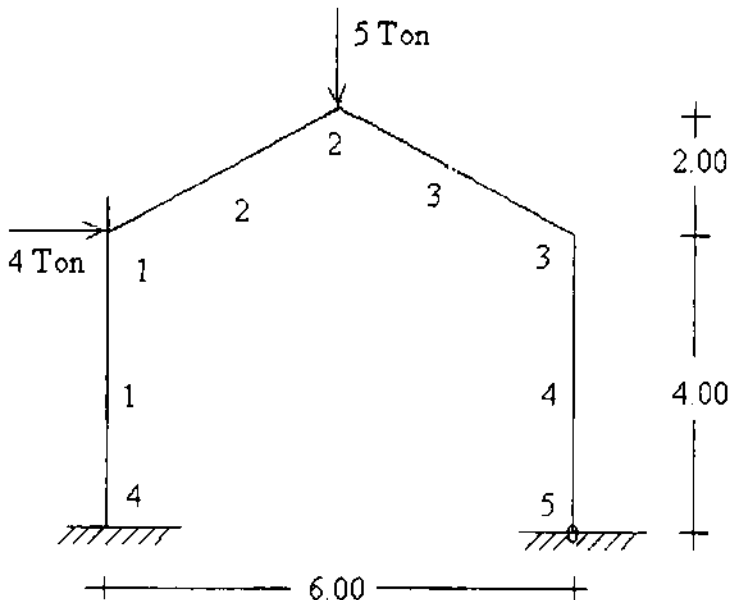


Fig. 7.1 Marco.

7.3 SOLUCION.

7.3.1 DATOS

Longitud de la barra [2] y [3]

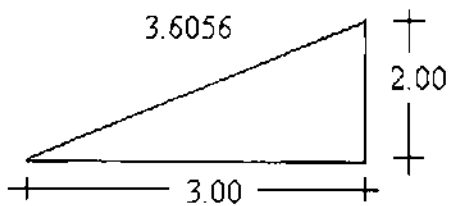


Fig. 7.2 Barra 2 y 3

$$\sqrt{9+4} = \sqrt{13} = 3.6056 \text{ m}$$

Sec. Columnas 30x40 cm.

Sec. Traveses 30x60 cm.

$$f'c = 200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

7.3.2 CONSTANTES

$$E = 10,000\sqrt{f'c} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \nu = 0.2$$

donde: E es el módulo de elasticidad
 ν es el módulo de Poisson.

$$E = 141,421.35 \text{ Kg/cm}^2 = 1,414,213.5 \text{ T/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{10,000\sqrt{200}}{2(1+\nu)} = \frac{141,421.351}{2(1+0.2)} = 58,925.565 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\phi_y = \frac{12 f_y EI}{AGL^2}$$

$$I_{\text{trabes}} = \frac{0.30 \times 0.60^2}{12} = 0.0054 \text{ cm}^4 \quad A = 0.18 \text{ m}^2$$

$$I_{\text{Columnas}} = \frac{0.30 \times 0.40^2}{12} = 0.0016 \text{ cm}^4 \quad A = 0.12 \text{ m}^2$$

Al calcular ϕ_y para cada barra:

$$\phi_{y1,4} = \frac{12 f_y EI}{AGL^2} = \frac{12(1.2)(141,421.35)(0.0016)}{(0.12)(58,925.565)(16.00)} = \frac{3,258.3479}{113,137.0848} = 0.0288$$

$$\phi_{y2,3} = \frac{12 f_y EI}{AGL^2} = \frac{12(1.2)(141,421.35)(0.0054)}{(0.12)(58,925.565)(13.00)} = \frac{10,996.9243}{137,885.8221} = 0.0798$$

1. Para obtener el orden del sistema, obtenemos la matriz de código de frontera (C. F.) :

	1	2	3	4	5	Nudo
C.F.	0	0	0	1	1	Paralela a x
	0	0	0	1	1	Paralela a y
	0	0	0	1	0	despl. en z

Sustituyendo valores

$$\frac{EA}{L} = \frac{1,414,213.56(0.12)}{4.00} = 42,426.4068$$

$$\frac{12EI_z}{(1+\phi_x)L^3} = \frac{(12)(1,414,213.56)(0.0016)}{64(1+0.0288)} = 412.3873$$

$$\frac{6EI_z}{(1+\phi_x)L^2} = \frac{(6)(1,414,213.56)(0.0016)}{(1+0.0288)16} = 824.7746$$

$$\frac{(4+\phi_x)EI_z}{(1+\phi_x)L} = \frac{(4+0.0288)(1,414,213.56)(0.0016)}{(1+0.0288)4} = 2,215.2347$$

$$\frac{(2-\phi_x)EI_z}{(1+\phi_x)L} = \frac{(2-0.0288)(1,414,213.56)(0.0016)}{(1+0.0288)4} = 1,083.8638$$

Matriz de rigidez de la barra 1

$$k_1 = \begin{bmatrix} 42,426.4068 & 0 & 0 & -42,426.4068 & 0 & 0 \\ 0 & 412.3873 & 824.7746 & 0 & -412.3873 & 824.7746 \\ 0 & 824.7746 & 2,215.2347 & 0 & -824.7746 & 1,083.8638 \\ -42,426.4068 & 0 & 0 & 42,426.4068 & 0 & 0 \\ 0 & -412.3873 & -824.7746 & 0 & 412.3873 & -824.7746 \\ 0 & 824.7746 & 1,083.8638 & 0 & -824.7746 & 2,215.2347 \end{bmatrix}$$

De la misma manera:

Matriz de rigidez de las barras 2 y 3

$$\frac{EA}{L} = \frac{1,414,213.56 \text{ Ton/m}^2 (0.118)}{3.6056} = 70,600.8544$$

$$\frac{12EI_z}{(1+\phi_x)L^3} = \frac{(12)(1,414,213.56)(0.0054)}{46.8741(1+0.0798)} = 1,810.5634$$

$$\frac{6EI_z}{(1+\phi_x)L^2} = \frac{(6)(1,414,213.56)(0.0054)}{(1+0.0798)13} = 3,264.1742$$

$$\frac{(2-\phi_x)EI_z}{(1+\phi_x)L} = \frac{(2+0.0798)(1,414,213.56)(0.0054)}{(1+0.0798)3.6056} = 3,766.4684$$

$$\frac{(4 + \phi_v)EI_z}{(1 + \phi_v)L} = \frac{(4 + 0.0798)(1,414,213.56)(0.0054)}{(1 + 0.0798)3.6056} = 8,002.5199$$

$$\begin{matrix} \underline{k_2} = \\ \underline{k_3} = \end{matrix} \begin{bmatrix} 70,600.8544 & 0 & 0 & -70,600.8544 & 0 & 0 \\ 0 & 1,810.5634 & 3,264.1742 & 0 & -1,810.5634 & 3,264.1742 \\ 0 & 3,264.1742 & 8,002.5199 & 0 & -3,264.1742 & 3,766.4686 \\ -70,600.8544 & 0 & 0 & 70,600.8544 & 0 & 0 \\ 0 & -1,810.5634 & -3,264.1742 & 0 & 1,810.5634 & -3,264.1742 \\ 0 & 3,264.1742 & 3,766.4686 & 0 & -3,264.1742 & 8,002.5199 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de una barra articulada en "j" es:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} - \frac{k_{26} k_{62}}{k_{66}} & k_{23} - \frac{k_{26} k_{63}}{k_{66}} & 0 & k_{25} - \frac{k_{26} k_{65}}{k_{66}} & 0 \\ 0 & k_{32} - \frac{k_{36} k_{63}}{k_{66}} & k_{33} - \frac{k_{36} k_{63}}{k_{66}} & 0 & k_{35} - \frac{k_{36} k_{65}}{k_{66}} & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} - \frac{k_{56} k_{62}}{k_{66}} & k_{53} - \frac{k_{56} k_{63}}{k_{66}} & 0 & k_{55} - \frac{k_{56} k_{65}}{k_{66}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde los valores de cada elemento se toman de la matriz de rigideces de la barra "1"

Matriz de rigidez para la barra "4".

$$\underline{k_4} = \begin{bmatrix} 42,426.4068 & 0 & 0 & -42,426.4068 & 0 & 0 \\ 0 & 105.3078 & 421.2312 & 0 & -105.3078 & 0 \\ 0 & 421.2312 & 1,684.9249 & 0 & -421.2312 & 0 \\ -42,426.4068 & 0 & 0 & 42,426.4068 & 0 & 0 \\ 0 & -105.3078 & -421.2312 & 0 & 105.3078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es calcular la matriz de rigideces de cada barra en referencia global.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 c^2 k_{11} + s^2 k_{22} & c s k_{11} - c s k_{22} & -s k_{23} & c^2 k_{14} + s^2 k_{25} & c s k_{14} - c s k_{25} & -s k_{26} \\
 c s k_{11} - c s k_{22} & s^2 k_{11} + c^2 k_{22} & c k_{23} & c s k_{14} - c s k_{25} & s^2 k_{14} + c^2 k_{25} & c k_{26} \\
 -s k_{23} & c k_{23} & k_{33} & -s k_{35} & c k_{35} & k_{36} \\
 c^2 k_{14} + s^2 k_{25} & c s k_{14} - c s k_{25} & -s k_{35} & c^2 k_{44} + s^2 k_{55} & c s k_{44} - c s k_{55} & -s k_{56} \\
 c s k_{14} - c s k_{25} & c^2 k_{14} + s^2 k_{25} & c k_{35} & c s k_{44} - c s k_{55} & s^2 k_{44} + c^2 k_{55} & c k_{56} \\
 -s k_{26} & c k_{26} & k_{36} & -s k_{56} & c k_{56} & k_{66} \\
 \hline
 \end{array}$$

Sustituyendo valores

Barra No. 1

$$\angle 90^\circ \quad i = 4, j = 1$$

$$\underline{k}_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 0 & 412.3873 & 0 & -824.7746 & -412.3873 & 0 & -824.7746 \\
 0 & 0 & 42,426.4068 & 0 & 0 & -412.3873 & 0 \\
 -824.7746 & 0 & 0 & 2,215.2347 & 824.7746 & 0 & 1,083.8638 \\
 -412.3873 & 0 & 0 & 824.7746 & 412.3873 & 0 & 824.7746 \\
 0 & -412.3873 & 0 & 0 & 0 & 42,426.406 & 0 \\
 -824.7746 & 0 & 1,083.8638 & 824.7746 & 0 & 0 & 2,215.2347 \\
 \hline
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 2 \\
 & & & & & & 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

Barra No. 2

$$\angle 33.69^\circ \quad i = 1, j = 2$$

$$\underline{k}_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 49,434.6859 & 31,749.3339 & -1,810.6349 & -49,434.6859 & 31,749.333 & -1,810.6349 & 1 \\
 31,749.3339 & 22,976.732 & 2,715.9592 & -31,749.3339 & -22,976.732 & 2,715.9592 & 2 \\
 -1,810.6349 & 2,715.9592 & 8,002.5199 & 1,810.6349 & -2,715.9592 & 3,766.4648 & 3 \\
 -49,434.685 & -31,749.333 & 1,810.6349 & 49,434.6859 & 31,749.333 & 1,810.6349 & 4 \\
 -31,749.333 & -22,976.732 & -2,715.9592 & 31,749.3339 & 22,976.732 & -2,715.9592 & 5 \\
 -1,810.6349 & 2,715.9592 & 3,766.4648 & 1,810.6349 & -2,715.9592 & 8,002.5199 & 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

