



Universidad Popular Autónoma del Estado de
Puebla

Centro Interdisciplinario de Posgrado
Investigación y Consultoría.
Doctorado en Ingeniería Mecatrónica

Control de Robots Manipuladores

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ingeniería Mecatrónica
Presenta

José Manuel Cervantes Vázquez

Asesor de tesis
Dr. Fernando Reyes cortes

Puebla, México

2012



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyla**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

H. Puebla de Z. a 11 de Diciembre de 2012.

Asunto: Autorización de Tesis.

Dra. Rubí Salazar Amador

Coordinadora del Posgrado en Mecatrónica, UPAEP

Por este medio doy constancia de haber leído y estar de acuerdo con el contenido de la Tesis del estudiante *José Manuel Cervantes Vázquez* con matrícula 21200007 para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Mecatrónica, titulada *Control de robots Manipuladores*, por tal motivo doy la autorización de la tesis, con la finalidad de dar continuidad al proceso de titulación correspondiente.



Asesor Titular

Dr. Fernando Reyes Cortés
Facultad de Ciencias de la Electrónica
BUAP

A

Mi esposa y mis hijos por su amor y comprensión.

Agradecimientos:

Al Dr. Fernando Reyes cortés por compartir sus conocimientos y experiencia.

Dra. Rubí Salazar Amador por su incondicional apoyo académico.

A la UPAEP por brindarme la oportunidad de continuar con mi formación profesional.

ÍNDICE

Dedicatoria	i
Agradecimiento	ii
Índice	iii
Lista de Tablas	v
Lista de Figuras	vi
 INTRODUCCIÓN	 1
 CAPÍTULO 1 REVISIÓN DE LA LITERATURA (marco teórico)	 8
1.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	9
1.2 Estabilidad asintótica global.	10
1.3 Función definida positiva localmente y función definida positiva.	10
1.4 Función radialmente desacotada y función menguante.	11
1.5 Función candidata de Lyapunov.	11
1.6 Método directo de Lyapunov.	12
1.7 Teorema de Barbashin Krasovskii LaSalle.	14
1.8 Ecuaciones de Lagrange.	14
1.9 Modelo Dinámico del Robot.	15
 CAPÍTULO 2 METODOLOGÍA	 21
2.1 Moldeo de energía	23
2.2 Función de Lyapunov estricta	23
2.3 Índice de desempeño	28
2.4 Procedimiento experimental	28
 CAPÍTULO 3 DESARROLLO DE LA CONTRIBUCIÓN CENTRAL DE LA TESIS	 31
3.1 Metodología propuesta	33
3.2 Familias de Algoritmos de Control	42
3.2.1 Familia 1	43
3.2.2 Familia 2	50
3.2.3 Familia 3	55
3.3 Pruebas Experimentales	60

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	64
4.1 Regulador con una función racional (RFR).	65
4.2 Regulador Cosh.	67
4.3 Regulador exponencial (RE).	68
4.3 Regulador PD.	71
4.4 Índice de Desempeño	73
 CONTRIBUCIONES ORIGINALES DE LA TESIS	 77
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	78
 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 80
ANEXOS	85
 PRODUCTIVIDAD ACADÉMICA	 92

LISTA DE TABLAS

2.1	Características de los servomotores del robot.	29
3.1	Posiciones articulares para los experimento	63
4.1	Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al RFR.	66
4.2	Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al Cosh.	68
4.3	Valores finales del error de posición y del par aplicado RE.	70
4.4	Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al PD.	73
4.5	Errores de posición y pares aplicados por los controladores al robot manipulador en dos diferentes configuraciones.	75

LISTA DE FIGURAS

1.1	Estabilidad en el sentido de Lyapunov.	9
1.2	Robot manipulador.	14
2.1	Tangente hiperbólica $\tanh(x)$.	24
2.2	Plataforma experimental.	29
3.1	Diagrama de la ley de control propuesta.	35
3.2	Torque aplicado por el servo amplificador respecto del torque solicitado.	42
3.3	Grafica de la función propuesta.	43
3.4	Forma de la grafica de la función $f(x)$.	50
3.5	Forma de la grafica de la función $f(x)$ con término exponencial.	55
4.1	Error de posición del robot manipulador al usar el RFR.	65
4.2	Torque aplicado a las articulaciones del robot mediante el RFR.	66
4.3	Error de posición del robot manipulador con el regulador Cosh.	67
4.4	Torque aplicado en las articulaciones del robot por el regulador Cosh.	68
4.5	Error de posición del robot manipulador con el controlador RE.	69
4.6	Torque aplicado al robot manipulador con el RE.	70
4.7	Error de posición del robot manipulador con el controlador PD.	72
4.8	Torque Aplicado a las Articulaciones del robot mediante el controlador PD	73
4.9	Índice de desempeño de los algoritmos de control Cosh, RE, RFR y PD	74

INTRODUCCIÓN

En el ámbito industrial, uno de los aspectos que marcan de manera importante la calidad de los productos y el nivel de productividad de las empresas, tiene que ver con el grado de implementación de sistemas automatizados, particularmente el uso de robots para el desarrollo de actividades repetitivas y precisas, con el consecuente ahorro en mano de obra[3][31], por tal motivo los robots toman una gran relevancia en este ambiente, y para poder tener un control adecuado de estos es muy importante contar con algoritmos de control de posición eficaces, capaces de responder a las necesidades de las diversas aplicaciones industriales, es por ello que en las universidades, centros de investigación y en las empresas mismas se tienen líneas de investigación encaminadas a la solución del problema del control de posición[25][44]-[47]. El control de posición de los robots manipuladores, consiste básicamente en llevar el robot de un punto cualquiera a otro deseado sin importar la ubicación del primer punto, para ello se han diseñado diferentes algoritmos de control, en los cuales se presentan principalmente las dificultades de las no linealidades del sistema y las fuerzas de fricción inherentes al sistema motriz del robot; la magnitud de las fuerzas de fricción se reduce considerablemente si se emplea como medio motriz en el accionamiento del robot los motores de transmisión directa[44], eliminando así las transmisiones por engranes y su consecuente pérdida de energía por fricción.

En el control de robots manipuladores se presentan errores de posición tanto en estado estacionario como en la ubicación de la posición final deseada, los cuales son causados principalmente por las fuerzas de fricción, y la resolución del sistema de posicionamiento del robot. La fricción es un fenómeno físico que en la práctica para ser modelado se consideran la fricción de Coulomb[1]-[4], la cual está directamente relacionada con el valor del par, presenta variaciones en función a este, al signo de la velocidad del eslabón respecto a su ubicación y de la posición deseada, al igual que la fricción viscosa, la cual está ligada con el valor del par aplicado, mismo que presenta una relación de proporción en función de la velocidad del eslabón en movimiento y en referencia a su posición[8]-[10].

En la última década se han desarrollado investigaciones para determinar los algoritmos de control de posición que presenten un adecuado desempeño al ser aplicados en el control de robots manipuladores[20]-[25], dentro de las destacadas tenemos a Rafael

Kelly que propone dos reguladores del tipo Proporcional Derivativo (PD) con una acción integral no lineal para el control de robots manipuladores en 1998, los cuales son analizados para demostrar que poseen estabilidad asintótica global [25]; en el mismo año, en conjunto con Víctor Santibañez propone un regular global para articulaciones de robots mediante el método de moldeo de energía [47].

En 2002 F. Mazenc y S. Bowong publican un trabajo titulado “Tracking Trajectories of Feedforward Systems”, presentan algoritmos de control mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov y verifican que posea estabilidad asintótica global [34].

En 2003 Vicente Parra, Seguru Arimoto, Yun-Hui Liu, Gerhard Hirzinger y Prasad Akella, publican su trabajo denominado “ Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments”, en donde presentan un control PD con compensación de gravedad y un Proporcional Derivativo Integral (PID) sin compensación de gravedad, para garantizar una regulación local, y mediante la propuesta de los errores aseguran la estabilidad semiglobal en un sistema de lazo cerrado[43].

En 2005 E. M. Jafarov, M. N. A. Parlakçı, and Y. Istefanopulos, en su trabajo “A New Variable Structure PID-Controller Design for Robot Manipulators”, presenta una nueva estructura de un controlador PID tal diseño es considerado para estabilizar el seguimiento de trayectoria de un robot [20].

En 2006 Josip Kasac, Branko Novakovic, Dubravko Majetic, y Danko Brezak, publican su trabajo “Global Positioning of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints”, en donde proponen una clase de reguladores globalmente estables para los robots manipuladores con articulaciones mixtas de revolución y prismáticas, para que el sistema tenga estabilidad asintótica global agregan un término no lineal proporcional y derivativo al PID, el cual analizan mediante el método directo de Lyapunov [24].

En 2008 Jose Alvarez-Ramirez, Víctor Santibañez, y Ricardo Campa, en su trabajo “Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation”, mediante el método del moldeo de energía presentan un control saturado PID con compensación de gravedad, el cual posee estabilidad semiglobal asintótica, el análisis del mismo lo realizan mediante los criterios de estabilidad de Lyapunov [2].

En 2009 Wang Zhongli and Liu Yunhui, en su trabajo “Global asymptotic stabilization control of a lake surface cleaning robot”, presenta un método de control con estabilidad asintótica para robots con superficies libres, para el control de movimiento, el sistema puede tener tantos grados de libertad como señales de control y es aplicable a una ley de control en coordenadas cartesianas [52]. En el mismo año, Acosta, J.A. Panteley, E. Ortega, R, en su trabajo “A new strict Lyapunov function for fully-actuated mechanical systems controlled by IDA-PBC”, emplean el moldeo de energía para el diseño de un controlador para robots con articulaciones de revolución y prismáticas [1].

En 2010 Takahashi, K. Sasaki, M. “Remarks on tip angular position control of single-link flexible robot arm using modified Lyapunov function”, presentan un control para la posición angular para un solo-eslabón (brazo) del robot, que considera la pasividad del brazo del robot flexible en base a un sistema de parámetros distribuidos, mediante el uso de una función de Lyapunov [49]. De igual manera Mazenc, F. Malisoff, M., presenta un trabajo denominado “Strict Lyapunov Function Constructions Under LaSalle Conditions With an Application to Lotka-Volterra Systems”, en el cual presentan la aplicación de una función estricta de Lyapunov para el control de sistemas no lineales invariantes que satisfacen las condiciones Lyapunov y LaSalle [35].

En 2010 Baishun Liu, Fancai Lin, Bingli Tian en su artículo “A Set of Globally Stable N-PID Regulators for Robotic Manipulators”, proponen un conjunto de nuevos reguladores PID-N consistente en una combinación lineal de control proporcional, control derivado y control no lineal en la forma de una función no lineal de errores de posición, un control lineal integral impulsado por retroalimentación diferencial y un modo de control no lineal integral impulsado por una función no lineal de los errores de posición, Utilizando el método directo de Lyapunov y el principio de invariancia de LaSalle [4].

En 2011, Leena G.,K. B. Datta, G. Ray, en su trabajo “A Class of Stabilizing PID Controllers for Position Control of Single-Link Robot”, presentan una clase de controladores proporcional integral derivada (PID) para un sistema no lineal. Los rangos de los parámetros son obtenidos por una técnica de búsqueda, proponen una función de Lyapunov y comprueban la estabilidad del sistema [29]. En ese mismo año Choi, Junho, Hong, Seonghun, Lee, Woosub, Kang, Sungchul, Kim, Munsang en su trabajo “A Robot Joint With Variable Stiffness Using Leaf Springs”., presentan un esquema de control para controlar la rigidez y la posición de la articulación de rigidez variable (VSJ), mediante

muelles y dos actuadores se controla la posición y la rigidez de la articulación mediante cuatro barras de vínculos [13].

En 2012 Liu, Y.-C. en “Control of Robotic Manipulators Under Input/Output Communication Delays: Theory and Experiments”, abordan el problema de control de posición para robots rígidos considerando el retraso en las señales de entradas—salidas de comunicación el sistema de circuito cerrado. Proponen un algoritmo de control y Demuestran que si hay demoras de transmisión entre el sistema robótico y el controlador, entonces el uso de las variables de dispersión puede estabilizar un sistema [30]. También Karayiannidis, Y, . Publican su trabajo “Model-free robot joint position regulation and tracking with prescribed performance guarantees”, en el cual proponen controladores que no utilizar el modelo dinámico del robot o cualquier estructura de aproximación y están compuestos por un simple PID o PD mejorados por un término proporcional que transforma el error en una ganancia [23].

Tomando en consideración lo antes expuesto, se tiene que en la actualidad se siguen desarrollando trabajos de investigación que tratan de resolver por completo el problema de control de posición, en el cual hay avances, pero aun queda una gran numero de algoritmos de control por proponer y analizar, y es justamente en este punto en donde centra el trabajo a desarrollar en la presente tesis.

La **justificación** del la tesis se fundamenta en el hecho de que el problema del control de posición a tratado de resolverse de diferentes maneras[45]-[54], como se ha descrito anteriormente, empleando técnicas de Saturación de velocidad y del par, algoritmos genéticos, redes neuronales, algoritmos de deslizamiento, de impedancia, de Cuasi-velocidades, etc.[5][11][27] Sin embargo las funciones estrictas de Lyapunov [32], han tenido poca atención debido a la demostración matemática que requieren y la implementación de estas en los algoritmos PD y PID, particularmente algunos que se han empleado en estas condiciones son los controladores de la Tangente Hiperbólica, de logaritmos naturales entre otros, los cuales tienen la finalidad de tratar de resolver el problema, pero también el de compensar las deficiencias que presenta tanto el PD como el PID [12][25], en ambos casos buscando el mejorar el desempeño en el control de la posición, a la vez que presentan no solo estabilidad, sino una estabilidad asintótica global[53][69], la cual es garantizada al cumplir con las condiciones para ella descrita por los principios y teoremas de Lyapunov.

Los algoritmos mencionados anteriormente, solo forman una pequeña parte de la gran variedad de algoritmos de control existentes, que pueden ser analizados y que mediante la elección adecuada de la función estricta de Lyapunov en combinación con la técnica del moldeo de energía [38][41], pueden garantizar la estabilidad asintótica global del robot para el control de la posición durante el desarrollo de sus funciones.

El cumplimiento de las condiciones mencionadas anteriormente, no garantiza que tengan un mejor desempeño que los ya existentes, por ello y en virtud de que quedan pendientes por evaluar una amplia gama de algoritmos de control, es que se presenta una nueva metodología para el diseño de familias de algoritmos de control, que cumplan con las condiciones descritas y se puedan corroborar mediante pruebas experimentales, que permitan identificar su desempeño en comparación con los ya cocidos, particularmente con el PD.

El **objetivo** de la presente tesis es abordar la problemática del control de posición de robots manipuladores a través de la propuesta de una metodología que permita generar extensas familias de algoritmos de control, mediante la propuesta de funciones racionales y su correspondiente función candidata de Lyapunov.

Para establecer los **alcances** de la tesis resulta conveniente considerar que el desarrollo de la robótica es un área prioritaria para todos los países, principalmente para los que se encuentran en vías de desarrollo, particularmente en nuestro país las industrias, centros de investigación y desarrollo tecnológico, requieren de sistemas automáticos cuya integración es multidisciplinaria y que involucra un conocimiento de diversos fenómenos físicos.

En la región de Puebla-Tlaxcala no se cuenta con la infraestructura suficiente para la realización de pruebas experimentales en el campo de la robótica, en general las Instituciones de Educación Superior del Estado de Tlaxcala no cuentan con robot para tal fin, únicamente se tienen robots didácticos y de arquitectura cerrada, en el Estado de Puebla el Tecnológico de Puebla, ITESM Campus Puebla, UPAEP, INAOE, no cuentan con robots de transmisión directa de arquitectura abierta que permita realizar experimentos para la validación de algoritmos de control; la BUAP en este sentido cuenta con robots de transmisión directa de arquitectura abierta, por lo cual resulta conveniente el diseño y construcción de una plataforma experimental que permita incrementar la escasa infraestructura existente para el desarrollo de pruebas experimentales.

En el campo de la robótica hay varios problemas abiertos, como son los de control de fuerza, el cual consiste en hacer que el robot aplique una fuerza determinada sobre su medio ambiente; control de impedancia, que se caracteriza por el control de la rigidez del robot al momento de interactuar con su ambiente de trabajo; el control híbrido, basado en la combinación del control de fuerza y regulación de posición; visual servoing, el cual retroalimenta la señal visual proporcionada por una cámara CCD en un algoritmo de control [31][32]; el control de movimiento, caracterizado principalmente por el control del desplazamiento del robot en su medio ambiente de trabajo; etc., particularmente el control de movimiento involucra la regulación o control de posición; el presente trabajo se ubica en este último tópico.

Se abordará el problema del control de posición mediante una metodología que permita el diseñar una familia de reguladores con su consecuente potencial de ser generalizada para el control de trayectoria, teniendo injerencia tanto en el aspecto teórico como práctico.

En el aspecto teórico se proporciona una metodología formal para el diseño de algoritmos de control, generalizada para el control de posición. En el aspecto práctico se diseñó y construyó un robot de transmisión directa de tres grados de libertad, en conjunto con el M.C: Francisco Terneus, el cual fungirá como plataforma experimental para la validación de los algoritmos de control obtenidos para robots manipuladores

Con el desarrollo de la presente tesis se pretende tener un **impacto** importante, dada la naturaleza teórico-práctica de la tesis, los resultados obtenidos durante el desarrollo de la misma impactan de manera importante en los siguientes aspectos.

En el ámbito teórico:

Mediante la metodología desarrollada que permite el diseño de familias extensas de nuevos algoritmos de control, con base en funciones estrictas de Lyapunov y de la ecuación de movimiento de Lagrange, además de la demostración de estabilidad del punto de equilibrio. Se obtuvieron algoritmos de control para robots manipuladores con un buen desempeño en el control de posición.

En el aspecto Práctico:

La plataforma experimental que se construyó, permite la validación de los algoritmos de control obtenidos por la metodología propuesta, lo que permite incrementar

la capacidad instalada existente en el Estado para el desarrollo de trabajos experimentales en el campo del control, permitiendo desarrollar diferentes aplicaciones para la plataforma experimental, tanto en el área de la investigación como en el ámbito industrial.

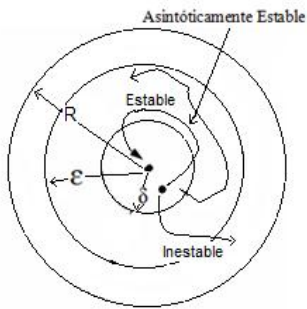
La organización de la presente tesis es en la siguiente forma: en el capítulo 1 se introducen los conceptos generales y específicos que permiten sentar las bases para el desarrollo del presente. Se describe primeramente los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov; se describen las definidas positivas, las radialmente desacotadas y menguante y las funciones candidatas de Lyapunov; de igual manera se establece los procedimientos para verificar si una función posee estabilidad asintótica de forma global mediante el método directo de Lyapunov y el teorema de Barbashin Krasovskii LaSalle. Finalmente el capítulo culmina con el desarrollo del modelo dinámico para los robots manipuladores de n -grados de libertad.

En el capítulo 2 se presenta la técnica del moldeo de energía, la cual permite el diseño de grandes familias de controladores con acciones acotadas y no acotadas, la cual sirve de base para el desarrollo del presente trabajo, se define lo que es una función estricta de Lyapunov y se describe el procedimiento experimental que se lleva a cabo para la validación de las familias de algoritmos de control desarrolladas en el capítulo 3.

El Capítulo 3 presenta del desarrollo de la metodología propuesta para la obtención de algoritmos para el control de posición, se realiza la demostración de estabilidad del punto de equilibrio y se generan tres familias de algoritmos mediante la metodología establecida; de igual manera se realiza el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de cada familia. Se establecen las condiciones necesarias para la realización de las pruebas experimentales.

En el capítulo 4 se analizan y discuten los resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos de control en la plataforma experimental, desarrollando una comparación para diferentes posiciones solicitadas con respecto del controlador PD, mediante el uso de la norma $\mathcal{L}_2$.

Finalmente se presenta la contribución de la tesis y las conclusiones.



Capítulo 1.

REVISIÓN DE LA LITERATURA (marco teórico)

En el campo de la robótica, el tema de control de posición involucra diversos aspectos de interés, por lo cual iniciaremos definiendo las bases teóricas y los principios matemáticos fundamentales sobre estabilidad en el sentido de Lyapunov, funciones candidatas, las ecuaciones de movimiento de Lagrange así como el modelo dinámico del robot, los cuales son requeridos para el desarrollo de algoritmos de control de posición aplicados a robots manipuladores, con lo cual concluiremos esta sección.

1.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov estudia el comportamiento de sistemas dinámicos que se describen mediante ecuaciones diferenciales que tienen la siguiente estructura general:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (1.1)$$

En donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ hace referencia del estado del sistema dinámico representado (1.1) y $x(0) \in \mathbb{R}^n$ es el estado inicial de la función. La función f es una función continua en t y $x(t)$, en donde la ecuación (1.1) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ que corresponde a cada condición inicial dada de $x(0)$. De igual manera se tiene que si $x(t)$ es la solución de (1.1), llamada solución nula o de equilibrio, la cual satisface $x(t_0) = 0$ porque $x(t) \equiv 0$ para $t > t_0$, por lo tanto $x(t)$ depende de forma continua de $x(0)$.

Una solución nula $x(t) = 0$ es estable si y solo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \text{ implica } \|x(t)\| < \varepsilon \text{ para todo } t > t_0$$

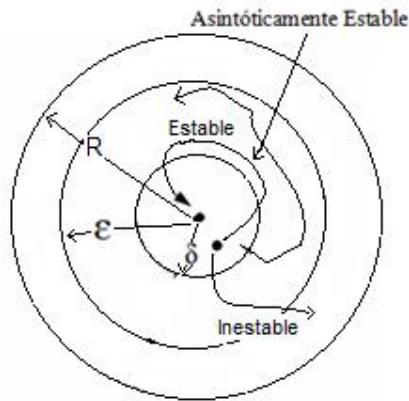


Figura1.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

La solución nula $x(t_0) = 0$ es inestable y sino es estable. Esta situación se ilustra en la Figura 1, y se dice que el sistema es estable si la solución se mantiene dentro de una esfera de radio ε alrededor del punto de equilibrio, siempre y cuando la condición inicial dada se mantenga en la esfera de radio δ alrededor del

punto de equilibrio[2].

Cuando la función f no depende explícitamente del tiempo, es decir $f(t, x(t)) = f(x(t))$, entonces la ecuación (1.1) es autónoma. Si $f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t)$ donde $A(t)$ es una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $A(t)$ y $u(t)$ funciones únicamente de t , o

constantes, en tal caso la ecuación (1.1) es lineal, en caso contrario es no lineal[3].

1.2 Estabilidad asintótica global.

El origen $x(t_0) = 0 \in R^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de ecuación (1.2) si:

- 1.- El origen es estable
- 2.- El origen es atractivo globalmente, es decir,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad \forall x(t_0) \in R^n$$

De esta última definición se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso.

Existen una clase importante de funciones que se emplean en el método directo de Lyapunov para el estudio de estabilidad de equilibrio de ecuaciones diferenciales, las cuales se mencionan a continuación:

1.3 Función definida positiva localmente y función definida positiva.

Una función continua $S : R^n \rightarrow R_+$ es una función definida positivamente si:

- 1.- $S(0) = 0$.
- 2.- $S(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ pero con $\|x\|$ pequeña.

Una función continua $S : R^n \rightarrow R$ es una función definida positiva si:

- a). $S(0) = 0$.
- b). $S(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

De acuerdo con esta definición queda establecido que una función definida positiva es también una función definida positiva localmente; de igual manera de acuerdo con las definiciones de función definida positiva y de matriz, una función cuadrática $S : R^n \rightarrow R$ de la forma:

$$S(x) = x^T P x = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (1.2)$$

donde $P \in R^{n \times n}$, por lo tanto $S(x)$ es una función definida positiva si y solo si $P > 0$ para $x \neq 0$. Note que $S(0) = 0$. $S(x)$ será definida positiva si y sólo si la matriz P es una matriz definida positiva, esto es, todos sus valores propios son positivos[4].

1.4 Función radialmente desacotada y función menguante.

Sea $S : R^n \rightarrow R$ una función continua y radialmente desacotada si:

$$S(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Una función continua $V : R_x \times R^n \rightarrow R$ es una función menguante (globalmente), si existe una función definida positiva $S : R^n \rightarrow R_+$ tal que:

$$V(t, x) \leq S(x) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in R^n$$

Como $V(t, x)$ es una función definida positiva independiente de t , porque $V(t, x) = V(x)$, por lo tanto $V(x)$ es una función menguante[3].

1.5 Función candidata de Lyapunov.

Sea $V(x) : R^n \rightarrow R$ una función continua con primera derivada parcial continua alrededor del origen en R^n . Posteriormente, se supone que V es definida positiva, esto es $V(0) = 0$ y $V > 0$ para $x \neq 0$. entonces V es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in R^n$ del sistema dado por la ecuación (1.1); es decir, $V(t, x)$ es una función definida positiva localmente, la cual además cumple con:

- a) $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es continua respecto a t y x .
- b) $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es continua respecto a t y x .

La función candidata será utilizada en su forma cuadrática, pero el poder de la teoría de estabilidad de Lyapunov proviene del hecho de que cualquier función puede ser utilizada en un esfuerzo por mostrar la estabilidad de un sistema dado, con tal de que sea esta una función candidata de Lyapunov de acuerdo con lo establecido anteriormente.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel muy importante en la demostración de los atributos de estabilidad de los equilibrios de las ecuaciones diferenciales.

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (1.1). La derivada de $V(t, x)$ a lo largo de las trayectorias de (1.1), o la derivada de $V(t, x)$ de la dirección del campo vectorial definido por (1.1), denotada por $\dot{V}(t, x)$ estará dada por:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt} V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x} f(t, x) \quad (1.3)$$

Si $V(x)$ no depende del tiempo explícitamente, y la ecuación (1.1) es autónoma, entonces $\dot{V}(x)$ es:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)^T}{\partial x} f(x) \quad (1.4)$$

La cual tampoco es dependiente del tiempo; finalmente suponemos que evaluamos la función candidata de Lyapunov $V(x)$ en los puntos a lo largo de la trayectoria de $x(t)$ de la ecuación (1.1) y encontramos que $V(t)$ es decreciente para un incremento de t . Entonces $V(x)$ actúa como una normal, lo que significa que la trayectoria de la solución dada debe de ser convergente hacia el origen. Esta es la idea del principio de la teoría de Lyapunov.

En este sentido una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ para la ecuación (1.1) es una función de Lyapunov para (1.1) si su derivada a lo largo de la trayectoria de (1.1) satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|x\| \text{ pequeña.}$$

1.6 Método directo de Lyapunov.

El método directo de Lyapunov es el método más utilizado en ingeniería de control, a saber para prueba de estabilidad sin resolver las ecuaciones diferenciales que describen el sistema dinámico.

El origen $x = 0 \in R^n$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (1.1), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|x\| \text{ pequeña.}$$

Lo anterior brinda las condiciones necesarias para la estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov, lo que es cierto si $\dot{V}(t, x) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para $\forall x \in R^n$, también es válido para cuando la función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ es una función definida positiva globalmente en vez de definida positiva local.

Resulta conveniente el establecer la estabilidad y acotamiento de las soluciones para el sistema de la ecuación (1.1); para ello consideremos que el origen $x = 0 \in R^n$ es un equilibrio estable, y las soluciones $x(t)$ están acotadas para toda condición inicial $x(0) \in R^n$, si existe una función candidata de Lyapunov que sea definida positiva globalmente y radialmente desacotada, $V(t, x)$, tal que su derivada con respecto al tiempo cumple con:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in R^n.$$

La estabilidad asintótica global queda establecida si el origen $x = 0 \in R^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (1.1) y si además existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ que sea definida positiva globalmente, radialmente desacotada y menguante, de tal forma que su derivada temporal satisfaga las siguientes condiciones:

- a) $\dot{V}(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- b) $\dot{V}(t, x) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \in R^n.$

Cuando la ecuación (1.1) es autónoma, la función candidata de Lyapunov frecuentemente no depender del tiempo explícitamente, por lo tanto es trivialmente menguante, por lo tanto para que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global es suficiente con el hecho de que la función candidata de Lyapunov $V(x)$ sea definida positiva globalmente y radialmente desacotada, a la vez que su derivada $\dot{V}(t, x)$ sea una función definida negativa globalmente.

Finalmente si consideramos la ecuación diferencial autónoma siguiente:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) \in R^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Queda establecido como condición necesaria la existencia de un único punto de equilibrio para que éste sea asintóticamente estable en forma global.

1.7. Teorema de Barbashin Krasovskii LaSalle.

La dificultad principal en el uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov es encontrar una función conveniente de Lyapunov que satisfaga $\dot{V} < 0$ para demostrar estabilidad asintótica. El principio de invariancia de LaSalle o Teorema de LaSalle, nos da una herramienta para demostrar la propiedad asintótica de un sistema en el caso de que la función candidata propuesta de Lyapunov $\dot{V}$ sea solo semidefinida negativa, esto es, cuando $\dot{V} \leq 0$.

Considere la ecuación diferencial autónoma (1.1), cuyo origen $x = 0 \in R^n$ es un equilibrio. Supongamos también que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ definida positiva globalmente y radialmente desacotada que satisface:

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n.$$

Definimos el conjunto Ω de la siguiente forma:

$$\Omega = \{x \in R^n : \dot{V}(x) = 0\}. \quad (1.5)$$

Donde $x(0) = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual $x(t) \in \Omega$ para $t \geq 0$, por lo tanto el origen $x = 0 \in R^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

1.8. Ecuaciones de Lagrange.

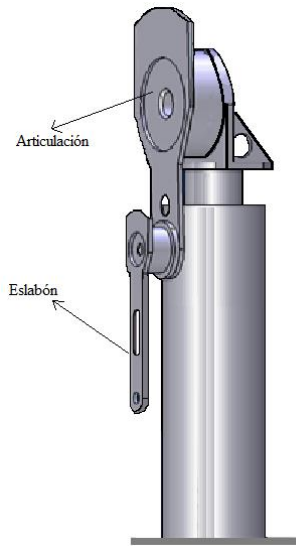


Figura 1.2 Robot Manipulador.

Consideremos un robot manipulador como el mostrado en la figura 1.2, el cual está formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta. La energía total E de un robot manipulador de n grados de libertad es la suma de las energías cinéticas K y la energía potencial U , como se muestra a continuación:

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + U(q(t)) \quad (1.6)$$

En donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ es vector de posición y $\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$ es el vector de

velocidad.

EL Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ para un robot manipulador de n grados de libertad, es la diferencial entre su energía cinética K y su energía potencial U .

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)). \quad (1.7)$$

Para un robot manipulador de n grados de libertad las ecuaciones de movimiento de Lagrange obtienen con:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau \quad (1.8)$$

En términos generales se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

Donde τ_i representa las fuerzas y pares ejercidos externamente en cada una de las n articulaciones así como las fuerzas no conservativas. Dentro de las fuerzas no conservativas se incluyen las fuerzas de fricción, la resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, general las que dependen del tiempo o de la velocidad.

El número de ecuaciones que obtienen mediante (1.8) será igual al número de grados de libertad que posea el robot manipulador.

Para aplicar las ecuaciones de Lagrange en un modelo dinámico, se tienen que seguir los siguientes pasos:

- 1.- Calcular la energía cinética : $K(q(t), \dot{q}(t))$.
- 2.- Calcular la energía potencial: $U(q(t))$.
- 3.- Calcular el Lagrangiano (1.7): $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$.
- 4.- Desarrollar las ecuaciones (1.9): τ_i

1.9 Modelo Dinámico del Robot.

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados de eslabones rígidos conectados entre sí a través de uniones o articulaciones que permiten el movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos como el mostrado en la figura 1.2.

Al ubicar al robot dentro de un marco de referencia tridimensional, cuyo origen se encuentre en la base del mismo y, estableciendo en tal punto las coordenadas $[x_0 \ y_0 \ z_0]^T$, los eslabones se pueden numerar de manera consecutiva iniciando en la base hasta el final. Las articulaciones o puntos de contacto entre los eslabones también se numeran de manera tal que la unión i conecta a los eslabones i e $i - 1$.

Las articulaciones se controlan de manera independiente mediante un accionador ubicado generalmente en ella, por tal motivo el robot tendrá tantos grados de libertad como accionadores posea. En el robot podemos denotar por z_i al eje de movimiento de la unión i , la coordenada articular correspondiente por q_i (posición articular), la cual representa el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión i es rotacional, o el desplazamiento i si es traslacional.

Las posiciones articulares se miden por medio de sensores ubicados en los accionadores, las cuales se agrupan para propósito de análisis en un vector de posiciones articulares $\mathbf{q}$. Para un robot de n grados de libertad el vector $\mathbf{q}$ será:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Se puede expresar la posición y orientación del dispositivo terminal del robot en términos del marco de referencia coordenado cartesiano (x, y, z) colocado en la base del robot, tales coordenadas (y ángulos) son agrupados en un vector $\mathbf{x}$ de posiciones cartesianas:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{donde } m \leq n. \quad (1.11)$$

El modelo cinemática del robot puede ser expresado en forma directa o inversa; en el caso del directo, se describe la relación entre la posición articular $\mathbf{q}$ y la posición y orientación $\mathbf{x}$ del dispositivo terminal del robot:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{q}) \quad (1.12)$$

En el caso del modelo cinemático inverso, se busca la relación inversa del modelo cinemático directo, es decir, es la relación entre la posición cartesiana $\mathbf{x}$ y la posición articular $\mathbf{q}$, estos es:

$$\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{x}). \quad (1.13)$$

El modelo dinámico de un robot está formado por una ecuación diferencial vectorial de las posiciones articulares $\mathbf{q}$ o cartesianas $\mathbf{x}$, generalmente de segundo orden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

El modelo dinámico (1.14) recibe el nombre de modelo dinámico articular, mientras que el (1.15) es el modelo dinámico cartesiano. Para objeto del desarrollo del presente trabajo solo se abordara el modelo dinámico articular (1.14), el cual se denominara solo modelo dinámico.

Iniciamos considerando un robot manipular de n grados de libertad formado por eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad, en donde para tal mecanismo articulado podemos expresar la energía cinética $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ como:

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.16)$$

En donde $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ es una matriz simétrica positiva y denominada matriz de inercia. $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial, no tiene una forma específica como en el caso de la energía cinética; sin embargo, se conoce que depende del vector $\mathbf{q}$ de posiciones articulares, en tal caso empleando las ecuaciones de Lagrange, se tiene que el lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$,

dado por la ecuación (1.7), es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}). \quad (1.17)$$

Al expresar de esta manera el lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange (1.8) la podemos desarrollar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (1.18)$$

Considerando el hecho de que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (1.20)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (1.19) y (1.20), podemos reescribir la ecuación de movimiento, la cual quedaría:

$$M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau,$$

o bien de manera simplificada:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.21)$$

En donde

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}], \quad (1.22)$$

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}. \quad (1.23)$$

La ley de control establecida por la ecuación (1.21) es conocida como la ecuación dinámica para robots de n grados de libertad, es una ecuación diferencial vectorial no lineal en el estado $[q^T, \dot{q}^T]^T$. $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, de tamaño $n \times 1$. $g(q)$ es el vector de fuerzas ó pares gravitacionales de tamaño $n \times 1$ y τ es un vector de $n \times 1$ llamado vector de fuerzas o pares externos, siendo por lo general los pares y las fuerzas aplicadas por los accionadores ubicados en las articulaciones del robot.

Dentro de las propiedades de los términos que integran la ecuación (1.21), tenemos que la matriz $C(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, llamada matriz centrífuga y de Coriolis puede no ser única, pero el vector $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ sí lo es; también podemos obtener $C(q, \dot{q})$ a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel $c_{ijk}(q)$ definidos de la siguiente manera.

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]. \quad (1.24)$$

En donde $M_{ij}(q)$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz de inercia $M(q)$. El kj -ésimo elemento $C_{kj}(q, \dot{q})$ de $C(q, \dot{q})$ se obtiene por:

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(\mathbf{q}) \\ c_{2jk}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.25)$$

Cada elemento de la ecuación (1.21) $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es una función relativamente compleja de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones, es decir, de $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$, pero también dependen de la geometría del robot que se esté modelando.

La determinación del vector de fuerzas gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para un robot manipulador dado, puede obtenerse mediante el uso de la ecuación (1.23); es decir el $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es simplemente el gradiente de la energía potencial $U(\mathbf{q})$ de cada elemento que integra al robot.

Podemos expresar el modelo dinámico de un robot de n grados de libertad (1.21) en términos del vector de estado $[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T$, tomando en consideración que la matriz $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva y que por lo consiguiente existe la matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\tau(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Los efectos de las fuerzas de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos complicados que dependen de múltiples factores como son la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperaturas, etc. Por este motivo, las fuerzas y pares de fricción son modelados sólo de forma aproximada, aunque se reconoce que éstas dependen de la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto. De esta forma, se distinguen dos familias de modelos de fricción: los modelos estáticos en los que la fuerza o par de fricción viene dada en función de la velocidad instantánea relativa entre los cuerpos, y los modelos dinámicos, que dependen del pasado de la velocidad relativa.