Barra No. 3

 $\angle 326.31^\circ \quad i=2, j=3$

$$\underline{k_3} = \begin{bmatrix}
 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 4 & 49,434.6859 & -31,749.3339 & 1,810.6349 & -49,434.6859 & 31,749.3339 & 1,810.6349 \\
 5 & -31,749.3339 & 22,976.732 & 2,715.9592 & 31,749.3339 & -22,976.732 & 2,715.9592 \\
 6 & 1,810.6349 & 2,715.9592 & 8,002.5199 & -1,810.6349 & -2,715.9592 & 3,766.4648 \\
 7 & -49,434.6859 & 31,749.3339 & -1,810.6349 & 49,434.6859 & -31,749.333 & -1,810.6349 \\
 8 & 31,749.3339 & -22,976.732 & -2,715.9592 & -31,749.3339 & 22,976.732 & -2,715.9592 \\
 9 & 1,810.6349 & 2,715.9592 & 3,766.4648 & -1,810.6349 & -2,715.9592 & 8,002.5199
 \end{bmatrix}$$

Barra No.4

 $\angle 180^\circ \quad i=3, j=5$

$$\underline{k_4} = \begin{bmatrix}
 & 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 10 \\
 7 & 105.3078 & 0 & -421.2312 & -105.3078 & 0 & 0 \\
 8 & 0 & 42,426.4068 & 0 & 0 & -42,426.4068 & 0 \\
 9 & -421.2312 & 0 & 1,684.9249 & 421.2312 & 0 & 0 \\
 0 & -105.3078 & 0 & 421.2312 & 105.3078 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -412.3873 & 0 & 0 & 42,426.4068 & 0 \\
 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

7.5 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA.

La obtención de esta matriz se obtiene efectuando el ensamble de las matrices de rigidez en referencia global de las 5 barras.

Matriz de rigidez de la estructura $[K]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
412.387	0	824.774	-49434.	-31749.	-1810.6	0	0	0	0	1
49434.6	31749.3	-1810.6								2
0	42426.4	0	-31749.	-22976.7	21715.9	0	0	0	0	3
31749.3	22976.7	21715.9								4
824.774	0	2215.23	1810.6	-2715.9	3766.46	0	0	0	0	5
-1810.6	21715.9	8002.51								6
-49434.	-31749.	1810.6	49434.6	31749.3	1810.6	-49434.	31749.3	1810.6	0	7
			49434.6	-31749.3	1810.6					8
-31749.	-22976.7	-2715.9	31749.3	22976.7	-2715.9	31749.3	22976.7	2715.9	0	9
			-31749.	22976.7	2715.9					10
-1810.6	2715.9	3766.46	1810.6	-2715.9	8002.51	-1810.6	-2715.9	3766.46	0	
			1810.6	2715.9	8002.51					
0	0	0	-49434.	31749.3	-1810.6	49434.6	-31749.	-1810.6	0	
						105.307	0	-421.23		
0	0	0	31749.3	-22976.	-2715.9	-31749.	22976.73	-2715.9	0	
						0	42426.4	0		
0	0	0	1810.6	2715.9	3766.46	-1810.6	-2715.9	8002.51	0	
						-421.23	0	1684.92		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

$[K]$

Al efectuar la suma de valores en un mismo casillero

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
49,847.	31,749.	-958.860	-49,434.	-31,749.	-1810.6	0	0	0	0	1
31,749.	65,403.	2,715.9	-31,749.	-22,976.	2,715.9	0	0	0	0	2
-985.860	2,715.9	10218.4	1810.6	-2,715.9	3,766.46	0	0	0	0	3
-49,434.	-31,749.	1810.6	98,869.3	0	3,621.26	-49,434.	31,749.	1810.6	0	4
-31,749.	-22,976.	-2,715.9	0	45,953.4	0	31,749.	-22,976.	2,715.9	0	5
-1810.6	2,715.9	3766.46	3,621.26	0	16,005.0	-1810.6	-2,715.9	3766.46	0	6
0	0	0	-49,434.	31,749.	-1810.6	49,539.9	-31,749.	-2231.8	0	7
0	0	0	31,749.	-22,976.	-2,715.9	-31,749.	65,403.1	-2,715.9	0	8
0	0	0	1810.6	2,715.9	3766.46	-2231.8	-2,715.9	9,687.44	0	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	10

$[K]$

7.6 VECTOR DE FUERZAS DE FIJACION.

El vector de fuerzas de fijación en referencias local y global en ambos casos es :

$$\underline{f}_1^o = \underline{f}_2^o = \underline{f}_3^o = \underline{f}_4^o = \overline{f}_1^o = \overline{f}_2^o = \overline{f}_3^o = \overline{f}_4^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.7 CASO I, PARA LA CARGA VERTICAL.

$$F^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Al resolver el sistema $K U = P$, donde $(P = F^e - F^o)$ por el método de Gauss-Crout para matrices simétricas y cuadradas se tiene :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 2.8234 \times 10^{-3} \\ -6.3500 \times 10^{-5} \\ -1.4779 \times 10^{-3} \\ 5.0030 \times 10^{-3} \\ -3.3721 \times 10^{-3} \\ -4.2186 \times 10^{-5} \\ 7.1922 \times 10^{-3} \\ -5.4303 \times 10^{-5} \\ 1.6684 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Los desplazamientos en referencia global para cada barra y su posición de acuerdo al arreglo N.E. será :

$$\begin{aligned} \underline{\bar{u}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.8234 \times 10^{-3} \\ -6.3500 \times 10^{-5} \\ -1.4779 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \underline{\bar{u}}_2 &= \begin{bmatrix} 2.8234 \times 10^{-3} \\ -6.3500 \times 10^{-5} \\ -1.4779 \times 10^{-3} \\ 5.0030 \times 10^{-3} \\ -3.3721 \times 10^{-3} \\ -4.2186 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \underline{\bar{u}}_3 &= \begin{bmatrix} 5.0030 \times 10^{-3} \\ -3.3721 \times 10^{-3} \\ -4.2186 \times 10^{-5} \\ 7.1922 \times 10^{-3} \\ -5.4303 \times 10^{-5} \\ 1.6654 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \underline{\bar{u}}_4 &= \begin{bmatrix} 7.1922 \times 10^{-3} \\ -5.4303 \times 10^{-5} \\ 1.6654 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{matrix} \end{aligned}$$