En los modelos estáticos, la fricción es modelada por un vector $\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^n$ dependiente solamente de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$. Los efectos de fricción son locales, es decir, $\mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ puede expresarse como:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1) \\ f_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}.$$

Una característica importante de las fuerzas de fricción es que éstas son disipativas, es decir:

$$\dot{q}^T f(\dot{q}) > 0 \quad \forall \dot{q} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede establecer un modelo de fricción combinando los fenómenos de la fricción viscosa y la fricción de Coulomb, mediante el vector $f(\dot{q})$:

$$f(\dot{q}) = F_{m1}\dot{q} + F_{m2}\text{sign}(\dot{q}). \quad (1.27)$$

En donde F_{m1} y F_{m2} son matrices diagonales de $n \times n$ definidas positivas. Los elementos de la matriz F_{m1} corresponden a los parámetros de la fricción viscosa mientras que los de la matriz F_{m2} a los de la fricción de coulomb. De igual manera tenemos que dentro de la ecuación (1.27) el $\text{sign}(\dot{q})$ es:

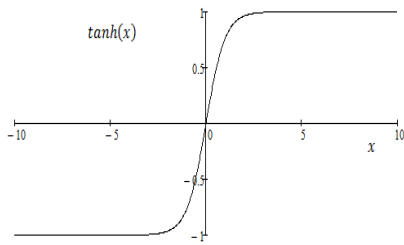
$$\text{sign}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \text{ign}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{ign}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior la función $\text{sign}(x)$ es la función signo la cual está determinada de la siguiente forma:

$$\text{sing}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de lo anterior se tienen que $\text{sign}(0)$ es indefinido en el sentido de que no se asocia un número real particular a la función $\text{sign}(x)$ cuando $x = 0$. Para el caso de regulación de posición es importante considerar la función signo. Considerando un modelo estático de fricción en las uniones, la ecuación dinámica general del manipulador queda determinada de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B(\dot{q}) = \tau. \quad (1.28)$$



Capítulo 2.

METODOLOGÍA

Para la comunidad científica, existen algunos problemas en el campo del control de robots que requieren mayor investigación para su análisis y proponer mejores formas de resolverlos como son el control de fuerza, impedancia, control híbrido, visual servoing y control de movimiento en el espacio articular, entre otros; como caso particular de control de movimiento se encuentra el de regulación y control de posición.

Para el control de posición es de interés la forma en la cual se realiza el movimiento para el cambio de la misma, es decir, el desplazamiento punto a punto hasta llegar a la posición deseada, el tiempo en el cual lo realiza, y la precisión mediante la cual se ubica o aproxima a ésta; para el conocimiento de tales condiciones se han desarrollado plataformas experimentales que permitan medir y analizar el comportamiento de tales variables durante la validación de algoritmos de control. Uno de los reguladores clásicos empleados para tal caso es el proporcional derivativo (control PD), al cual en 1981 Takegaki y Arimoto le da la formalidad, demostrando en éste estabilidad asintótica global, (definiendo

las bases para la técnica que se conoce como *moldeo de energía*) [21]. Sin embargo, presenta serias deficiencias en la práctica como son: difícil sintonía de las ganancias, además de requerir dos de ellas, saturación, error en estado estacionario; para tratar de resolver los problemas que presenta el control PD, surge el PD modificado (PID)[24], el cual tiene estabilidad asintótica local, con lo cual se reduce el error de posición; sin embargo, se complica en el sentido de tener que sintonizar en este caso tres ganancias, teniendo adicionalmente el inconveniente de que las ganancias quedan en función de la posición deseada y el par aplicado, lo que consecuentemente implica que para cada nueva posición deseada se deben volver a sintonizar las ganancias; los anteriores sirvieron como preámbulo a la aparición del control mediante la tangente hiperbólica[3], la cual presenta un mejor desempeño en el control de posición, además de solo requerir la sintonización de una sola ganancias que no depende de la posición deseada, por lo que solo se requiere sintonizarla una sola ocasión, este es solo uno de tantos controladores de saturación que forman parte de una vasta familia; de ahí que se pretenda generar una metodología para algoritmos de control saturado con funciones estrictas de Lyapunov y su consecuente aplicación a control de posición.

2.1 Moldeo de energía

El moldeo de energía es una técnica que permite generar familias de controladores para el control de posición, los cuales tienen en su estructura un gradiente de energía potencial artificial, la cual tiene la finalidad de modelar la energía suministrada a las articulaciones del robot, incorpora además una función disipativa que actúa como amortiguamiento a través de la velocidad articular y un término de compensación de gravedad [1][3].

$$\tau = \nabla U_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \quad (2.1)$$

Donde $\nabla U_a(K_p, \tilde{q})$ es el gradiente de energía potencia, cuya función es continua en $\tilde{q}$ y con error de $\tilde{q} = 0 \in R^n$, definido como $\tilde{q} = q_d - q$.

La función $f_v(K_v, \dot{q})$ de inyección de amortiguamiento satisface $q^T f_v(K_v, \dot{q}) > 0$

La función $g(q)$ es la compensación de par gravitacional.

Considerando la ecuación de la dinámica del robot (1.28) y la del moldeo de energía (2.1) se genera un punto de equilibrio estable global en el sentido de Lyapunov, para la demostración de la estabilidad asintótica de dicho punto se emplea el teorema de Lasalle.

La ecuación de lazo cerrado en términos de las variables de estado $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T$ es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [\nabla U_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) - B\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La cual es una ecuación diferencial autónoma. Para la demostración de la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación (2.2) se emplean los criterios de Lyapunov.

2.2 Función de Lyapunov estricta

Una función estricta de Lyapunov, es una función con estabilidad asintótica global; para la aplicación de la función estricta de Lyapunov, consideraremos que los robots manipuladores están provistos únicamente de articulaciones rotacionales y restringiremos la matriz de ganancia proporcional K_p a ser no sólo simétrica sino diagonal, pero conservando su cualidad de definida positiva, las clases de funciones que se requieren para el presente estudio deben ser continuamente diferenciables, monótonamente crecientes, y acotadas.

Para mostrar el procedimiento a seguir se presenta a continuación como ejemplo la función tangente hiperbólica como función estricta de Lyapunov.

La forma de la grafica se la función hiperbólica se muestra en la figura 2.1, la cual tiene las siguientes propiedades al ser establecida de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\tanh(x_1) \ \tanh(x_2) \ \dots \ \tanh(x_n)]^T. \quad (2.3)$$

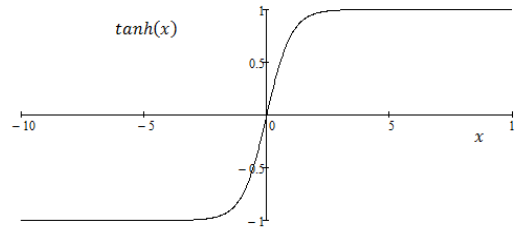


Figura 2.1. Tangente hiperbólica $\tanh(x)$

En donde la $\tanh(x)$ denota la función tangente hiperbólica definida de la siguiente manera:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (2.4)$$

En donde tal función satisface $|x| \geq |\tanh(x)|$, y $1 \geq |\tanh(x)|$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la norma euclidiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ satisface lo siguiente:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{x}\| & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.5)$$

y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$.

También consideramos para este caso el hecho de que en una matriz simétrica definida positiva A se mantiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T A \tilde{\mathbf{q}} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{A\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

y si además A es diagonal, entonces tenemos:

$$\mathbf{f} \tilde{\mathbf{q}}^T A \tilde{\mathbf{q}} \geq \lambda_{\min}\{A\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

Consideremos la ley de control PD con compensación de gravedad:

$$\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

La cual cumple con el objetivo del control de posición pura:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d.$$

Como la posición deseada q_d es constante, la ecuación de lazo cerrado es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q_d - \tilde{q})^{-1} [K_d \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Para estudiar las propiedades de estabilidad del origen $[\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}}^T] = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación de lazo cerrado (2.8), considerando la función de Lyapunov $V(t, x)$ pero con un término adicional, de la siguiente manera:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \gamma f(\tilde{q})^T M(q) \dot{\tilde{q}} \quad (2.9)$$

Donde $f(\tilde{q})$ se ha definido en (2.3) y $\gamma > 0$ es una constante suficientemente pequeña como para satisfacer simultáneamente:

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{M\}}{\lambda_{\min}^2\{M\}} > \gamma^2, \quad (2.10)$$

$$\frac{4\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4\lambda_{\min}\{K_p\} [\sqrt{n}k_{C1} + \lambda_{\max}\{M\}]} > \lambda. \quad (2.11)$$

Dado que las cotas superiores siempre son constantes estrictamente positivas, entonces siempre existe un $\lambda > 0$ arbitrariamente pequeña que satisface ambas desigualdades.

Para demostrar que la función candidata de Lyapunov es una función definida positiva y radialmente desacotada, analizaremos el tercer sumando de la ecuación (2.9) satisface las siguientes condiciones:

$$\lambda f(\tilde{q})^T M(q) \dot{\tilde{q}} \begin{cases} \leq \gamma \|f(\tilde{q})\| \|M(q) \dot{\tilde{q}}\| \\ \leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|f(\tilde{q})\| \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\| \end{cases}$$

Tomando en cuenta lo establecido en (2.5), se desprende el hecho de que:

$$-\gamma f(\tilde{q})^T M(q) \dot{\tilde{q}} \geq -\gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\|.$$

Por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (2.9) cumple con las siguientes desigualdades:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\gamma \lambda_{\max}\{M\} \\ -\gamma \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\min}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que el resultado es una función definida positiva y radialmente desacota ya que por hipótesis, K_p es definida positiva $-\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$, y γ se ha seleccionado de manera tal que satisfaga a (2.10).

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (2.9) a lo largo de la trayectoria del sistema de lazo cerrado (2.8) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & -\dot{q}^T [K_p \dot{q} - K_v q - C(\dot{q}, q) \dot{q}] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - [K_p \tilde{q}]^T \dot{q} - \gamma \dot{f}(\tilde{q})^T M(q) \dot{q} \\ & - \gamma f(\tilde{q})^T \dot{M}(q) \dot{q} - \gamma f(\tilde{q})^T [K_p \dot{q} - K_v q - C(\dot{q}, q) \dot{q}].\end{aligned}\quad (2.12)$$

Usando el hecho de que la matriz $C(q, \dot{q})$ definida como (1.24) está relacionada con la matriz de inercia $M(q)$ mediante la expresión:

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad \forall q, \dot{q}, x \in R^n. \quad (2.13)$$

Y como, $\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T. \quad (2.14)$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(q, \dot{q})$, ésta matriz siempre satisface:

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in R^n. \quad (2.15)$$

Considerando (2.15), la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (2.12) quedara:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & -\dot{q}^T K_v q - \gamma \dot{f}(\tilde{q})^T M(q) \dot{q} - \gamma f(\tilde{q})^T K_p \tilde{q} \\ & + \gamma f(\tilde{q})^T K_v \dot{q} - \gamma f(\tilde{q})^T C(q, \dot{q})^T \dot{q}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

A continuación vamos a buscar la acotación superior de $V(\tilde{q}, \dot{q})$ mediante una función definida negativa en términos de los estados de $\tilde{q}$ y $\dot{q}$. Para lo cual resulta conveniente encontrar cotas superiores en términos de (2.16).

El primer término de la ecuación (2.16) puede ser trivialmente acotado por:

$$-\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{q}\|^2. \quad (2.17)$$

Para acotar superiormente el segundo término de (2.16) primero consideremos que:

$$f(\tilde{q}) = -F(\tilde{q}) \dot{q}$$

En donde $F(\tilde{q})$ es una matriz diagonal cuyos elementos $\text{sech}^2(\tilde{q}_i)$, son negativos y menores que 1. De este hecho se desprende La siguiente desigualdad:

$$\|\dot{f}(\tilde{q})\| \leq \|\dot{q}\|. \quad (2.18)$$

Debido a este argumento se tiene lo siguiente

$$-\gamma \dot{f}(\tilde{q})^T M(q) \dot{q} \leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{q}\|^2. \quad (2.19)$$

Por otro lado, en vista de (2.6), la desigualdad siguiente es cierta debido a que K_p es una matriz diagonal y definida positiva

$$\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \geq \gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2$$

que conduce finalmente a la siguiente desigualdad clave:

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \leq -\gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|^2. \quad (2.20)$$

Una cota obtenida en forma directa sobre $\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}}$ viene dada por:

$$\dot{\gamma} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{K_v\} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|. \quad (2.21)$$

La cota superior del término $-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}$ deberá seleccionarse cuidadosamente.

Note que

$$\begin{aligned} -\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ -\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} &\leq \gamma \|\dot{\mathbf{q}}\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|. \end{aligned}$$

Considerando nuevamente la ecuación (2.15) pero en el aspecto en el que establece la existencia de una constante k_{c_1} tal que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq \gamma k_{c_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, resulta

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma k_{c_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\|.$$

Haciendo uso de la correlación (2.5) sobre $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ que afirma $\|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \sqrt{n}$ para toda $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, entonces se obtiene

$$-\gamma \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \leq \gamma \sqrt{n} k_{c_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (2.22)$$

En este caso las cotas (2.17)-(2.22) conducen a que la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ en (2.16) cumpla con

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq -\gamma \begin{bmatrix} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} & \frac{1}{\gamma} \lambda_{\min}\{K_v\} - \sqrt{n} k_{c_1} - \lambda_{\max}\{M\} \end{bmatrix}.$$

Las dos condiciones siguientes garantizan que la matriz Q sea definida positiva, por tanto, éstas son suficientes para asegurar que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ sea una función definida negativa:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > 0 \text{ y } \frac{4\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4\lambda_{\min}\{K_p\}[\sqrt{n}k_{c_1} + \lambda_{\max}\{M\}]} > \lambda.$$

La primera condición se satisface trivialmente puesto que K_p se ha considerado una matriz diagonal definida positiva. La segunda condición también se cumple debido a la cota superior (2.11) impuesta sobre γ .

De acuerdo con los argumentos presentados anteriormente, siempre existe una constante positiva (no nula) γ tal que la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ dada por (2.9) es definida positiva, mientras que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ expresada como (2.23) es definida negativa. Por este argumento, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función de Lyapunov estricta.

Finalmente de acuerdo a lo establecido en el método directo de Lyapunov se puede establecer estabilidad asintótica global del origen.

2.3 Índice de desempeño

El desempeño de los algoritmos de control no tiene un criterio establecido para medirlo, sin embargo un criterio aceptado y utilizado en el ámbito académico para medir tal desempeño es mediante la obtención del índice de desempeño mediante la norma $\mathcal{L}_2$, el

cual es establecido de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt} \quad (2.24)$$

donde T representa el periodo de tiempo de simulación o de experimentación.

Para obtener el índice de desempeño de un algoritmo de control se debe realizar una comparación experimental en una aplicación donde las exigencias al algoritmo sean altas. El índice de desempeño es útil para comprar el desempeño de un controlador con respecto de otro, el cual normalmente es el PD, debido a que es ampliamente conocido. El valor de los índices de desempeño se comparan y el que presenta el menor valor de la norma $\mathcal{L}_2$ es el que tiene un mejor comportamiento de desempeño.

2.4 Procedimiento Experimental

Los robots manipuladores durante el desarrollo de su trabajo pueden interactuar con su entorno o bien pueden desplazarse libremente dentro de su área de trabajo, para nuestro caso consideraremos solamente a los robots que se desplazan libremente en su espacio de trabajo, es decir, no interaccionan con el medio ambiente.

Para el desarrollo de las pruebas experimentales se diseño y desarrollo una plataforma experimental consistente en un robot antropomórfico de tres grados de libertad en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de

Puebla, para lo cual se conto con la participación de estudiantes de Dicha Facultad y del Maestro en Ciencias Francisco Terneus egresado de la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, quien plasmo el procedimiento de diseño y construcción del mismo en su tesis de Maestría.

En virtud de lo anterior en la presente tesis no se presenta el desarrollo del mismo, pero si se proporcionan las sus características, también nos enfocaremos en la realización de las pruebas experimentales que nos permitan mostrar el desempeño de los algoritmos de control desarrollados mediante la metodología propuesta.



Figura 2.2 Plataforma Experimental

La plataforma experimental se muestra en la Figura 2.2, la cual está compuesta de tres motores de transmisión directa, los cuales forman la articulación de la base, hombro y del codo, mismos que permaneces unidos a los eslabones que forman cada una de las partes mencionadas y los cuales se encuentran fabricados en material de aluminio 6061, las articulaciones son accionadas por tres servomotores de transmisión directa de la marca Parker Compumotor, de los cuales sus características se listan en la tabla 2.1

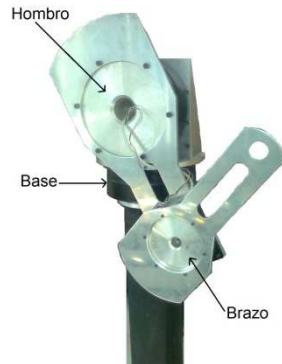
Eslabón	Modelo	Torque [Nm]	p/rev
Base	DM-1015B-60	15	2621440
Hombro	DM-1050A-115	50	4096000
Codo	DM-1004C-115	4	2621440

Tabla 2.1. Características de los servomotores del robot.

La programación se realiza en lengua C, en tiempo real, con un tiempo de muestreo de 2.5 milisegundo, especificando la configuración del servoamplificador para que pueda operar en modo par, cuenta con una tarjeta de instrumentación electrónica que contiene

convertidores de digital/analógico que envían al amplificador electrónico voltaje analógico v como señal de referencia del par τ , también realiza la adquisición de datos de posición q , debido a que los motores de transmisión directa cuentan un Encoder de alta resolución.

Para el desarrollo de las pruebas experimentales se introduce el algoritmo de control (ley de control) al robot y se establecen las coordenadas articulares que se desean q_{d1} , q_{d2} y q_{d3} , se sintonizan las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v , de tal manera que el error de posición $\tilde{q}$ sea lo más cercano a cero. Durante el desarrollo de la pruebas se monitorea el desplazamiento del robot desde la posición inicial hasta la posición final alcanzada al final del tiempo de prueba que será de 5 segundo.



Capítulo 3.

DESARROLLO DE LA CONTRIBUCIÓN CENTRAL DE LA TESIS

En el campo de control de posición el diseño de nuevos esquemas de control representa un reto, debido a que se requieren algoritmos con un buen desempeño que puedan tener aplicaciones en el ámbito industrial, la metodología del moldeo de energía actualmente es utilizada para generar algoritmos de control para robots manipuladores.

Los algoritmos de control generados por el moldeo de energía deben de ser analizados mediante los criterios de estabilidad de Lyapunov, a través de la propuesta de una función candidata de Lyapunov. Para demostrar que el punto de equilibrio tiene estabilidad asintótica se emplea el teorema de Barbashin Krasovskii LaSalle.

Sin bien es cierto que la técnica de moldeo de energía permite diseñar una extensa familia de estrategias de control que resuelven el problema de control de posición, también es cierto que no es la única posibilidad, a continuación se desarrolla una técnica similar que permite desarrollar una extensa familia de algoritmos de control con funciones racionales de una

variable con inyección de energía tanto en la parte proporcional como derivativa.

De aquí la importancia de la siguiente propuesta metodológica para la generación de amplias familias de algoritmos de control para el control de posición de robots manipuladores, misma que describimos en el presente capítulo, presentamos su análisis de estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov.

Mediante la metodología desarrollada se generara tres diferentes familias de algoritmo de control, se demuestra que poseen estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov y mediante el uso de la plataforma experimental, se demuestra su utilidad en el control de posición. El análisis del desempeño de los las familias de algoritmos de control desarrollados con la metodología propuesta es desarrollado mediante una comparación con el algoritmo PD, mediante un índice de desempeño de la norma $\mathcal{L}_2$.