Para pasar de referencia global el vector de desplazamientos $\underline{\bar{u}}$ a la referencia local, se multiplica cada matriz del vector $\underline{\bar{u}}$ por la matriz de transformación $\underline{\bar{a}}$ (5.3.14).

Barra No. 1 $\angle 90^\circ$ Sen 1 ; Cos 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.8234 \times 10^{-3} \\ -6.3500 \times 10^{-5} \\ -1.4779 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0000635 \\ -0.0028234 \\ -0.0014779 \end{bmatrix}$$

Barra No. 2 $\angle 33.69^\circ$ Sen 0.5547 ; Cos 0.8321

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8234 \times 10^{-3} \\ -6.3500 \times 10^{-5} \\ -1.4779 \times 10^{-3} \\ 5.003 \times 10^{-3} \\ -3.3721 \times 10^{-3} \\ -4.2186 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.0023141 \\ -0.0016189 \\ -0.0014779 \\ 0.0022924 \\ -0.0055810 \\ -0.0000421 \end{bmatrix}$$

Barra No.3 $\angle 326.31^\circ$ Sen 0.5547 ; Cos 0.8321

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.003 \times 10^{-3} \\ -3.3721 \times 10^{-3} \\ -4.2186 \times 10^{-5} \\ 7.1922 \times 10^{-3} \\ -5.4303 \times 10^{-5} \\ 1.6684 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.006033 \\ -0.0000307 \\ -0.0000421 \\ 0.006014 \\ 0.003944 \\ 0.001668 \end{bmatrix}$$

Barra No. 4 $\angle 90^\circ$ Sen -1 ; Cos 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.1922 \times 10^{-3} \\ -5.4303 \times 10^{-5} \\ 1.6684 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -0.0000543 \\ -0.0071922 \\ 0.0016684 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.7.1 ELEMENTOS EQUILIBRANTES

Los elementos equilibrantes se obtendrán al sustituir en la ecuación de equilibrio.

Barra 1 $\underline{f_1^o} + \underline{k_1 u_1} = \underline{f_1^e}$ (Para obtener $\underline{f_1^e}$ de cada barra)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42426.4 & 0 & 0 & -42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & 412.387 & 824.774 & 0 & -412.387 & 824.774 \\ 0 & 824.774 & 2216.23 & 0 & -824.774 & 1083.86 \\ -42426.4 & 0 & 0 & 42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & -412.387 & -824.774 & 0 & 412.387 & -824.774 \\ 0 & 824.774 & 1083.86 & 0 & -824.774 & 2216.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.35E-5 \\ -2.83E-3 \\ -1.47E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.392 \\ -0.530 \\ -0.650 \\ 2.392 \\ -0.530 \\ 1.470 \end{bmatrix}$$

Barra 2 $\underline{f_2^o} + \underline{k_2 u_2} = \underline{f_2^e}$ (Para obtener $\underline{f_2^e}$ de cada barra)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70600.85 & 0 & 0 & -70600.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1810.563 & 3264.17 & 0 & -1810.56 & 3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 8002.519 & 0 & -3264.17 & 3766.46 \\ -70600.8 & 0 & 0 & 70600.85 & 0 & 0 \\ 0 & -1810.56 & -3264.17 & 0 & 1810.563 & -3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 3766.46 & 0 & -3264.17 & 8002.519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.31E-3 \\ -1.61E-3 \\ -1.47E-3 \\ 2.29E-3 \\ -5.58E-3 \\ -4.21E-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.768 \\ 1.696 \\ 1.470 \\ 1.768 \\ 1.696 \\ -4.645 \end{bmatrix}$$

Barra 3 $f_3^o + k_3 u_3 = f_3^e$ (Para obtener f_3^e de cada barra)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70600.8 & 0 & 0 & -70600.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1810.563 & 3264.17 & 0 & -1810.56 & 3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 8002.51 & 0 & -3264.17 & 3766.46 \\ -70600.8 & 0 & 0 & 70600.85 & 0 & 0 \\ 0 & -1810.56 & -3264.17 & 0 & 1810.563 & -3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 3766.46 & 0 & -3264.17 & 8002.519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.03E-3 \\ -3.07E-5 \\ -4.21E-5 \\ 6.014E-3 \\ 3.94E-3 \\ 1.66E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.888 \\ -1.876 \\ -4.645 \\ 1.888 \\ -1.876 \\ 2.120 \end{bmatrix}$$

Barra 4 $f_4^o + k_4 u_4 = f_4^e$ (Para obtener f_4^e de cada barra)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42426.40 & 0 & 0 & -42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & 105.3078 & 412.3873 & 0 & -105.307 & 0 \\ 0 & 412.3873 & 1684.924 & 0 & -412.387 & 0 \\ -42426.4 & 0 & 0 & 42426.40 & 0 & 0 \\ 0 & -105.307 & -421.231 & 0 & 105.3078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.43E-5 \\ -7.19E-3 \\ 1.66E-3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.608 \\ 0.530 \\ 2.120 \\ 2.608 \\ 0.530 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.7.2 Diagramas.