3.1 Metodología propuesta

Los robots manipuladores considerados para el presente estudio de control de posición se consideran libres para desplazarse en su medio ambiente de trabajo. Consideremos el modelo dinámico de un robot manipulador compuesto de eslabones rígidos y con actuadores ideales, cuyo modelo cinemático queda definida por la ecuación (1.28). El problema de control de posición lo definimos en la siguiente forma: Dada una posición articular deseada $\mathbf{q}_d$ para el extremo final del robot, se determina una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$ que permita a las posiciones articulares $\mathbf{q}$ llegar a $\mathbf{q}_d$ de manera asintótica, sin importar las condiciones iniciales; es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{q}_d \in R^n$ es un vector constante.

La metodología propuesta permite generar grandes familias de algoritmos de control que tienen en su estructura matemática una función racional y un gradiente de energía potencial, que determina la forma en la cual se suministra la energía al robot, menos el gradiente de una función de control derivativa con una función racional y que brindara una acción de amortiguamiento en función de la velocidad articular, más un termino de compensación de gravedad. La nueva ley general de control propuesta es:

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})}} \right) - \left(\frac{\nabla f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})}} \right) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.2)$$

Por notación se define

$$\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial f_p(K_p, \tilde{q}_1)}{\partial \tilde{q}_1}}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_1)}} \\ \frac{\frac{\partial f_p(K_p, \tilde{q}_2)}{\partial \tilde{q}_2}}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{\partial f_p(K_p, \tilde{q}_n)}{\partial \tilde{q}_n}}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} \quad (3.2a); \quad \frac{\nabla f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial f_v(K_v, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1}}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q}_1)}} \\ \frac{\frac{\partial f_v(K_v, \dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2}}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{\partial f_v(K_v, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n}}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q}_n)}} \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

en donde:

$\tau \in R^n$ es la ley de control que proporciona los pares aplicados en las articulaciones del robot.

$\tilde{q} \in R^n$ es la diferencia entre la posición articular deseada q_d y el vector de la posición articular q , es decir $\tilde{q} = q_d - q$.

$\dot{q} \in R^n$ es el vector de la velocidad en las articulaciones del robot.

$\frac{\nabla f_P(K_p, \tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_P(K_p, \tilde{q})}}$ es la energía potencial de diseño suministrada a las articulaciones del robot,

la función resultante del gradiente $\nabla f_P(K_p, \tilde{q})$ y del término racional $\frac{1}{\sqrt{\alpha + f_P(K_p, \tilde{q})}}$, el

cual debe ser una función continua en $\tilde{q}$ con un único y mínimo global de $\tilde{q} = \mathbf{0} \in R^n$.

$f_P(K_p, \tilde{q})$ debe ser:

- una función diferenciable,
- continua en $\tilde{q}$ y estar definida en todo punto $\tilde{q} \in R^n$, es decir:

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow \tilde{q}_0} f(K_p, \tilde{q}) = f(K_p, \tilde{q}_0) \quad \forall \tilde{q}_0 \in R^n.$$
- definida positiva con un mínimo y único global en el error de posición

$$\tilde{q} = \mathbf{0} \in R^n$$

$$f(K_p, \tilde{q}) > 0 \quad \forall \tilde{q} \neq \mathbf{0}$$
- monótonamente creciente y acotada.

K_p es la ganancia proporcional en donde $K_p \in R^{n \times n}$ y es además una matriz diagonal definida positiva.

K_v es la ganancia derivativa tal que $K_v \in R^{n \times n}$ y es una matriz diagonal definida positiva.

α y β , son constantes positivas.

$\frac{\nabla f_v(K_v, \dot{q})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q})}}$ es la función de inyección de amortiguamiento o freno mecánico y satisface

$$\mathbf{q}^T K_v \left(\frac{\nabla f_v(K_v, \dot{q})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q})}} \right) > 0.$$

$\nabla f_v(\dot{q})$ es el gradiente de la velocidad articular .

$f_v(K_v, \dot{q})$ es una función que depende de la velocidad de movimiento $\dot{q}$, la cual posee la misma estructura que la de $f_P(K_p, \tilde{q})$, solo que en función $\dot{q}$.

$g(q)$ es el vector de compensación de gravedad, en este caso solo se utiliza para las articulaciones de los robots cuyo movimiento no es en el plano horizontal.

La figura 3.1 muestra el diagrama a bloques de la estructura de control para la nueva ley de control propuesta.

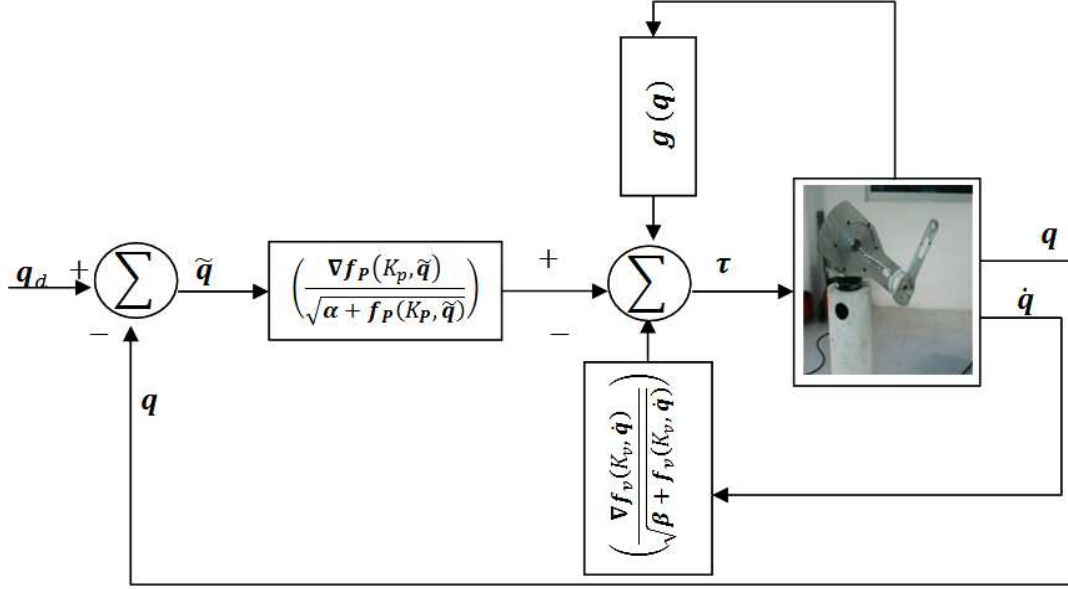


Figura 3.1 Diagrama de la ley de control propuesta

Mediante la ecuación (1.28) y la nueva ley de control propuesta (3.2) se forma la ecuación de lazo cerrado para la metodología propuesta, la cual genera un punto de equilibrio estable global en el sentido de Lyapunov, y la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio se puede demostrar mediante el principio de invariancia de Barbashin Krasovskii LaSalle.

La ecuación de lazo cerrado expresada para el control de posición en términos de las variables de estado $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T \in R^{2n}$, queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} \left[\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} - \frac{\nabla f_v(K_v, \dot{q})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q})}} - B\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

en donde debido a que q_d es constante resulta (3.3) ser una ecuación diferencial autónoma.

La existencia del punto de equilibrio se establece cuando $f(0) = 0 \in R^n \quad \forall t \geq 0$, para el presente caso el origen $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T] = 0 \in R^{2n}$ es el único punto de equilibrio de (3.3), lo cual se demuestra de la siguiente forma:

- En el primer término se cumple que: $-\dot{q} = -I \dot{q} = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$.
- La matriz de inercia es simétrica $M(q) = M(q)^T$, definida positiva $M(q) > 0$, por lo tanto existe la matriz inversa $M(q)^{-1} \in R^{n \times n}$, es simétrica y definida positiva.
- $K_p \in R_+ \wedge K_v \in R_+$, en donde K_p y K_v nuevamente son las ganancias proporcional y derivativa, ambas son matrices diagonales definidas positiva $K_p \geq 0$ y $K_v \geq 0$.
- $\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} = 0$ si y sólo si $\tilde{q} = 0$.
- La función disipativa $\frac{\nabla f_v(K_v, \dot{q})}{\sqrt{\beta + f_v(K_v, \dot{q})}} = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$.
- Cuando la velocidad articular es cero ($\dot{q} = 0$), la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(q, \dot{q}) = 0 \in R^{n \times n}$.
- $B\dot{q}$ es el vector de pares de fricción viscosa de las articulaciones del robot, donde $B \in R^{n \times n}$ y es una matriz diagonal, que satisface:

$$B\dot{q} = 0 \text{ si y sólo si } \dot{q} = 0 \wedge R_+ \wedge B \in R_+$$

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (3.3), se realiza mediante el método directo de Lyapunov, presentado en el tema 1.6, donde se indica que la estabilidad asintótica global queda establecida si el origen $q = 0 \in R^n$, es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (3.3) si existe una función candidata de Lyapunov $V(\tilde{q}, \dot{q})$ definida positiva globalmente, radialmente desacotada y menguante, de tal forma que su derivada satisfaga las siguientes condiciones:

- $\dot{V}(0) = 0 \quad \forall t \geq 0$.
- $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \in R^n$.

Para iniciar el análisis se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + 2 \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T K_p \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right] \quad (3.4)$$

La primera condición a cumplir es que la función candidata sea definida positiva, lo cual se demuestra debido a que $M(q)$ en la energía cinética es definida positiva. El segundo

término es una función cuadrática de $f_p(\tilde{q})$, que depende del error de posición $\tilde{q}$, tal término también es definido positivo, la ganancia proporcional K_p es igualmente definido positivo por diseño. Note que γ es un factor de ajuste, para que el segundo término al ser evaluado en $\tilde{q} = 0$ sea 0; por lo tanto se cumple con las siguientes condiciones:

- $V(0) = 0$
- $V(\tilde{q}, \dot{q}) > 0 \quad \forall x \neq 0.$

En consecuencia queda demostrado que la función propuesta $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es una función definida positiva. La ecuación (3.3) es una ecuación autónoma, y como la función candidata de Lyapunov no depende explícitamente del tiempo, $V(\tilde{q}, \dot{q})$ por lo tanto es trivialmente menguante dado que existe una función definida positiva $W: R^n \rightarrow R_+$ tal que:

$$V(t, (\tilde{q}, \dot{q})) \leq W(\tilde{q}, \dot{q}) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \tilde{q}, \dot{q} \in R^n.$$

$$V(t, (\tilde{q}, \dot{q})) = V(\tilde{q}, \dot{q}).$$

Además la función $V(\tilde{q}, \dot{q}): R^n \rightarrow R$ es una función radialmente desacotada porque $V(\tilde{q}, \dot{q}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\tilde{q}, \dot{q}\| \rightarrow \infty$.

La segunda condición establece que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov sea definida negativa, por lo tanto.

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{d}{dt} 2 \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T K_p \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right] \quad (3.5)$$

Estableciendo la siguiente igualdad tenemos:

$$z = \frac{d}{dt} 2 \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T K_p \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right] \quad (3.6)$$

$$z = 2 \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T K_p \left[\frac{1}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right) \right] +$$

$$2 \left[\frac{1}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right) \right]^T K_p \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 z = 2 \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T & K_p \left[\frac{1}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma} \left(\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q})}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} \right) \dot{\tilde{q}} + \right. \\
 & \left. 2 \left[\frac{1}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma} \left(\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q})}{2 \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} \right) \tilde{q} \right]^T K_p \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right] \right] \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Simplificando (3.8), resulta

$$z = \left[\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \right]^T K_p \left[\frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} \right] \dot{\tilde{q}} \quad (3.9)$$

Definiendo $y = \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma$, al mismo tiempo que tomamos en cuenta lo establecido en (3.2a), además como el tercer factor de (3.9) es una matriz diagonal al igual que K_p y considerando que el producto entre matrices diagonales es conmutativo, tenemos:

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{y_1} \\ \vdots \\ \sqrt{y_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_1)}{\sqrt{y_1} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_1)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_n)}{\sqrt{y_n} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} \dot{\tilde{q}} = \begin{bmatrix} \sqrt{y_1} \\ \vdots \\ \sqrt{y_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_1)}{\sqrt{y_1} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_1)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_n)}{\sqrt{y_n} \sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} K_p \dot{\tilde{q}} \quad (3.10)$$

Simplificado

$$z = \begin{bmatrix} \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_1)}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_1)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\nabla f_p(K_p, \tilde{q}_n)}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q}_n)}} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\tilde{q}} = \frac{\nabla^T f_p(K_p, \tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})}} K_p \dot{\tilde{q}} \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.5) obtenemos:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{\nabla^T f_p(\tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(\tilde{q})}} K_p \dot{\tilde{q}} \quad (3.12)$$

Sustituyendo el valor de la aceleración $\ddot{\tilde{q}}$, el cual obtenemos a partir de la ecuación de lazo cerrado (3.3) dentro de (3.12), y considerando que la derivada del error de posición es $\ddot{\tilde{q}} = -\ddot{q}$, debido a que la posición deseada q_d es constante, se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T M(q) \left[M(q)^{-1} \left[K_p \frac{\nabla f_p(\tilde{q})}{\sqrt{\alpha + f_p(\tilde{q})}} - K_v \frac{\nabla f_p(\dot{\tilde{q}})}{\sqrt{\beta + f_p(\dot{\tilde{q}})}} - B \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}} \right] \right] +$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.13)$$

Desarrollando las operaciones indicadas tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\nabla f_P(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{\beta + f_P(\dot{\mathbf{q}})}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.14)$$

Usando el hecho de que la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definida como en (1.24) está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ mediante la expresión:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in R^n. \quad (3.15)$$

Y como, $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (3.16)$$

Independientemente de la forma de obtener $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ésta matriz siempre satisface:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in R^n. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17), es conocida como la propiedad de antisimetría; por lo tanto tenemos:

$$-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (3.18)$$

Aplicando (3.18) en (3.14) resulta:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\nabla f_P(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{\beta + f_P(\dot{\mathbf{q}})}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

Considerando que el producto interno entre vectores establece lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}^T K_p \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} = \frac{\nabla^T f_P(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\alpha + f_P(\tilde{\mathbf{q}})}} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.20)$$

Dado el resultado de (3.20), los términos primero y cuarto de (3.19) se cancelan; finalmente el resultado de la derivada temporal de la función candidata es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\nabla f_P(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{\beta + f_P(\dot{\mathbf{q}})}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \quad (3.21)$$

donde $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ resulta ser una función semidefinida negativa debido a que cumple la siguiente condición:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \frac{\nabla f_p(\dot{q})}{\sqrt{\beta + f_p(\dot{q})}} - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0 \quad (3.22)$$

Usando el hecho de que la función candidata de Lyapunov es una función definida globalmente positiva y que su derivada temporal es semidefinida negativamente, podemos establecer que se cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, en consecuencia también queda demostrado que el punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (3.3) posee estabilidad global.

Finalmente mediante el principio de invariancia de Barbashin Krasovskii LaSalle, podemos demostrar que el punto de equilibrio posee estabilidad asintótica global, debido a que la ecuación de lazo cerrado (3.3) es una ecuación diferencial autónoma.

Para tal propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in R^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\}, \\ &= \{ \tilde{q} \in R^n, \dot{q} = 0 \in R^n \} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observando que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$, si y sólo si $\dot{q} = 0$. Para que la solución $[\tilde{q}^T(t), \dot{q}^T(t)]^T$ de la ecuación de lazo cerrado (3.3) pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\dot{q}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto también se satisface que $\ddot{q}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Considerando que $\sqrt{\alpha + f_p(K_p, \tilde{q})} - \gamma = 0$ si y sólo si $\tilde{q} = 0$, entonces el máximo conjunto de invariantes en Ω es $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T]^T = [0^T, 0^T]^T \in R^{2n}$, entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en Ω y en donde $[\tilde{q}^T(t), \dot{q}^T(t)]^T \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. De acuerdo al teorema de LaSalle, esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T]^T = 0 \in R^{2n}$, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0.$$

Una vez más considerando que la función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es definida positiva y su derivada temporal $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$ es semidefinida negativa, se tiene que la función de energía es decreciente y por lo tanto:

$$0 < V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

Estableciendo que $K_p \sqrt{\alpha + \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})} = \mathbf{f}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$, se tiene que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$2\mathbf{f}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

Se procede a acotar el error de posición y de la velocidad mediante el teorema de Rayleigh-Ritz:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq f^{-1} \left(\frac{V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{2\lambda_{\min}(K_p)} \right)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| = \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}}$$

Mediante la técnica propuesta se pueden generar grandes familias de algoritmos de control con funciones racionales y con acciones acotas que pueden ser empleados en el control de posición de robots manipuladores.

Las acciones acotadas de control, consisten en mantener el valor de los torques máximos solicitados por el controlador dentro de los límites que físicamente los servoactuadores son capaces de suministrar a las articulaciones del robot; por lo tanto el torque solicitado queda restringido de la siguiente manera:

$$\tau_i \leq \tau_{i,m\acute{a}x} \quad \text{en donde } i = 1, 2, \dots, n$$

En donde $\tau_{i,m\acute{a}x}$ corresponde al torque máximo que puede proporcionar el i -ésimo actuador del robot.

En la figura 3.2 se presenta el comportamiento típico de un servo amplificador con respecto al par aplicado en función del par solicitado por el algoritmo de control. Presenta tres regiones de comportamiento, de las cuales dos son de saturación (no lineal) y una de comportamiento lineal. El servo amplificador solo puede suministrar un torque dentro de los límites de su diseño, el cual están acotado por las regiones de saturación $\pm \tau_{m\acute{a}x}$, cuando el controlador solicita un torque mayor $\tau_{solicitado} > \tau_{m\acute{a}x}$, el

servoamplificado causa el efecto de saturación; es decir aplica el $\tau_{m\acute{a}x}$, lo que provoca problemas tales como perdida de estabilidad, disminuye el desempe\~no del controlador, aumento de temperatura, mayores fuerzas de fricción, oscilaciones y errores de posición mayores, etc.

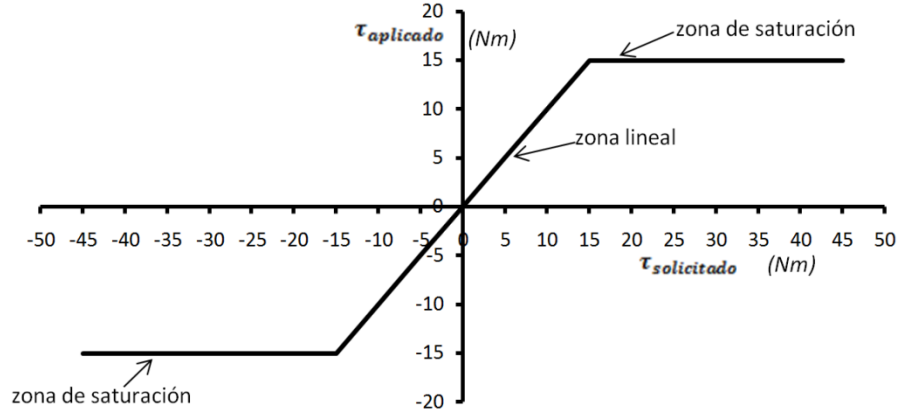


Figura 3.2. Torque aplicado por el servo amplificador respecto del torque solicitado.