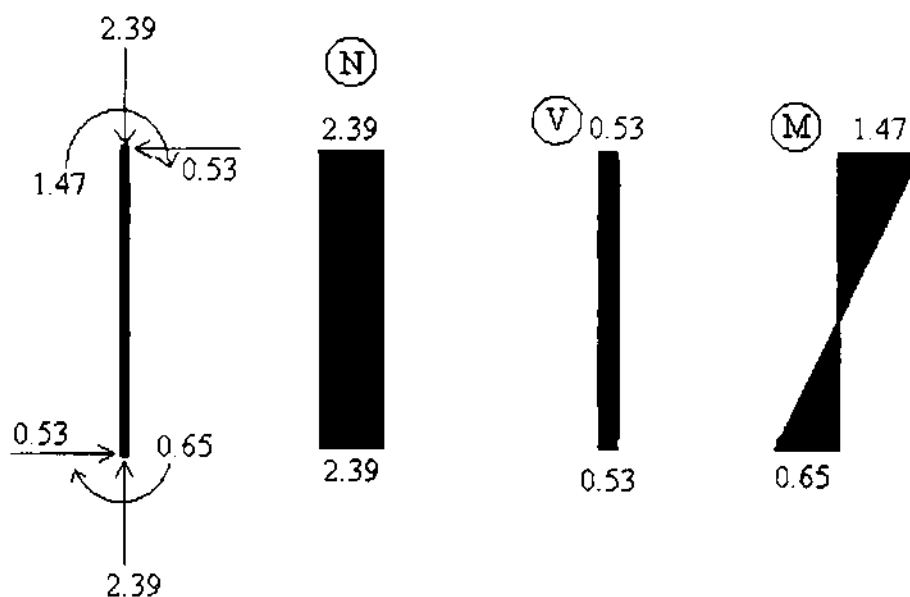


Fig. 7.3 Diagramas. Barra 1

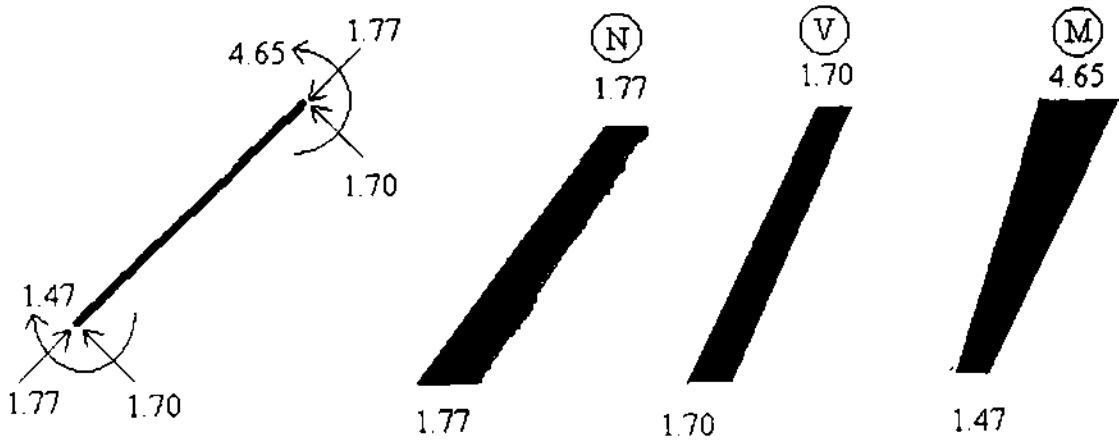


Fig. 7.4 Diagramas. Barra 2

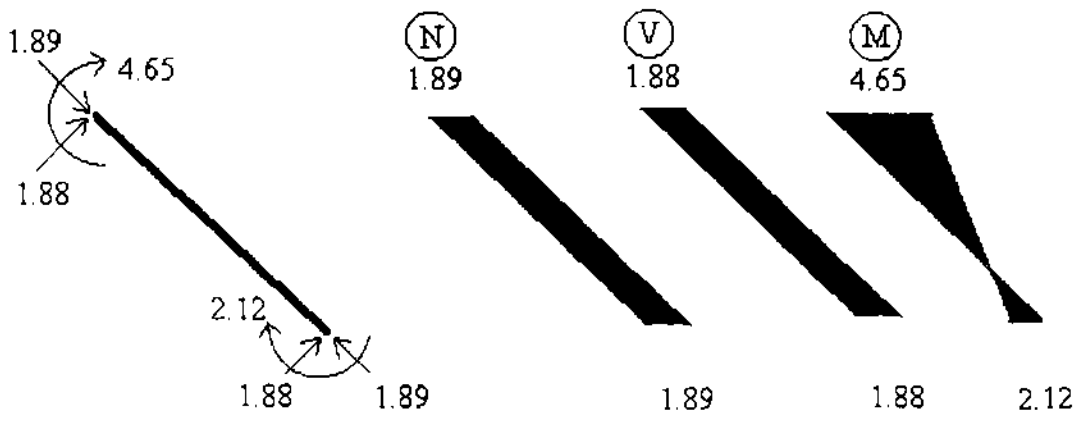


Fig. 7.5 Diagramas. Barra 3

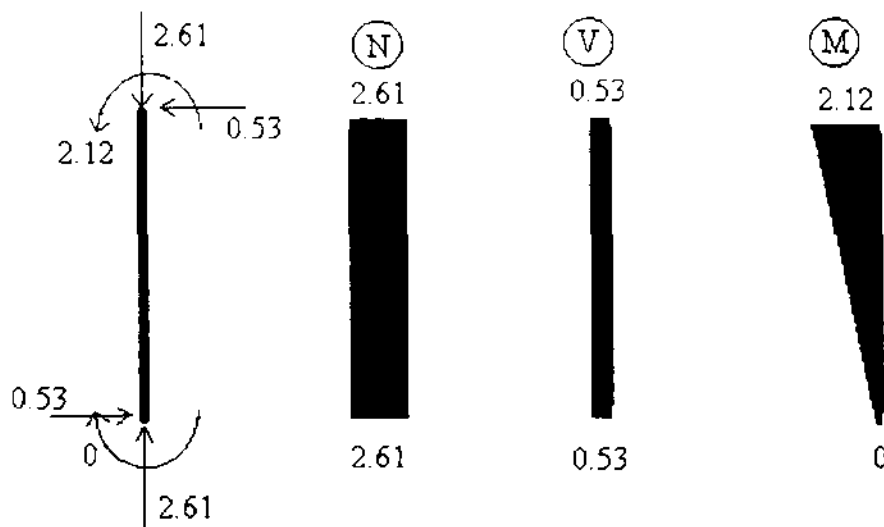


Fig. 7.6 Diagramas. Barra 4

7.7.3 Reacciones.

$$R_{4x} = 0.530 \text{ Ton}$$

$$R_{4y} = 2.392 \text{ Ton}$$

$$M_{4z} = -0.650 \text{ T-m}$$

$$R_{5x} = -0.530 \text{ Ton}$$

$$R_{5y} = 2.608 \text{ Ton}$$

$$M_{5z} = 0 \text{ T-m}$$

7.8 CASO II. PARA CARGA HORIZONTAL.

Para el caso de la carga horizontal, se procederá de manera similar. El sistema a resolver nuevamente será: $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}$, donde la matriz \mathbf{K} de la estructura es la misma del caso anterior y el vector de fuerzas externas \mathbf{F}^e será:

$$\underline{F}^e = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $KU=P$ donde la matriz de rigidez de la estructura no cambia y $P = F^e - F^o$, se obtiene

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1.12020 \times 10^{-2} \\ 7.108739 \times 10^{-6} \\ -1.796577 \times 10^{-3} \\ 1.270328 \times 10^{-2} \\ -2.258789 \times 10^{-3} \\ 6.553938 \times 10^{-5} \\ -7.107709 \times 10^{-6} \\ 1.500532 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Los vectores de desplazamiento en referencia global para cada barra son :

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.12020 \times 10^{-2} \\ 7.1087 \times 10^{-6} \\ -1.79651 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1.12020 \times 10^{-2} \\ 7.1087 \times 10^{-6} \\ -1.79651 \times 10^{-3} \\ 1.2703 \times 10^{-2} \\ -2.2587 \times 10^{-3} \\ 6.5539 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 1.2703 \times 10^{-2} \\ -2.2587 \times 10^{-3} \\ 6.5539 \times 10^{-5} \\ 1.4189 \times 10^{-2} \\ -7.1077 \times 10^{-6} \\ 1.5005 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad \underline{u}_4 = \begin{bmatrix} 1.4189 \times 10^{-2} \\ -7.1077 \times 10^{-6} \\ 1.5005 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

7.8.1 Elementos cinematicos

Los vectores de desplazamiento \underline{u} de cada barra en referencia local son :

Barra No.1 $\angle 90^\circ$ Sen 1 ; Cos 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.1202 \times 10^{-2} \\ 7.1087 \times 10^{-6} \\ -1.7965 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0000071 \\ -0.011202 \\ -0.0017965 \end{bmatrix}$$

Barra No. 2 $\angle 33.69^\circ$ Sen 0.5547 ; Cos 0.8321

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1202 \times 10^{-2} \\ 7.1087 \times 10^{-6} \\ -1.7965 \times 10^{-3} \\ 1.2703 \times 10^{-2} \\ -2.2587 \times 10^{-3} \\ 6.5539 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.009325 \\ -0.006207 \\ -0.0017965 \\ 0.0093172 \\ -0.008925 \\ -0.0000655 \end{bmatrix}$$

Barra No. 3 $\angle 326.31^\circ$ Sen 0.5547 ; Cos 0.8321

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2703 \times 10^{-2} \\ -2.2587 \times 10^{-3} \\ 6.5539 \times 10^{-5} \\ 1.4189 \times 10^{-2} \\ -7.1077 \times 10^{-6} \\ 1.5005 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.01182 \\ 0.005166 \\ 0.0000655 \\ 0.018106 \\ 0.007864 \\ 0.0015005 \end{bmatrix}$$

Barra No. 4 $\angle 90^\circ$ Sen 1 ; Cos 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4189 \times 10^{-2} \\ -7.1077 \times 10^{-6} \\ 1.5005 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000071 \\ -0.014189 \\ 0.001500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas equilibrantes para cada barra.

Barra 1 $\underline{f_1^o} + \underline{k_1 u_1} = \underline{f_1^e}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42426.4 & 0 & 0 & -42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & 412.387 & 824.774 & 0 & -412.387 & 824.774 \\ 0 & 824.774 & 2215.23 & 0 & -824.774 & 1083.86 \\ -42426.4 & 0 & 0 & 42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & -412.387 & -824.774 & 0 & 412.387 & -824.774 \\ 0 & 824.774 & 1083.86 & 0 & -824.774 & 2216.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.1E-6 \\ -1.12E-2 \\ -1.79E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.513 \\ 3.190 \\ 6.923 \\ -1.513 \\ 3.190 \\ -5.837 \end{bmatrix}$$