Debido a lo anterior, es deseable que el algoritmo de control demande torques dentro de la región de comportamiento de lineal de los servo actuadores, lo cual se consigue si la función seleccionada para la construcción de las familias de algoritmos de control tiene una grafica de comportamiento semejante o igual a la figura 3.2; además la sintonía de la ganancia K_p debe cumplir con:

$$K_p \leq \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{q_d}$$

$$\lambda_{m\acute{a}x}\{K_p\} = \|K_p\| \leq \frac{\tau_{m\acute{a}x\ i}}{q_{di}}$$

Un aspecto importante a destacar es que la presente metodología solo permite la generación de familias de algoritmos de control con acciones acotadas.

3.2 Familias de Algoritmos de Control

La metodología propuesta permite generar una amplia gama de familias de controladores para el control de posición, como caso ilustrativo se presenta a continuación el desarrollo de tres familias de algoritmos obtenidas por tal metodología propuesta.

El procedimiento general a seguir para la generación de algoritmos de control de posición mediante la metodológica propuesta es el siguiente:

- 1.- Identificar una función que sea continuamente diferenciable, monótonamente creciente, y acotada, cuya grafica de comportamiento sea semejante a la figura 3.2, y que tenga la estructura de la metodología propuesta (ecuación 3.2).
- 2.- Se obtiene la ecuación dinámica de lazo cerrado, la cual por lo general es una ecuación diferencial ordinaria no lineal autónoma y se determina la existencia y unicidad del punto de equilibrio.
- 3.- Se propone la función candidata de Lyapunov.
- 4.- Se realiza el estudio de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado mediante la función candidata de Lyapunov propuesta, haciendo uso de Método directo de Lyapunov y del teorema de invariancia de Lasalle.

3.2.1 Familia 1

- 1.- Primeramente se establece el modelo dinámico del robot, el cual en este caso es el correspondiente a la ecuación (1.28)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} = \tau$$

A continuación se procede a buscar una nueva función que posea el mismo comportamiento que la de figura 3.2, que posea la estructura matemática de (3.2). Mediante el empleo del programa de Matcad se obtiene la grafica de la función que se empleara para la construcción de la familia de algoritmos de control, ver figura 3.3.

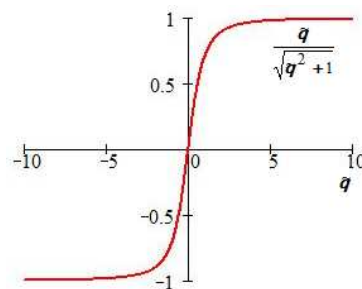


Figura 3.3 Grafica de la función propuesta.

En este caso la función seleccionada es una función racional con una variable, la cual se emplea para el diseño de la familia de algoritmos de control, en donde:

$$\mathbf{f}_P(\tilde{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\nabla \mathbf{f}_P(\tilde{\mathbf{q}}) = 2\tilde{\mathbf{q}} = 2 \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{f}_P(\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\nabla \mathbf{f}_P(\dot{\mathbf{q}}) = 2\dot{\mathbf{q}} = 2 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Construyendo cada parte de la ley de control propuesta (3.2) con las ecuaciones (3.24)-(3.27) y considerando que son funciones vectoriales, quedan definidas como:

$$\frac{\tilde{\mathbf{q}}}{\sqrt{k_1 \tilde{\mathbf{q}}^2 + k_2}} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{k_3 \dot{\mathbf{q}}^2 + k_4}} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{\sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2) las ecuaciones (3.28) y (3.29) se obtiene la familia de algoritmos de control correspondiente:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{\sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4}} \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.30)$$

En la ecuación (3.30) los valores de k_1, k_2, k_3, k_4 corresponde a constantes positivas, de igual manera $K_p \in R^{n \times n}$ y $K_v \in R^{n \times n}$ corresponden a las matrices de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente, ambas definidas positivas, $\tilde{\mathbf{q}} \in R^n$ el error de posición, $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidad articular $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ el vector de compensación de fuerza gravitacional.

2.- La ecuación de lazo cerrado se obtiene mediante la sustitución de la ley de control (3.30) dentro de la ecuación del modelo dinámico del robot(1.28), teniendo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

la cual, en razón de $\mathbf{q}_d$ constante, resulta ser una ecuación diferencial autónoma, en donde el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T] = [0^T \ 0^T] \in R^2$ resulta ser el único punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado. La demostración de la existencia y unicidad del mencionado punto de equilibrio se demuestra a continuación:

a) En la ecuación de lazo cerrado el primer termino del segundo miembro se cumple:

$$-\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -I\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \text{ si y sólo si } \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0.$$

b) La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, existe su matriz inversa y también es definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} \in R_+$.

c) Las ganancias K_p y K_v son matrices definidas positivas.

d) Como $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \in R^n$ entonces $C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = 0 \in R^{n \times n}$, de igual manera la función disipativa satisface: $f_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$.

e) En la función de energía potencial se cumple con:

$$f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \text{ si y sólo si } \tilde{\mathbf{q}} = 0.$$

Por lo tanto se demuestra que el punto de equilibrio existe y es único.

3.- Para el análisis de estabilidad del punto de equilibrio se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

4.- Para demostrar que la función candidata satisface las condiciones de Lyapunov, tenemos que (3.32) cumple con las siguientes condiciones: el primer término es definido

positivo debido a que la matriz $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término de igual manera es definido positivo en términos del vector de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, y satisface:

$$k_2 + k_1 \tilde{q}_i^2 > 0 \quad \forall \tilde{q}_i \in R \quad y \quad \sqrt{k_1 \tilde{q}_i^2 + k_2} > 0;$$

$$\sqrt{k_1 \tilde{q}_i^2 + k_2 - k_2} > 0 \quad i = 1 \dots n \quad \forall \tilde{q}_i \in R^n$$

Por lo tanto la función candidata $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva en forma global y radialmente desacotada.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (3.32) a lo largo de la trayectoria de lazo cerrado es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{2k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{2k_1 \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{2k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{2k_1 \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n}{2\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.34)$$

simplificando tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Sustituyen (3.35) en (3.33) resulta:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

El valor de la aceleración $\ddot{q}$, lo tomamos de la ecuación de lazo cerrado (3.31), por tanto sustituyendo en (3.36) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T M(q) \left[M(q)^{-1} \left[K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q} \right] + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Resolviendo las operaciones indicadas resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} - \dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \dot{q}^T B \dot{q} \\ & + \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2} \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2 - k_2}} \frac{k_1 \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

En donde agrupando los términos tercero y cuarto tenemos la propiedad de antisimetría de la matriz de inercia establecida en la ecuación (3.17), y considerando de igual manera que de la ecuación de lazo cerrado se desprende el hecho de que $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$.

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4} \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4} \end{bmatrix} - \dot{q}^T B \dot{q} - \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} 1 & k_1 \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & k_1 \tilde{q}_n \dot{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.39)$$

El cuarto término puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} 1 & k_1 \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & k_1 \tilde{q}_n \dot{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix} \dot{q} = s \quad (3.40)$$

En donde:

$$s = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} 1 & k_1 \tilde{q}_{11} \dot{q}_1 & \dots & 0 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_{11}^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_{11}^2 + k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_{nn}^2 + k_2} - k_2} & \frac{k_1 \tilde{q}_{nn} \dot{q}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_{nn}^2 + k_2}} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.41)$$

Considerando que K_p es una matriz diagonal y tomando en cuenta que el producto entre matrices cuadradas es conmutativo tenemos:

$$s = \begin{bmatrix} \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} - k_2 \\ \vdots \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} - k_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & k_1 \tilde{q}_{11} \dot{q}_1 & \dots & 0 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_{11}^2 + k_2} - k_2 & \sqrt{k_1 \tilde{q}_{11}^2 + k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_{nn}^2 + k_2} - k_2} & \frac{k_1 \tilde{q}_{nn} \dot{q}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_{nn}^2 + k_2}} \end{bmatrix} K_p \dot{q} \quad (3.42)$$

Resolviendo el producto tenemos:

$$s = \begin{bmatrix} k_1 \tilde{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots \\ k_1 \tilde{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix}^T K_p \dot{q} \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.43) en (3.39)

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4} \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \tilde{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots \\ k_1 \tilde{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.44)$$

Agrupando el primer y tercer termino

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4} \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4} \end{bmatrix} - (k_1 - 1) \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \\ \sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.45)$$

Si consideramos que el valor de las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 pueden tomar cualquier valor con la siguiente condición:

$$k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 1$$

Entonces la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es semidefinida negativa, es decir:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$$

Considerando el hecho de que la función candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es globalmente definida positiva y su derivada temporal es una función semidefinida negativa, podemos concluir que el punto de equilibrio del sistema de lazo cerrado es estable.

Finalmente debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación (3.31), mediante el uso del principio de invariancia de LaSalle, demostramos que el punto de equilibrio es global asintóticamente estable.

Nótese que el conjunto Ω esta dado por:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in R^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\},$$

$$\Omega = \{ \tilde{\mathbf{q}} \in R^n, \dot{\mathbf{q}} = 0 \in R^n, \}$$

Observemos que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Si una solución debe pertenecer a $\Omega \forall t \geq 0$, es suficiente con que $\dot{\mathbf{q}}(t) = 0 \forall t \geq 0$. En consecuencia también se satisface $\ddot{\mathbf{q}}(t) = 0 \forall t \geq 0$. Por lo tanto $\tilde{\mathbf{q}}(t) = 0 \forall t \geq 0$ es la única solución, en

donde $[\tilde{q}(0)^T, \dot{q}(0)^T]^T = \mathbf{0} \in R^{2n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\tilde{q}(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$. De acuerdo a lo que establece el teorema de LaSalle, este elemento basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T \in R^{2n}$.

3.2.2 Familia 2

1.- Primeramente se establece el modelo dinámico del robot, el cual en este caso es el correspondiente a la ecuación (1.28)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} = \tau$$

Posteriormente se busca una función cuya grafica de comportamiento se semejante al de la figura 3.2; la función se grafica mediante el programa Matcad (ver figura 3.4).

En donde la función $f(x) = \frac{\cosh^{m-1}(x) \sinh(x)}{1 + \cosh^m(x)}$. $f(x)$ es una función diferenciable, monótonamente creciente y acotada. La $f(x)$ será implementada en (3.2), para la obtención de la familia de algoritmos de control; por lo tanto tenemos:

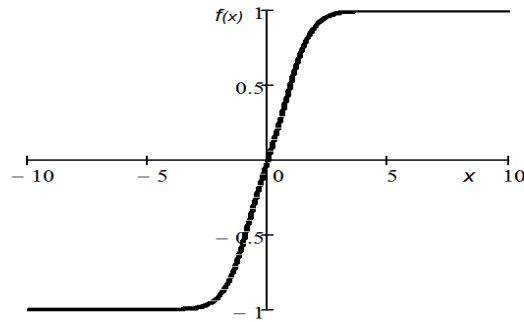


Figura 3.4 Forma de la grafica de la función $f(x)$

$$f_P(\tilde{q}) = \cosh^m(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \cosh^m(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \cosh^m(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\nabla f_P(\tilde{q}) = \cosh^{m-1}(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{f}_p(\dot{\mathbf{q}}) = \cosh^m(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \cosh^m(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ \cosh^m(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\nabla \mathbf{f}_p(\dot{\mathbf{q}}) = \cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\dot{q}_1) \sinh(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\dot{q}_n) \sinh(\dot{q}_n) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Asignando el valor de 1 al índice de la raíz, de igual manera $\alpha = 1$, por lo tanto al sustituir las ecuaciones (3.46)-(3.49) en (3.2), se tiene que la familia de algoritmos de control queda de la siguiente forma:

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.50)$$

En donde $K_p \in R^{n \times n}$ es una matriz definida positiva y se denomina ganancia proporcional, $K_v \in R^{n \times n}$ es la ganancia derivativa y también es una matriz definida positiva, ambas definidas positivas, $\tilde{\mathbf{q}} \in R^n$ es el error de posición definido por la diferencia de la posición deseada $\mathbf{q}_d$ y la posición actual $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidad articular y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ el vector de compensación de fuerza gravitacional.

La familia de algoritmos de control generada por (3.50) es amplia, dado que produce un algoritmo de control diferente dependiendo del valor asignado a m .

2.- La ecuación de lazo cerrado se obtiene mediante la sustitución de la ley de control (3.50) dentro de la ecuación del modelo dinámico del robot (1.28), teniendo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

La existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [0^T \ 0^T]^T \in R^2$ de la ecuación de lazo cerrado (3.51) se demuestra mediante las siguientes consideraciones:

- f) En la ecuación de lazo cerrado se tiene $-\dot{\mathbf{q}} = -1\dot{\mathbf{q}} = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$.
- g) La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, existe su matriz inversa y también es definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} \in R_+$.
- h) Las ganancias K_p y K_v son matrices definidas positivas.
- i) Como $\dot{\mathbf{q}} = 0 \in R^n$ entonces $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \in R^{n \times n}$, de igual manera la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$.

j) La función de energía potencial $f_p(K_p, \tilde{q}) = 0$ si y sólo si $\tilde{q} = 0$.

Por lo tanto se demuestra que el punto de equilibrio existe y es único.

3.- Para el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación (3.51) en el sentido de Lyapunov, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \left[\begin{array}{c} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{array} \right]^T K_p \left[\begin{array}{c} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{array} \right] \quad (3.52)$$

4.- La función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ descrita por (3.52) es definida positive, porque el primer termino corresponde a la energía cinética, la cual definida positiva en función de $\dot{q}$, porque la matriz de inercia $M(q)$ es por definición definida positiva. El segundo termino es una función radialmente desacotada y definida positiva en función de $\tilde{q}$, tomando en cuenta que $K_p > 0$, y considerando que $\cosh(0) = 1$ se agrego el termino $\ln 2$ con la finalidad de que al evaluar la función candidata en $\tilde{q} = 0$ se tenga $V(\tilde{q}, \dot{q}) = V(0, 0) = 0$ y $V(\tilde{q}, \dot{q}) > 0$ si $\tilde{q} \neq 0$ y/o $\dot{q} \neq 0$, deducimos que $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es una función definida positiva y radialmente desacotada, con lo cual se cumple la primera condición de Lyapunov.

Para verificar el cumplimiento de la segunda condición, la cual establece que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov sea definida negativa $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) < 0$, procedemos ha obtener $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$.

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} (2\dot{q}^T M(q) \dot{q} + \dot{q} M(\dot{q}) \dot{q}) + \frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{array} \right]^T K_p \left[\begin{array}{c} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{array} \right] \quad (3.53)$$

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} +$$

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{array} \right]^T K_p \left[\begin{array}{c} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \dot{\tilde{q}}_1}{2 \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} (1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n) \dot{\tilde{q}}_n}{2 \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} (1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{array} \right] +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \dot{\tilde{q}}_1}{2\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n) \dot{\tilde{q}}_n}{2\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

El valor de la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$, lo tomamos de la ecuación de lazo cerrado (3.51), y considerando que los términos tercero y cuarto son iguales debido a la propiedad del producto interno entre vectores tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} +$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \dot{\tilde{q}}_1}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n) \dot{\tilde{q}}_n}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Desarrollando las operaciones indicadas y considerando de igual manera que de la ecuación de lazo cerrado se desprende el hecho de que $\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}$ debido a que la posición deseada $\mathbf{q}_d$ es constante, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & \dot{\mathbf{q}}^T K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \\ & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))-\ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

En donde agrupando los términos tercero y quinto tenemos la propiedad de antisimetría de la matriz de inercia establecida en la ecuación (3.17),

$$-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (3.57)$$

Estableciendo $w = \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))-\ln 2}$, la cual se introduce en el sexto término de la ecuación (3.20), este puede ser reescrito en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{w_1(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{w_n(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{w_1(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{w_n(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.58)$$

Considerando que K_p es una matriz diagonal y tomando en cuenta que el producto entre matrices diagonales es conmutativo tenemos:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{w_1(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{w_n(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.59)$$

En consecuencia:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_1)) - \ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\ln(1+\cosh^m(\tilde{q}_n)) - \ln 2(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.60)$$

Sustituyendo (3.60) y (3.57) en (3.56) tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{(1+\cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.61)$$

Considerando la propiedad establecido en las ecuaciones (3.46)-(3.49) y considerando nuevamente la propiedad del producto interno entre vectores tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.62)$$

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (3.63)$$

Como $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$, se tiene que la derivada de la función propuesta es semidefinida negativa, y como $\dot{\mathbf{q}}^T K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} > 0$ es una función disipativa, solo podemos demostrar que el punto de equilibrio posee estabilidad global.

Para demostrar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio se aplica el principio de invariancia de LaSalle.

Definimos Ω como:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in R^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\},$$

$$\Omega = \{\tilde{q} \in R^n, \dot{q} = 0 \in R^n\}.$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si $\dot{q} = 0$ y $\tilde{q}$ puede ser cualquier escalar. Con lo cual la solución $[\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in R^2$ de la ecuación de lazo cerrado (3.51) pertenece a Ω si $\dot{q}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Considerando que $K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^m(\tilde{q})} = 0$ sólo si $\tilde{q} = 0$, entonces el máximo conjunto de invariantes posible en Ω es $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T = [0, 0]^T \in R^2$.

Como $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es definida positiva con un único mínimo en $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T = 0 \in R^2$, por ende el origen es el único conjunto de invariantes que está en Ω , mediante los argumentos anteriores se concluye que el origen del espacio estado es asintóticamente estable en forma global.

3.2.3 Familia 3

1.- Primeramente se establece el modelo dinámico del robot, el cual en este caso es el establecido por la ecuación (1.28)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) - B\dot{q} = \tau$$

Posteriormente se busca una función cuya gráfica de comportamiento se semeje al de la figura 3.2, para lo cual se empleó el programa Matcad (ver figura 3.5),

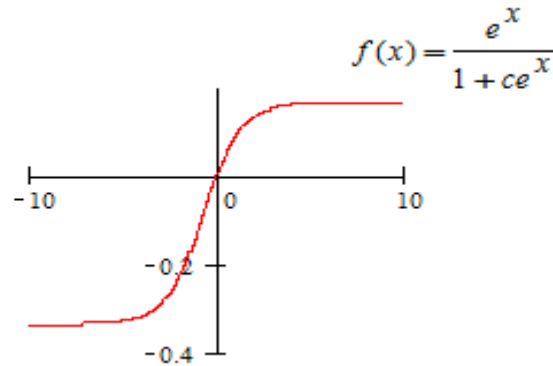


Figura 3.5 Forma de la gráfica de la función $f(x)$ con término exponencial.