Barra 2 $\underline{f_2^o} + \underline{k_2 u_2} = \underline{f_2^e}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70600.85 & 0 & 0 & -70600.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1810.563 & 3264.17 & 0 & -1810.56 & 3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 8002.519 & 0 & -3264.17 & 3766.46 \\ -70600.8 & 0 & 0 & 70600.85 & 0 & 0 \\ 0 & -1810.56 & -3264.17 & 0 & 1810.563 & -3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 3766.46 & 0 & -3264.17 & 8002.519 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.32E-3 \\ -6.20E-3 \\ -1.79E-3 \\ 9.31E-3 \\ -8.92E-3 \\ 6.55E-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.165 \\ -1.708 \\ -5.837 \\ -0.165 \\ -1.708 \\ 0.321 \end{bmatrix}$$

Barra 3 $\underline{f_3^o} + \underline{k_3 u_3} = \underline{f_3^e}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70600.8 & 0 & 0 & -70600.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1810.56 & 3264.17 & 0 & -1810.56 & 3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 8002.51 & 0 & -3264.17 & 3766.46 \\ -70600.8 & 0 & 0 & 70600.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1810.56 & -3264.17 & 0 & 1810.56 & -3264.17 \\ 0 & 3264.17 & 3766.46 & 0 & -3264.17 & 8002.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.18E-2 \\ 5.16E-3 \\ 6.55E-5 \\ 1.81E-2 \\ 7.86E-3 \\ 1.50E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.513 \\ -0.810 \\ 0.321 \\ 1.513 \\ -0.810 \\ 3.240 \end{bmatrix}$$

Barra 4 $f_4^o + k_4 u_4 = f_4^e$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42426.40 & 0 & 0 & -42426.4 & 0 & 0 \\ 0 & 105.3078 & 412.3873 & 0 & -105.307 & 0 \\ 0 & 412.3873 & 1684.924 & 0 & -412.231 & 0 \\ -42426.4 & 0 & 0 & 42426.40 & 0 & 0 \\ 0 & -105.307 & -421.231 & 0 & 105.3078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.1E-5 \\ -1.41E-2 \\ 1.50E-3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.513 \\ 0.810 \\ 3.240 \\ 1.513 \\ 0.810 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.8.2 Diagramas.

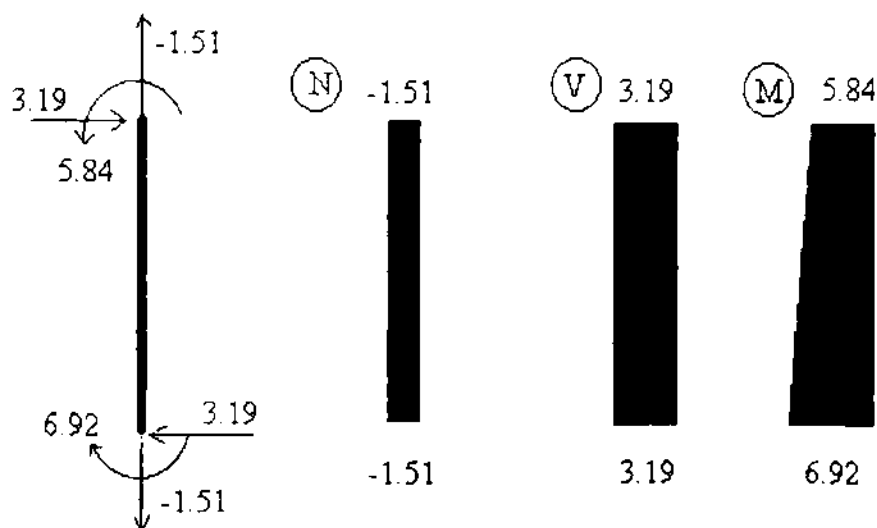


Fig. 7.7 Diagramas. Barra 1

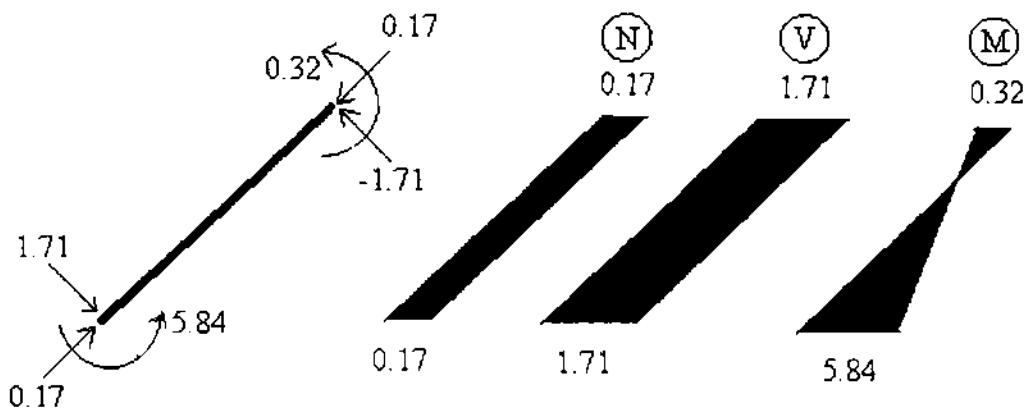


Fig. 7.8 Diagramas. Barra 2

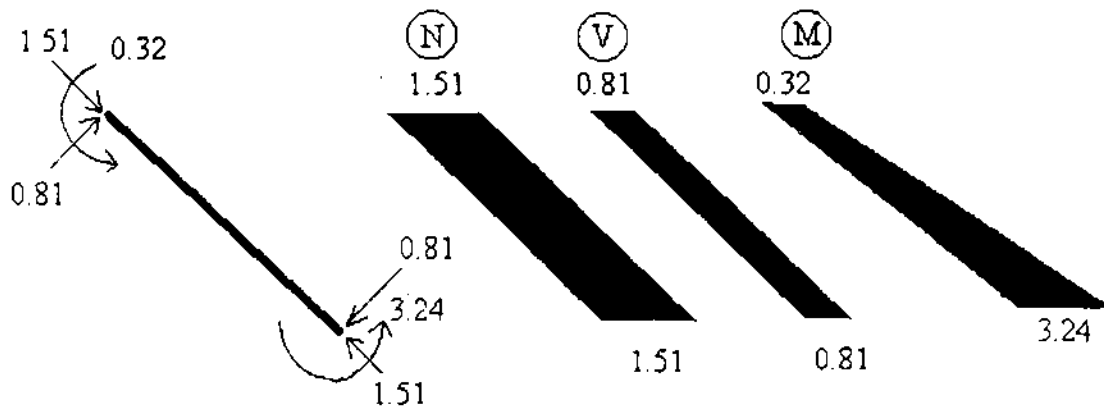


Fig. 7.9 Diagramas. Barra 3

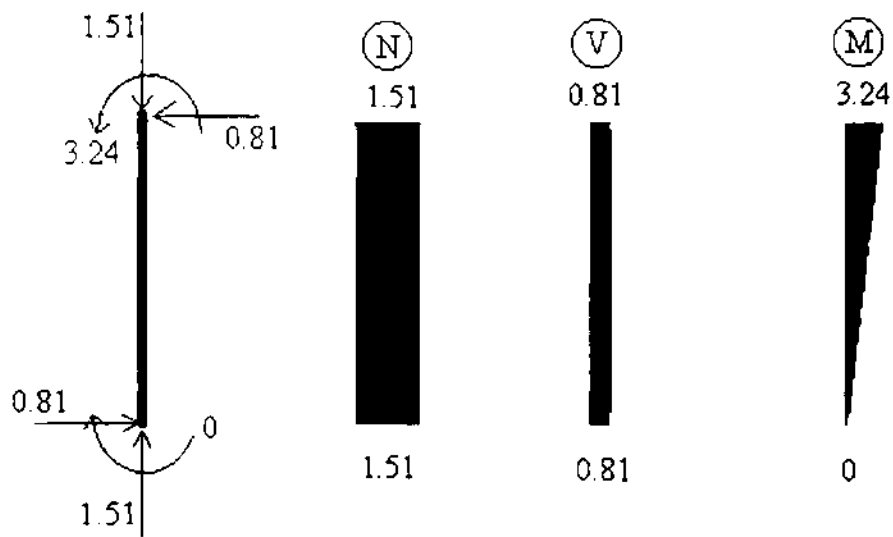


Fig. 7.10 Diagramas. Barra 4

7.8.3 Reacciones

$$R_{4x} = -3.190 \text{ Ton}$$

$$R_{4y} = -1.513 \text{ Ton}$$

$$R_{4z} = 6.923 \text{ T-m}$$

$$R_{5x} = -0.810 \text{ Ton}$$

$$R_{5y} = 1.513 \text{ Ton}$$

$$R_{5z} = 0 \text{ T-m}$$

8. CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo se ha desarrollado el método de rigideces para resolver cualquier tipo de estructura reticular. El método permitió analizar las estructuras desde una perspectiva que tiene como fondo un tratamiento matemático matricial.

Las ventajas que se pueden señalar de este método son las siguientes :

1. Al darle un enfoque matricial, el método es sumamente sencillo para programar en una computadora personal y resolver los problemas de una manera eficiente.
2. Esta forma de presentar el método de rigideces, tiene la ventaja de no modificar los conceptos del método cuando se trata de resolver o programar estructuras en el espacio, ya que el modelo matemático seguirá siendo el mismo.
3. De la misma manera, los conceptos, arreglos matriciales y metodología, servirán de base para una introducción al Método del Elemento Finito.

4. El alumno de licenciatura y el de posgrado al terminar el curso, tendrán un programa para resolver estructuras, cada uno de ellos con las características del programador, de acuerdo con su habilidad y conocimientos. La experiencia que se tiene al haber impartido este curso varios años, indica que en el lapso de un semestre se puede hacer un buen programa, tan confiable y eficiente como los comerciales.

Finalmente, se puede decir que esta materia es clave para el área de las estructuras por su vinculación con otras materias como lo son : estática, mecánica de materiales, mecánica del medio continuo, métodos numéricos, elemento finito, mecánica de suelos y cimentaciones.

Como líneas de investigación o continuación a este trabajo se tienen :

1. Desarrollar los modelos matemáticos para obtener el vector de fuerzas de fijación para los distintos tipos de carga y apoyos en los extremos de la barra, tanto en el plano como en el espacio.
2. Las características que tienen los sistemas de ecuaciones lineales en las estructuras $KU=P$, hace que algunos métodos de solución sean más rápidos y eficaces que otros. Se propone que en este curso ó bien en un curso de métodos numéricos se estudien los principales métodos para resolver sistemas de ecuaciones basados en la eliminación de Gauss : Gauss, Gauss - Crout, Choleski, banda o unidimensional. Estos programas ya existen pero se aplicarían los nuevos lenguajes.
3. Continuar con los casos particulares de retículas, vigas continuas y armaduras, ó bien desarrollar el caso tridimensional y elementos de sección variable.

9. REFERENCIAS

Cervantes, R. Y Porras, V. (1978). Notas para el curso de Teoría General de Estructuras I.

D.E.S.F.I, UNAM. México.

Przemieniecki, J. (1968). Theory of Matrix Analysis.

Mc. Graw Hill. U.S.A.

Oden, J. (1970). Mechanics of elastic structures.

Mc. Graw Hill. U.S.A.

Popov, E. (1994). Introducción a la mecánica de sólidos.

Limusa. México.

Mase, G. (1978), Mecánica del medio continuo.

Mc. Graw Hill. México.

Cervantes, R. Y Porras, V. (1974). Mecánica del medio continuo.

D.E.S.F.I. UNAM. México.