En donde la función $f(x) = \frac{e^x}{1+\gamma e^x}$. $f(x)$ es una función diferenciable, monótonamente creciente y acotada. La $f(x)$ será implementada en (3.2), para la obtención de la familia de algoritmos de control; por lo tanto tenemos:

$$\mathbf{f}_P(\tilde{\mathbf{q}}) = e^{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{q}_1} \\ \vdots \\ e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\nabla \mathbf{f}_P(\tilde{\mathbf{q}}) = e^{\tilde{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{q}_1} \\ \vdots \\ e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{f}_P(\dot{\mathbf{q}}) = e^{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} e^{\dot{q}_1} \\ \vdots \\ e^{\dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\nabla \mathbf{f}_P(\dot{\mathbf{q}}) = e^{\dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} e^{\dot{q}_1} \\ \vdots \\ e^{\dot{q}_n} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Asignando el valor de 1 al índice de la raíz, y al sustituir las ecuaciones (3.64)-(3.67) en (3.2), para obtener la nueva familia de algoritmos de control, obtenemos:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \left(\frac{e^{\tilde{\mathbf{q}}}}{1+\gamma e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{\mathbf{q}}}}{1+\gamma e^{\dot{\mathbf{q}}}} \right) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.68)$$

En la ecuación (3.68), γ corresponde a una constante positiva, la cual puede tener cualquier valor, K_p y K_v corresponden a las matrices de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente, ambas definidas positivas, $\tilde{\mathbf{q}}$ el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$; $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidad articular y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ el vector de compensación de fuerza gravitacional.

2.- La ecuación de lazo cerrado en términos de las variables de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in R^{2n}$ queda expresada como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \left(\frac{e^{\tilde{\mathbf{q}}}}{1+\alpha_1 e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{\mathbf{q}}}}{1+\alpha_2 e^{\dot{\mathbf{q}}}} \right) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

La existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [0^T \ 0^T]^T$ de la ecuación de lazo cerrado (3.69) se demuestra mediante las siguientes consideraciones:

- a) En la ecuación de lazo cerrado se tiene $-\dot{\mathbf{q}} = -I\dot{\mathbf{q}} = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$ dado que la matriz identidad $I \in R^{2n}$.

- b) La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, existe su matriz inversa y también es definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} \in R_+$.
- c) Las ganancias K_p y K_v son matrices definidas positivas.
- d) Como $\dot{\mathbf{q}} = 0 \in R^n$ entonces $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \in R^{n \times n}$, de igual manera la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$.
- e) La función de energía potencial $f_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0$ si y sólo si $\tilde{\mathbf{q}} = 0$.

En consecuencia queda demostrada la existencia y unicidad del punto de equilibrio.

3.- Para el análisis de estabilidad del punto de equilibrio se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})} \right] \quad (3.70)$$

4.- La función es definida positive, porque el primer termino corresponde a la energía cinética, la cual definida positiva en función de $\dot{\mathbf{q}}$, porque la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es por definición definida positiva. El segundo termino es una función radialmente desacotada y definida positiva en función de $\tilde{\mathbf{q}}$, por lo tanto podemos deducir que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva y radialmente desacotada, con lo cual se cumple la primera condición de Lyapunov.

Para el verificar el cumplimiento de la segunda condición de que la derivada de la función candidata propuesta de Lyapunov sea definida negativa $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$, procedemos a realizar la derivada correspondiente de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (2 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} M(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}}) \right)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}}) \right)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) \right]^T K_p \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})} \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Desarrollando las operaciones correspondientes tenemos:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (2 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} M(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}) + \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}})}} \left(\frac{\alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{1 + \alpha e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right) \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})}} \left(\frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) \right]^T K_p \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \frac{1}{2} (2 \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T M(\dot{q}) \dot{q}) + \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \\ & + \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + K c e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + 2 \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \quad (3.74)$$

El valor de la aceleración $\ddot{q}$, lo tomamos de la ecuación de lazo cerrado (3.69), por tanto sustituyendo en (3.74) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T M(q) \left(M(q)^{-1} \left[K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q} \right] + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right. \\ & \left. + 2 \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Desarrollando las operaciones correspondiente en el primer término resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - \dot{q}^T K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \dot{q}^T B \dot{q} \\ & + 2 \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\frac{1}{4} \frac{\alpha e^{\tilde{q}} \dot{\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

En donde agrupando los términos tercero y cuarto tenemos la propiedad de antisimetría de la matriz de inercia establecida en la ecuación (2.13), y considerando de igual manera que de la ecuación de lazo cerrado se desprende el hecho de que $\ddot{\tilde{q}} = -\dot{q}$.

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - \dot{q}^T K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}} \right) - \dot{q}^T B \dot{q} - \frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \left[\frac{e^{\tilde{q}} \dot{q}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} (1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right] \quad (3.77)$$

El cuarto término de la ecuación (3.74), puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$-\frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T K_p \begin{bmatrix} \frac{e^{\tilde{q}_1}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}_1})(1 + \alpha e^{\tilde{q}_1})}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\tilde{q}_n}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}_n})(1 + \alpha e^{\tilde{q}_n})}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{z} \quad (3.78)$$

Considerando que K_p es una matriz diagonal y tomando en cuenta que el producto entre matrices cuadradas es conmutativo tenemos:

$$\mathbf{z} = -\frac{\alpha}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}})} \right]^T \begin{bmatrix} \frac{e^{\tilde{q}_1}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}_1})(1 + \alpha e^{\tilde{q}_1})}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\tilde{q}_n}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln(1 + \alpha e^{\tilde{q}_n})(1 + \alpha e^{\tilde{q}_n})}} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.79)$$

Por lo tanto se simplifica (3.79) obtenemos:

$$\mathbf{z} = -\frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \frac{e^{\tilde{q}_1}}{(1 + \alpha e^{\tilde{q}_1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{e^{\tilde{q}_n}}{(1 + \alpha e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right)^T K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.80)$$

Sustituyendo (3.80) en la ecuación (3.77) resulta

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right)^T K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (3.81)$$

Si consideramos que el valor de la constante α es cualquier valor mayor a la unidad tal que $\left| \left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right)^T K_p \dot{\mathbf{q}} \right| = \left| \dot{\mathbf{q}}^T K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right) \right|$ entonces tendremos $\alpha = 2$, por lo tanto la ecuación 3.81 se reduce a:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + \alpha e^{\tilde{q}}}\right) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (3.82)$$

Considerando el hecho de que la función candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es globalmente definida positiva y su derivada temporal es una función semidefinida negativa, podemos concluir que el punto de equilibrio del sistema de lazo posee estabilidad global.

Finalmente mediante el uso del principio de invariancia de LaSalle, demostramos que el punto de equilibrio es global asintóticamente estable, de manera semejante a las dos familias anteriores. Definimos Ω como:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in R^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\},$$

$$\Omega = \{ \tilde{q} \in R^n, \dot{q} = 0 \in R^n, \}$$

El único invariante es $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T \in R^{2n}$. Con lo cual concluimos que el punto de equilibrio es global asintóticamente estable.

3.3 Pruebas Experimentales

De las familias de algoritmos de control obtenidas mediante la metodología propuesta, se obtuvo un algoritmo de control de cada una, para ser utilizados en la plataforma experimental, con la finalidad de verificar el desempeño de cada una de ellos en el control de posición.

En la primera familia cuya ley de control es (3.30):

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_1^2 + k_2}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{k_1 \tilde{q}_n^2 + k_2}} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{k_3 \dot{q}_1^2 + k_4}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{\sqrt{k_3 \dot{q}_n^2 + k_4}} \end{bmatrix} + g(q)$$

Se asigno valores a las constantes k_1, k_2, k_3, k_4 , de acuerdo a los criterios establecidos en el análisis de estabilidad; para lo cual los valores seleccionados para generar un algoritmo de control fueron de $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 1$, resultado la ley general de control

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + 1}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{\sqrt{\dot{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix} + g(q) \quad (3.83)$$

El cual es un regulador con una función racional (RFR), que puede ser expresado como:

$$\tau = K_p \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{q}^2 + 1}} \right] - K_v \left[\frac{\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}^2 + 1}} \right] + g(q) \quad (3.84)$$

Mediante diferentes pruebas experimentales se sintonizo las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v para cada una de las articulaciones del robot, teniendo finalmente los siguientes valores:

$$K_p = \begin{bmatrix} 1.7 & 0 & 0 \\ 0 & 8.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} Nm,$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0.6781 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.34 \end{bmatrix} Nm.$$

Para la segunda familia de controladores cuya ley general de control fue establecida en (3.50)

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^m(\tilde{q})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \cosh^m(\dot{q})} + g(q)$$

Se selecciona el valor del exponente m , con un valor de $m = 2$, y lo denominaremos regulador Cosh.

$$\tau = K_p \frac{\cosh(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} - K_v \frac{\cosh(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \cosh^2(\dot{q})} + g(q) \quad (3.84)$$

Se desarrollaron varias pruebas experimentales para sintonizar las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v para cada una de las articulaciones del robot, teniendo finalmente los siguientes valores:

$$K_p = \begin{bmatrix} 4.7 & 0 & 0 \\ 0 & 43.3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2 \end{bmatrix} Nm,$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.43 \end{bmatrix} Nm.$$

En la tercera familia correspondiente a la ley de control (3.68)

$$\tau = K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + K_c e^{\tilde{q}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1 + K_c e^{\dot{q}}} \right) + g(q)$$

Se selecciono un valor para la constante K_c de acuerdo a los criterios establecidos en el análisis de estabilidad de la misma, siendo en este caso $K_c = 2$, con lo que la ley de control que se usara en robot es:

$$\tau = K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1 + 2e^{\tilde{q}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1 + 2e^{\dot{q}}} \right) + g(q) \quad (3.83)$$

El cual lo denominaremos regulador exponencial (RE), Con el RE se desarrollaron múltiples experimentos para poder realizar una sintonización adecuada de las ganancias proporcionales K_p y derivativas K_v , las cuales fueron:

$$K_p = \begin{bmatrix} 3.1 & 0 & 0 \\ 0 & 39.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9 \end{bmatrix} Nm,$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix} Nm.$$

El tiempo de duración de las pruebas experimentales se estableció en 5 segundos. De acuerdo a la configuración de la plataforma experimental, se establecieron las siguientes posiciones articulares iniciales:

Base $q_1(0) = 0$ Grados,

Hombro $q_2(0) = 0$ Grados,

Brazo $q_3(0) = 0$ Grados.

La posición final deseada para cada articulación es:

Base $q_{d1} = 45$ Grados,

Hombro $q_{d2} = 45$ Grados,

Brazo $q_{d3} = 90$ Grados.

De las pruebas experimentales, se obtuvieron como resultado seis archivos de datos, los tres primeros corresponden a la posición articular del robot Base $\tilde{q}_1$, Hombro $\tilde{q}_2$ y brazo $\tilde{q}_3$, los datos de la posición articular se grabaron con un intervalo de tiempo de 2.5 milisegundos, iniciando en un tiempo $t = 0$ y concluyendo en $t = 5$ segundos; los otros tres archivos de datos corresponden al torque aplicado por los servomotores de transmisión directa, para la Base τ_1 , Hombro τ_2 y brazo τ_3 , de igual manera las lecturas se grabaron cada 2.5 milisegundos.

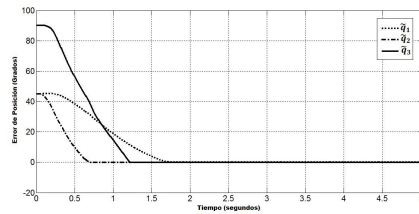
Los experimentos se realizaron para diferentes configuraciones de la plataforma experimental, pero una vez sintonizados los valores de las ganancias proporcional K_p y

derivativa K_v , estas se mantuvieron constantes al variar la configuración; de igual manera la posición inicial se mantiene constante.

Los experimentos se realizaron para dos configuraciones diferentes de la plataforma experimental, siendo los valores articulares deseado los mostrados en la tabla 3.1.

	q_d en Grados	q_d en Grados
Base	45	90
Hombro	45	90
Brazo	90	135

Tabla 3.1 Posiciones articulares para los experimento



Capítulo 4.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

El desarrollo de los experimentos realizados nos proporciono para cada una de las tres configuraciones dadas de la plataforma experimental seis archivos, los cuales se grafican para poder identificar el comportamiento de cada algoritmo en el control de posición.

4.1 Regulador con una función racional (RFR)

Para la primera configuración correspondiente a $q_{d1} = 45$ grados, $q_{d2} = 45$ grados, $q_{d3} = 90$ grados, con el algoritmo de control $\tau = K_p \left[\frac{\ddot{q}}{\sqrt{\ddot{q}^2 + 1}} \right] - K_v \left[\frac{\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}^2 + 1}} \right] + g(q)$, el cual es un regulador con una función racional (RFR). Los resultados obtenidos de los experimentos respecto del error de posición y del torque aplicado se presentan en las figuras 4.1 y 4.2.

En la figura 4.1 se observa como converge el error de posición hacia cero, sin embargo al final del experimento no ha llegado aún a él. El tiempo de respuesta del robot para alcanzar un valor menor a un grado en el error de posición es inferior a 1.5 segundos $\tilde{q}_1(t = 1.445009)$, $\tilde{q}_2(t = 0.552500)$, $\tilde{q}_3(t = 1.265005)$.

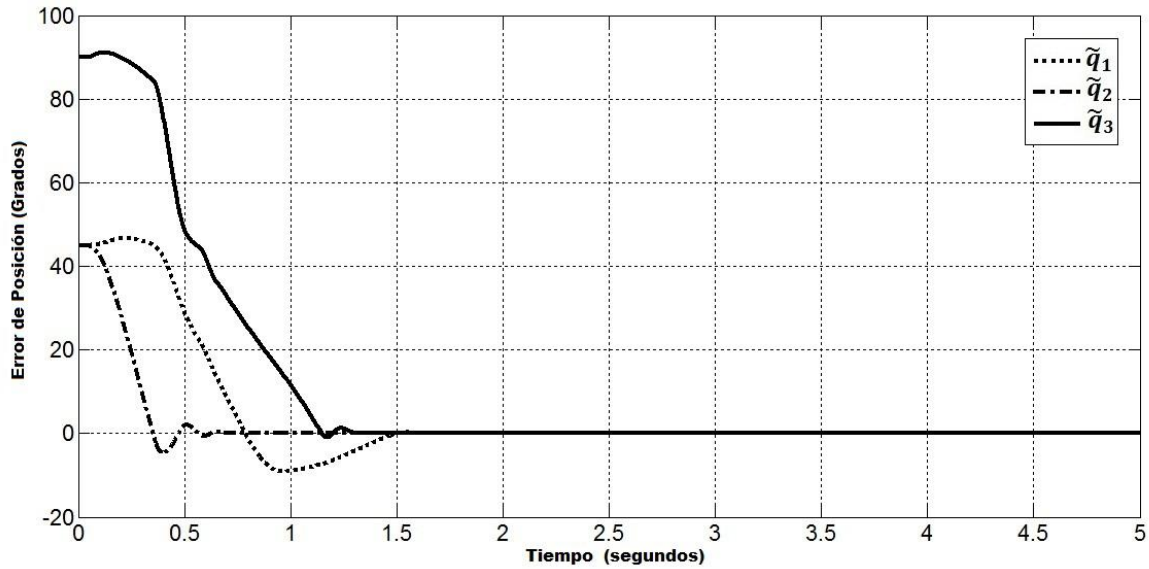


Figura 4.1 Error de posición del robot manipulador al usar el RFR.

El error de posición presenta oscilaciones (sobretiros), lo que representa un problema, debido a que en el control de posición es deseable que la convergencia a la posición deseada sea en un solo movimiento y sin oscilaciones, debido a que el robot no debe tener interacción alguna con su medio ambiente de trabajo; sin embargo, los valores del error de posición tienden a mantenerse aproximadamente estables a partir de 1.5 segundos, el cual es tiempo corto de respuesta.

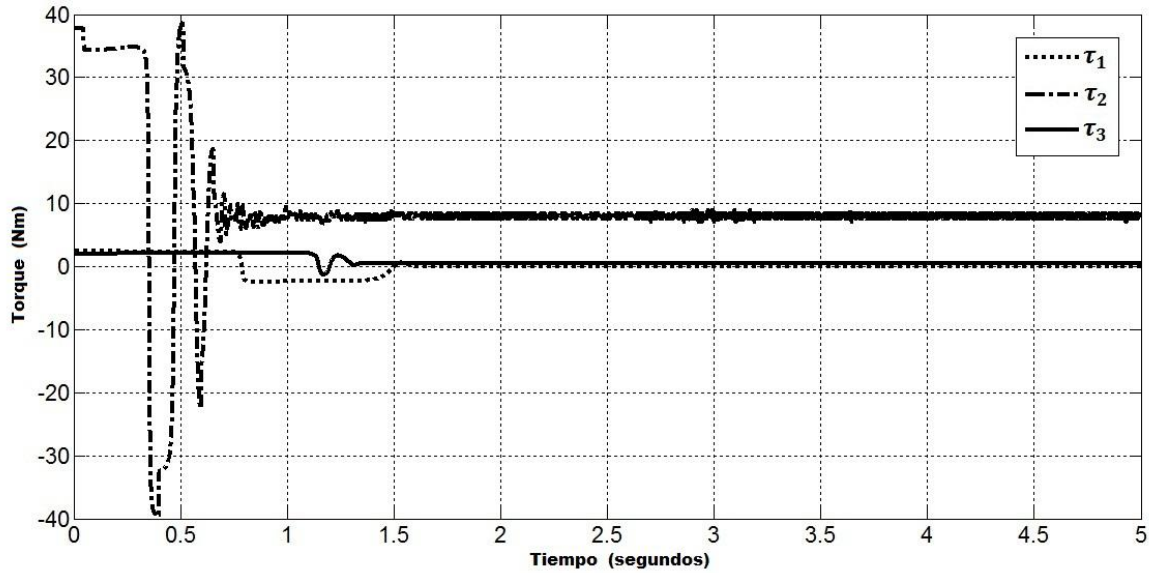


Figura 4.2 Torque Aplicado a las Articulaciones del robot mediante el RFR.

Los valores del par aplicado que se muestran en la figura 4.2, presentan oscilaciones pequeñas, a excepción del torque aplicado en τ_2 , mismo que presenta un valor alto al inicio de $\tau_2 = 37.75487$ Nm, lo cual es debido a que corresponde al hombro, debido a que tiene que cargar el peso del servomotor tres y de los eslabones dos y tres, lo que demanda un torque más alto, causando las oscilaciones que se observan en la grafica al inicio del movimiento. Los torques τ_1 y τ_3 , presentan un comportamiento con oscilaciones ligeras, debido a que la carga que mueven es menor, hasta casi estabilizarse al llegar a los 1.6 segundos, lo que es correspondiente con la convergencia de la posición del robot a la posición deseada.

En la tabla 4.1 se presentan los valores iniciales y finales tanto del error de posición de los pares aplicados por cada servomotor a las articulaciones del robot.

$\tau = K_p \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{q}^2 + 1}} \right] - K_v \left[\frac{\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}^2 + 1}} \right] + g(q)$		
	Posición Inicial (t=0s)	Posición Final (t=5s)
$\tilde{q}_1$	45 Grados	0.023621 Grados
$\tilde{q}_2$	45 Grados	0.192657 Grados
$\tilde{q}_3$	90 Grados	0.159302 Grados
τ_1	2.449395 Nm	0.057854 Nm
τ_2	37.75487 Nm	8.493885 Nm
τ_3	1.999876 Nm	0.463189 Nm

Tabla 4.1 Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al RFR.

4.2 Regulador Cosh

El segundo algoritmo de control con el que se realizaron los experimentos fue $\tau = K_p \frac{\cosh(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} - K_v \frac{\cosh(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \cosh^2(\dot{q})} + g(q)$, cuyos resultados se graficaron en función del error de posición y del torque solicitado por el regulador a los servo actuadores de las articulaciones de la plataforma experimental; tales resultados se presentan en las gráficas 4.3 y 4.4.

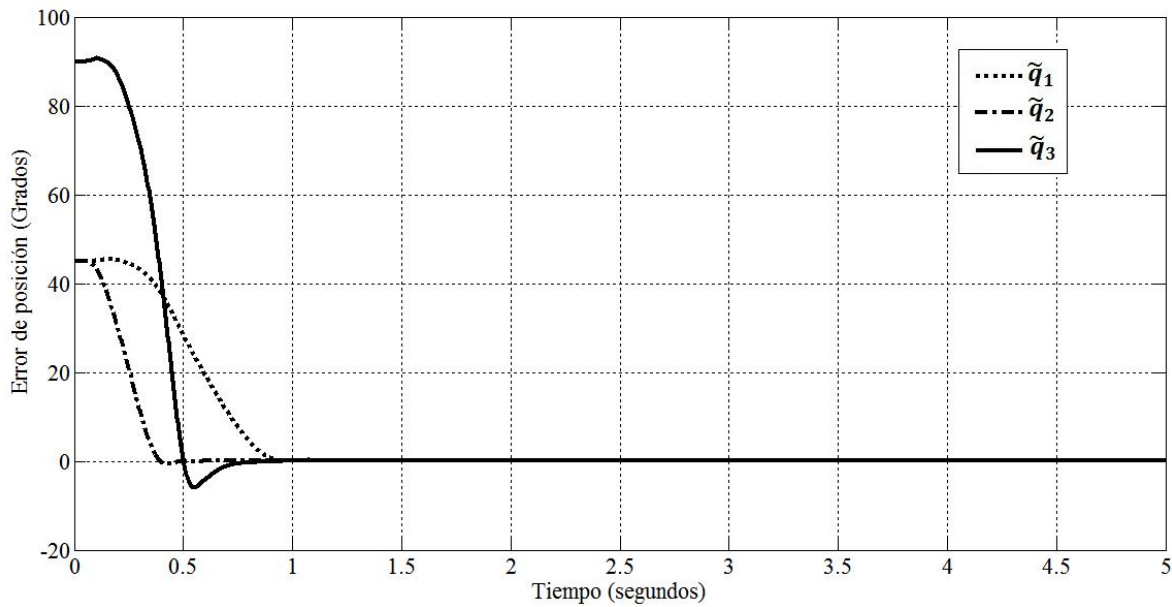


Figura 4.3 Error de Posición del Robot Manipulador con el regulador Cosh.

La figura 4.3 muestra la convergencia del error de posición a cero; sin embargo al final del experimento aun presenta un error de posición articular de 0.0967 grados. El tiempo de respuesta del robot para alcanzar un valor menor a un grado en el error de posición es inferior a 1 segundo en las tres posiciones articulares. El error de posición presenta pequeñas oscilaciones, dado que el regulador trata de llevar al robot a la posición deseada; sin embargo, los valores del error de posición tienden a mantenerse aproximadamente estables a partir de 1 segundo, el cual es buen tiempo de respuesta.

El torque aplicado por los servo actuadores se muestra en la figura 4.4. Se puede observar que en los primeros instantes del movimiento el valor del torque aplicado es alto, pero inferior al valor del límite máximo que es capaz de suministrar cada servo actuador. Como se puede apreciar las oscilaciones del corresponden con las oscilaciones del error

de posición, posteriormente el torque permanece casi constante aunque presenta ligeras oscilaciones, lo que indica que está tratando de llevar el robot a la posición articular deseada.

En la tabla 4.2 se presentan los valores iniciales y finales tanto del error de posición como de los pares aplicados por cada servomotor a las articulaciones del robot.

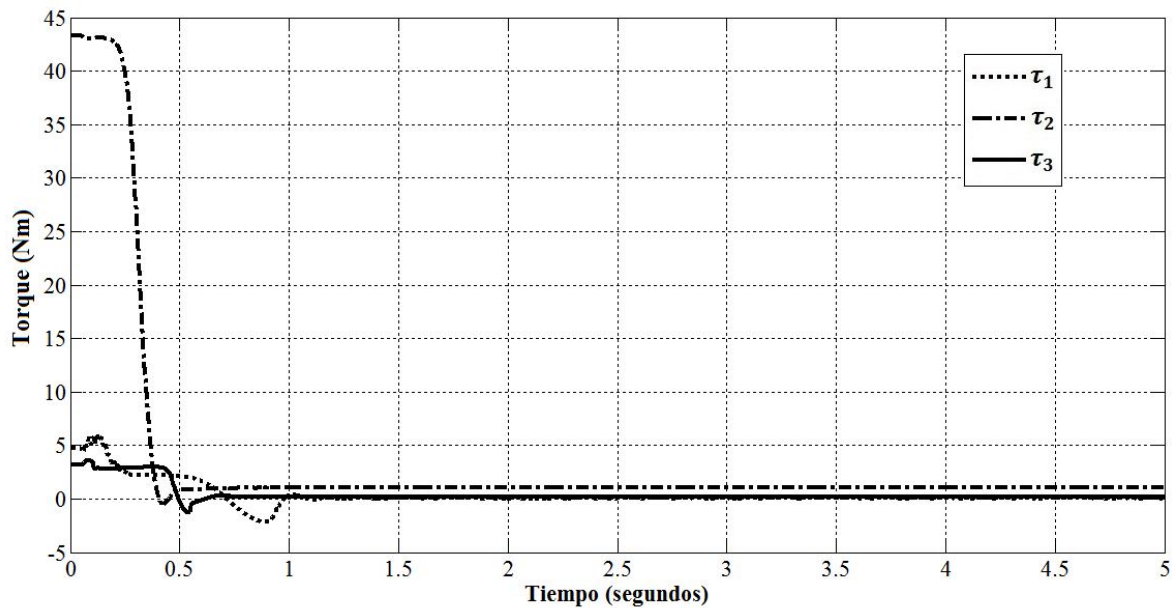


Figura 4.4 Torque aplicado en las articulaciones del robot por el regulador Cosh.

$\tau = K_p \frac{\cosh(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} - K_v \frac{\cosh(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \cosh^2(\dot{q})} + g(q)$		
	Posición Inicial (t=0s)	Posición Final (t=5s)
$\tilde{q}_1$	45 Grados	-0.03076 Grados
$\tilde{q}_2$	45 Grados	0.214455 Grados
$\tilde{q}_3$	90 Grados	0.044495 Grados
τ_1	2.5 Nm	0.82 Nm
τ_2	36.0 Nm	6.39 0388 Nm
τ_3	2.5 Nm	0.7527898 Nm

Tabla 4.2 Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al Cosh.

4.3 Regulador exponencial (RE)

El tercer regulador $\tau = K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1+2e^{\tilde{q}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\dot{q}}}{1+2e^{\dot{q}}} \right) + g(q)$ también fue probado con la configuración $q_{d1} = 45$ grados, $q_{d2} = 45$ grados, $q_{d3} = 90$ grados, y con duración de los experimentos de 5 segundos. Los resultados obtenidos se plasmaron en las graficas del

error de posición y torque aplicado a las articulaciones del robot, las mencionadas graficas corresponden a las figuras 4.5 y 4.6 respectivamente.

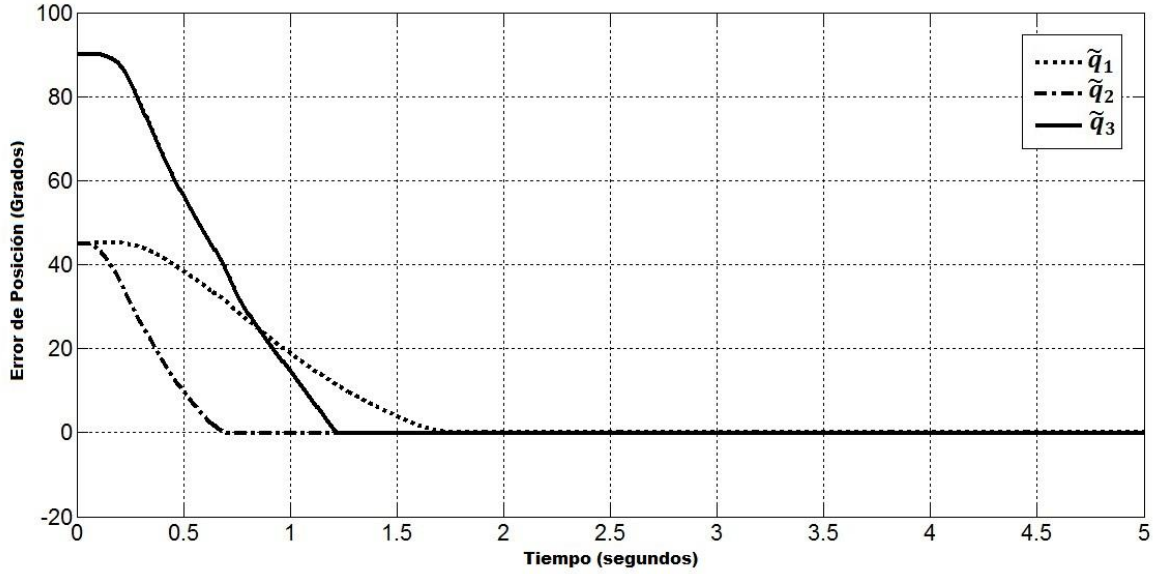


Figura 4.5 Error de posición del robot manipulador con el RE.

La Figura 4.5 muestra cómo evolucionan el error de posición durante el tiempo que dura el experimento, en donde podemos observar en primera instancia que las posiciones articulares del robot q_1 , q_2 y q_3 tienden a la posición deseada, aunque la rapidez con la cual lo hacen es diferente, alcanzando un error menor aun grado en un tiempo de $\tilde{q}_1(t = 1.655014)$, $\tilde{q}_2(t = 0.664999)$, $\tilde{q}_3(t = 1.205004)$, lo que permite apreciar en buena medida la rapidez de respuesta del robot respecto del algoritmo empleado.

La figura 4.6 presenta los torque aplicados por los servo actuadores en cada una de las articulaciones del robot manipulador, Los valores del torque demandado por el algoritmo de control a cada uno de los servo actuadores durante los primeros instantes del movimiento se encuentran dentro del rango de operación de los mismos (ver tabla 2.1), por lo que el algoritmo de control aplicado es de un esquema de control con acciones acotadas, lo que implica que los servomotores siempre trabajaran en la región lineal y no presentará vibración mecánica.

Podemos observar de igual manera en la figura 4.6, que se presentan ligeras oscilaciones en el valor del torque aplicado a las articulaciones, las cuales se mantiene al redor de un cierto valor($\tau_1 = 1.044114 \pm 0.320714\text{Nm}$; $\tau_2 = 12.74947 \pm 0.0665\text{ Nm}$; $\tau_3 = 0.83675 \pm 0.405\text{ Nm}$)

lo cual es debido a que mantiene la aplicación del torque para mantener la posición y segundo porque está tratando de alcanzar la posición deseada, tal condición se mantiene hasta el final del experimento.

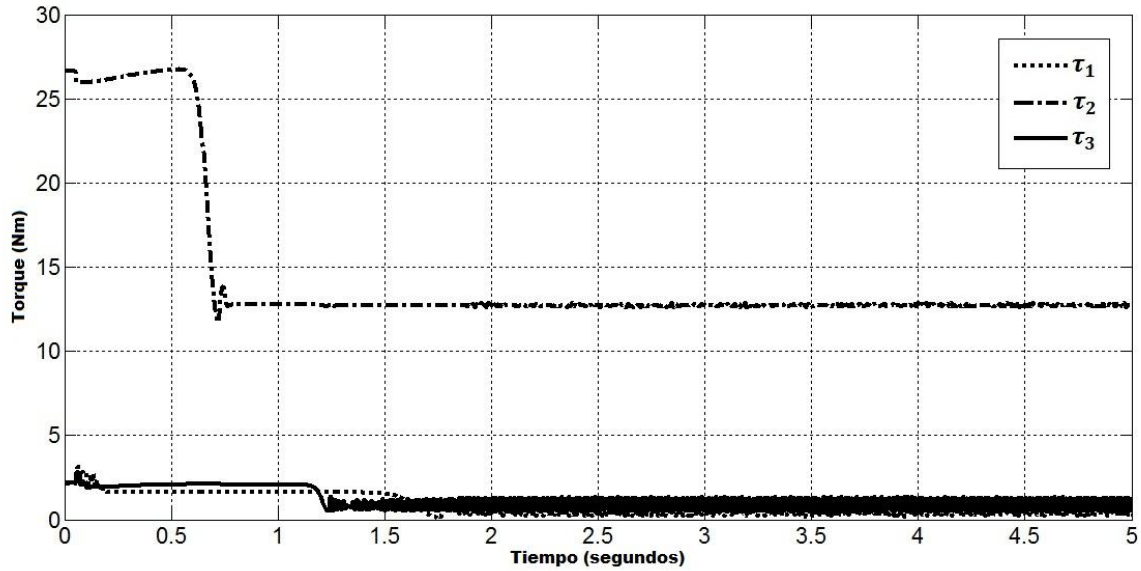


Figura 4.6 Torque aplicado al robot manipulador con el RE.

En la tabla 4.3 se presentan los valores finales del error de posición de cada articulación y el valor del par aplicado al cabo de 5 segundos.

$\tau = K_p \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1+2e^{\tilde{q}}} \right) - K_v \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{1+2e^{\tilde{q}}} \right) + g(q)$		
	Posición Inicial (t=0s)	Posición Final (t=5s)
$\tilde{q}_1$	45 Grados	0.028564 Grados
$\tilde{q}_2$	45 Grados	0.572342 Grados
$\tilde{q}_3$	90 Grados	0.174683 Grados
τ_1	3.100000 Nm	1.044114 Nm
τ_2	39.500000 Nm	12.74947 Nm
τ_3	2.900000 Nm	0.83675 Nm

Tabla 4.3 Valores finales del error de posición y del par aplicado RE.

De los resultados anteriores podemos observar que los tres algoritmos tienen la capacidad de llevar al robot a la posición deseada en general con un error de posición alrededor de unas decimas de grado, que los tiempos de respuesta del robot para ubicarse en las proximidades de la posición deseada es menor a 1.7 segundos, lo que resulta bastante conveniente.

Los valores de los torque se mantienen dentro de los límites de funcionamiento lineal de los servomotores(ver tabla 2.1), lo que permite un adecuado funcionamiento de los mismos; sin embargo, podemos observar que el valor final del torque en los tres casos no es cero, lo cual es debido a que el robot debe mantener posición deseada, para lo cual debe suministrar el valor del par requerido para contrarrestar las fuerzas gravitacionales que actúan sobre él.

Los resultados anteriores muestran un buen desempeño de los algoritmos de control obtenidos mediante la metodología propuesta, sin embargo con la finalidad de poder compararlo con respecto a uno ya existe, se eligió el PD, el cual es un controlador ampliamente conocido y estudiado.

4.3 Regulador PD.

El algoritmo de control empleado PD para la realización de las pruebas experimentales, se aplico a la misma plataforma experimental, bajo las mismas condiciones y se le solicitaron las mismas posiciones articulares que a los algoritmos analizados (RES, RSR1V).

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{q} + g(q) \quad (4.1)$$

De igual manera se realizaron diversas pruebas experimentales para poder sintonizar las matrices de las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v .

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.078 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix} Nm,$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} Nm.$$

La figura 4.7 presenta el error de posición del robot al emplear el controlador PD, en donde podemos observar como el robot al aproximarse a la posición deseada presenta un amplio sobretiro, también se puede apreciar que se ubica al finalizar el tiempo del experimento en una posición alejada varios grados de la posición deseada.

En comparación con los algoritmos RFR, Cosh y RE, el tiempo en el cual se ubica en las proximidades de la posición deseada, y en la que casi no presenta oscilaciones es más corto, de solo 1.202504 segundos, lo que representaría una mayor eficiencia en el tiempo de respuesta, pero no así en el error de posición, en donde como se puede observar es de varios grados respecto de la posición solicitada $\tilde{q}_1(t = 1.202504) = -0.77563$, $\tilde{q}_2(t = 0.450000) = 5.392265$, $\tilde{q}_3(t = 0.657499) = 4.468140$.

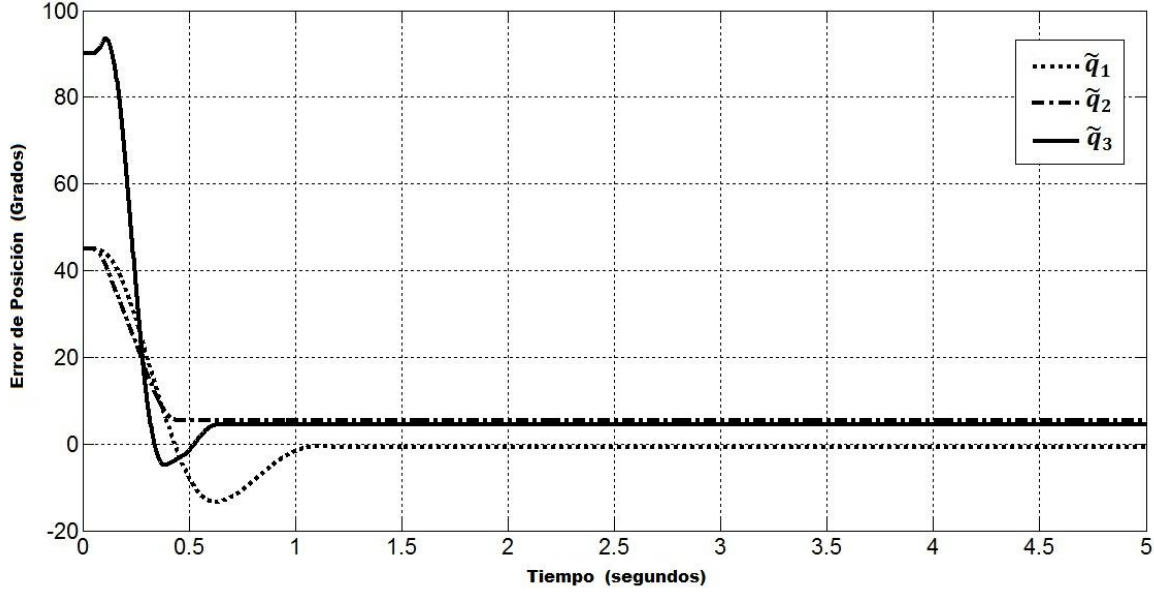


Figura 4.7 Error de posición del robot manipulador con el controlador PD.

Los valores del torque aplicado a cada una de las articulaciones del robot, se presentan en la figura 4.8. Los torques demandados por el control PD, en los primeros instantes del movimiento del robo son altos $\tau_1 = 18\text{Nm}$, $\tau_1 = 67.5\text{Nm}$, $\tau_3 = 9\text{Nm}$; tales valores son superiores a los que físicamente son capaces de proporcionar los servoactadores (ver tabla 2.1), lo que provoca que durante los primeros instantes de tiempo funcionen fuera del rango lineal y tengan que trabajar en condiciones de saturación, lo que implica que se presenten mayores fuerzas de fricción y ruido. Se presentan oscilaciones ligeras antes de ubicarse en las proximidades de la posición deseada; además mantiene un par constante aplicado, en las articulaciones lo que impide que el robot al paso del tiempo se ubique en la posición articular establecida.

La tabla 4.4 presenta un resumen de los pares aplicados por el controlador a las articulaciones del robot inicial ($t=0\text{s}$) y final($t=5\text{s}$), al igual que los errores de posición.

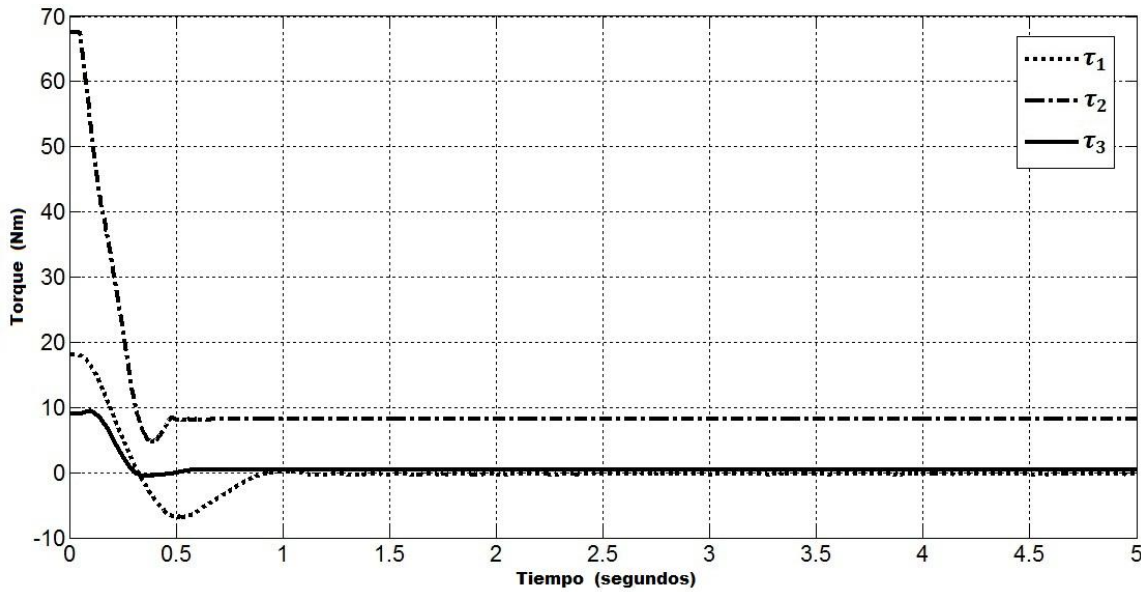


Figura 4.8 Torque aplicado a las articulaciones del robot mediante el controlador PD.

$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{q}$ q_d (Grados); $\tilde{q}$ (Grados); τ (Nm)		
	Posición Inicial (t=0s)	Posición Final (t=5s)
$\tilde{q}_1$	45 Grados	-0.73114 Grados
$\tilde{q}_2$	45 Grados	5.476994 Grados
$\tilde{q}_3$	90 Grados	4.467590 Grados
τ_1	18.00000 Nm	-0.29245 Nm
τ_2	67.50000 Nm	8.215490 Nm
τ_3	9.000000 Nm	0.446759 Nm

Tabla 4.4 Valores de $\tilde{q}$ y τ iniciales y finales del robot debido al PD.

El comportamiento fue semejante con las otras dos posiciones analizadas para los algoritmos de control RFR y RE, las graficas resultado de las pruebas experimentales $\tilde{q}$ y τ , se presentan en el anexo 1, junto con las tablas de los valores iniciales y finales del error de posición $\tilde{q}$ y del par aplicado τ en cada articulación.

4.4 Índice de desempeño.

Con la finalidad de poder establecer la robustez de los algoritmos de control RFR Cosh y RE, se hace una comparación de estos con el PD mediante la determinación del índice de desempeño de cada algoritmo, el cual se obtiene mediante la ecuación (2.24), expresada de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_2 [\tilde{q}] = \sqrt{\frac{1}{5} \int_0^5 \|\tilde{q}_1^2 + q_2^2 + q_3^2\| dt} \quad (4.2)$$

El resultado del índice de desempeño se evalúa considerando que el valor más alto corresponde al desempeño más pobre y que el valor más bajo en consecuencia es del que tiene el más alto desempeño.

Los resultados del índice de desempeño para los controladores en la posición deseada $q_{d1} = 45$, $q_{d2} = 45$, $q_{d3} = 90$, indican para el RFR de 0.08349 grados, para el controlador Cosh de 0.2182 grados y para RE de 0.13524 grados; mientras que para el PD de 0.23 grados. En la figura 4.9 se muestra la grafica de comparación de la evaluación de los algoritmos de control, en donde el valor de índice del PD es el más alto, al cual se le asigno el 100% y con esta referencia se calcula el de los otros controladores, siendo de 94.86 para el Cosh, de 56.88% para RE y del 35.11% para el RFR respecto del valor del PD.

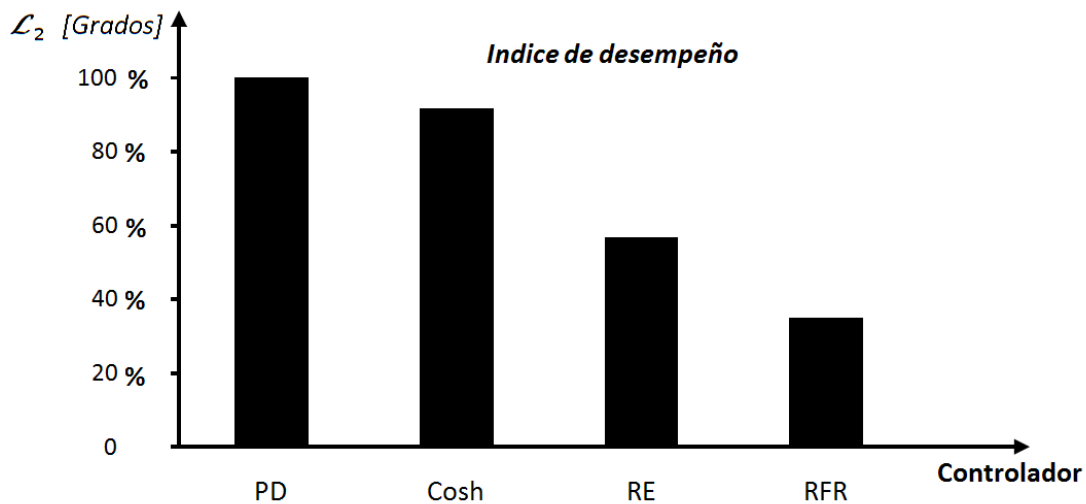


Figura 4.9 Índice de desempeño de los algoritmos de control Cosh, RE, RFR y PD.

El control PD es el que presenta el desempeño más bajo, mientras que los otros controladores mejoran la acción de control del PD de la siguiente forma: El cosh la mejora en un 5.14%, el RE en 43.12%, mientras que el mejor desempeño corresponde al RFR al mejorar la acción de control en un 64.89%. De lo anterior es claro que los controladores obtenidos mediante la metodología propuesta para la configuración dada tienen un desempeño superior al del control P.D.

En la tabla 4.5 se agrupan los valores finales de los errores de posición del robot manipulador al emplear los tres controladores; de igual manera se presentan los valores

de los pares solicitados suministrados por los servo actuadores al inicio y al final de los experimentos.

1°Configuración $q_{d1} = 45, q_{d2} = 45, q_{d3} = 90$ q_d (Grados); $\tilde{q}$ (Grados); τ (Nm)						
RE			RFR		PD	
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s
$\tilde{q}_1$	45	0.028564	45	0.023621	45	-0.73114
$\tilde{q}_2$	45	0.572342	45	0.192657	45	5.476994
$\tilde{q}_3$	90	0.174683	90	0.159302	90	4.467590
τ_1	3.100000	1.044114	2.449395	0.057854	18.00000	-0.29245
τ_2	39.50000	7.268615	37.75487	8.493885	67.50000	8.215490
τ_3	2.900000	-0.45675	1.999876	0.463189	9.000000	0.446759
2°Configuración $q_{d1} = 90, q_{d2} = 90, q_{d3} = 135$						
RE			RFR		PD	
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s
$\tilde{q}_1$	90	0.088989	90	-0.02856	90	-0.22467
$\tilde{q}_2$	90	1.046951	90	0.483749	90	20.11254
$\tilde{q}_3$	135	-0.25927	135	-0.26806	135	3.362366
τ_1	3.100000	1.107552	2.349855	-0.06709	11.25000	-0.02808
τ_2	39.50000	18.71917	39.49756	18.10664	54.00000	12.06752
τ_3	3.200000	-1.39914	2.153941	-0.69593	5.400033	0.134495
1°Configuración $q_{d1} = 45, q_{d2} = 45, q_{d3} = 90$						
Cosh			PD			
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s		
$\tilde{q}_1$	45	-0.03076	45	-0.73114		
$\tilde{q}_2$	45	0.214455	45	5.476994		
$\tilde{q}_3$	90	0.044495	90	4.467590		
τ_1	2.5	0.82	18.00000	-0.29245		
τ_2	36.0	6.39 0388	67.50000	8.215490		
τ_3	2.5	0.7527898	9.000000	0.446759		
2°Configuración $q_{d1} = 90, q_{d2} = 90, q_{d3} = 135$						
Cosh			PD			
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s		
$\tilde{q}_1$	90	0.049438	90	-0.22467		
$\tilde{q}_2$	90	0.553711	90	20.11254		
$\tilde{q}_3$	135	0.032959	135	3.362366		
τ_1	2.531009	-0.45344	11.25000	-0.02808		
τ_2	34.69931	19.14768	54.00000	12.06752		
τ_3	2.326962	0.469116	5.400033	0.134495		

Tabla 4.5 Errores de posición y pares aplicados por los controladores al robot manipulador en dos diferentes configuraciones.

El análisis correspondiente a la segunda configuración $q_{d1} = 90, q_{d2} = 90, q_{d3} = 135$, y de otras adicionalmente analizadas ($q_{d1} = 135, q_{d2} = -45, q_{d3} = 110$; $q_{d1} = 45, q_{d2} = 135, q_{d3} = 180$) se presenta en el anexo de la tesis.

De los datos de la tabla 4.4, se desprende el hecho de que al variar la posición deseada, y mantener constantes los valores de las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v , los valores de los errores de posición se incrementan en unas decimas de grado para los controladores obtenidos por metodología propuesta; mientras que en el control PD es de varios grados, lo que ocasiona que su desempeño sea pésimo.

CONTRIBUCIONES ORIGINALES DE LA TESIS

En el área de control se contribuye con la solución del problema del control de posición mediante la propuesta de una metodología que permite el diseño de familias extensas de nuevos algoritmos de control para robots manipuladores, mediante el control con acciones acotadas, los cuales demuestran tener estabilidad asintótica global y un alto desempeño en el control de posición. Los algoritmos de control se construyen mediante funciones diferenciables y acotadas que permiten trabajar en la región lineal de los servo amplificadores empleados en los actuadores de los robots manipuladores de transmisión directa.

Se contribuye con el análisis y demostración de que la metodología propuesta puede ser utilizada para el diseño de familias extensas de algoritmos de control; de igual manera con la demostración de la existencia y unicidad del punto de equilibrio; así mismo, se realiza la demostración de la estabilidad asintótica global mediante el método directo de Lyapunov del punto de equilibrio.

Se contribuyo con el desarrollo de tres nuevas familias de algoritmos de control para el control de posición, en los cuales se desarrollo su análisis de estabilidad asintótica global y se desarrollaron pruebas experimentales en una plataforma experimental de tres gados de libertad diseñada exclusivamente para tal fin; demostrando que poseen un mejor desempeño en el control de posición que el controlador PD ampliamente conocido y utilizado como referencia para la comparación del desempeño de algoritmos de control..

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados del trabajo desarrollado demuestran que la metodología propuesta permite el diseño de extensas familias de algoritmos de control, para lo cual se deben seguir cuidadosamente cada uno de los pasos indicados.

Las familias de algoritmos que se diseñan con la metodología tienen la característica teórico-práctica de mantener la acción de control acotada dentro de los límites físicos de los servoamplificadores para suministrar el torque requerido por el controlador, es decir se considera el control con acciones acotadas de tal manera que el error de posición de cada una de las posiciones articulares del robot manipulador tienda siempre asintóticamente a cero, independientemente de la posición y de las condiciones iniciales en las que encuentre, tal como se puede apreciar en las figuras 4.2, 4.4 y 4.6, en donde los valores de los torque solicitados por los algoritmos de control siempre son menores a los torque máximos que puede suministrar los servoactuador a las diferentes articulaciones del robot, es decir $-\tau_{m\acute{a}x} < \tau_{solicitado} < \tau_{m\acute{a}x}$, según los datos establecido en la tabla 2.1.

Los algoritmos diseñados, demostraron mediante el análisis de estabilidad que les realizo que poseen estabilidad asintótica global, adicionalmente al ser implementados en la plataforma experimental de tres grados de libertad, y mediante la sintonía adecuada de las ganancias proporcional y derivativa, se pudo comprobar que el robot tiende hacia la posición deseada rápidamente, manteniendo errores posición pequeños; además de que al variar la posición deseada y mantener las mismas ganancias el error de posición de las articulaciones varía ligeramente, siendo ligeramente mayor o menor en algunos casos, lo cual se debe a las fuerzas de inercia y de fricción del sistema; sin embargo en todo momento el robot trata de llegar a la posición deseada, tal como se puede apreciar en las figuras 4.1, 4.3 y 4.5, al igual que en las figuras A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8 y A9 del anexo.

El uso de la norma $\mathcal{L}_2$, permitió demostrar que el desempeño de los algoritmos de control diseñados mediante la metodología propuesta tiene un alto desempeño en comparación

con el controlador PD, lo anterior quedo de manifiesto en la grafica de la figura 4.9, en donde el algoritmo exponencial (RE) mejora la acción de control sobre el robot en un 43.12% con respecto del PD; mientras que el algoritmo de control racional de una variable (RFR) mejora la acción de control en un 64.89% y el Cosh en un 5.14%. Si bien es cierto que el desempeño de los algoritmos de control diseñados no es el mismo y que el RFR es mejor que el RES y que el Cosh, esto se debe a las características de la función empleada para la construcción del algoritmo de control; sin embargo todos ellos comparten el hecho de que su desempeño es superior al del PD.

Seguir la metodología propuesta y la elección adecuada de la función de control permite garantizar que el controlador posea estabilidad asintótica; sin embargo eso no garantiza que su desempeño sea el mejor, por tal motivo se deben desarrollar pruebas experimentales que nos permitan valorar su desempeño.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Acosta, J.A. Panteley, E. and Ortega, R. "A new strict Lyapunov function for fully-actuated mechanical systems controlled by IDA-PBC". IEEE Control Applications, (CCA) & Intelligent Control, (ISIC), 2009 , Vol. 8, No.10, Jul. 2009, pp. 519-524.
 - [2] Alvarez-Ramirez Jose. Santibañez Victor and Campa Ricardo. "Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation" IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 16, No. 6, Nov. 2008, pp. 1333-1341.
 - [3] Arantxa Rentería Bilbao; María Rivas Ardisana "Robótica Industrial. Fundamentos Y Aplicaciones". McGraw-Hill. 2000.
 - [4] Baishun Liu, Fancai Lin, Bingli Tian. "A Set of Globally Stable N-PID Regulators for Robotic Manipulators". *Engineering*, 2010, pp. 118-123.
 - [5] Behera, L.; Kumar, S.; Patnaik, A. "On Adaptive Learning Rate That Guarantees Convergence in Feedforward Networks". Neural Networks, IEEE Transactions on Volume 17, Issue 5, Sept. 2006 pp.1116 – 1125.
 - [6] Ben Saoud, S. Gajski, D.D. Dorner, R. "Specification and validation of new control algorithms for electric drives using SpecC language". Systems, Man and Cybernetics, 2002 IEEE International Conference on Publication Date: 6-9 Oct. 2002 Volume: 5, On page(s): 6 pp. vol.5.
 - [7] Bouakrif, F.; Boukhetala, D.; Boudjema, F."Passivity-based controller-observer for robot manipulators". 3rd International Conference on Information and Communication Technologies: From Theory to Applications, Vol. 7, Issue 11 April 2008 pp. 1 – 5.
 - [8] Campa, R.; Camarillo, K.; Arias, L. "Kinematic Modeling and Control of Robot Manipulators via Unit Quaternions: Application to a Spherical Wrist". 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006. Vol.13, Issue 15, Dec. 2006 pp. 6474 – 6479.
 - [9] Campa, R.; Kelly, R.; Garcia, E. "n stability of the resolved acceleration control". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 4, Issue , 2001, pp. 3523 - 3528 vol.4.
 - [10] Cao, J.; Jun Wang "Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays". IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 50, Issue 1, Jan. 2003 pp. 34 – 44.
 - [11] Cao, Y.; Modi, V.J.; de Silva, C.W. "Neural network adaptive control of a deployable manipulator". Intelligent Control, 2002. Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Volume , Issue , 2002 pp. 240 – 245.
-

-
- [12] Chaillet, A.; Loria, A.; Kelly, R. "Robustness of PID-controlled manipulators with respect to external disturbances"., 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control. Vol.13, Issue 15, Dec. 2006 pp. 2949 – 2954.
- [13] Choi, Junho, Hong, Seonghun, Lee, Woosub, Kang, Sungchul, Kim, Munsang. "A Robot Joint With Variable Stiffness Using Leaf Springs". IEEE Transactions on Robotics. 2011, Vol. 27 Issue 2, pp. 229-238.
- [14] Cui Bowen; Yan Maode. "Variable structure adaptive controller for robot manipulator based on desired trajectory compensation".Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese Volume , Issue , 16-18 July 2008 pp. 394 – 397.
- [15] Dolores blanco, Salah al Ansari. Manfred: Robot antropomórfico de servicio fiable y seguro para operar en entornos humanos. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. 2005.Vol. 9, N.º 3, pp. 33-48.
- [16] Duchaine, V.; Gosselin, C.M. "Investigation of human-robot interaction stability using Lyapunov theory". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol.19 Issue 23 May. 2008 pp. 2189 – 2194.
- [17] Erika Ottaviano; Marco Ceccarelli and Manfred Husty. "Workspace Topologies of Industrial 3R Manipulators" International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 5, No. 2, Jun. 2008.
- [18] Herman, P.; Kozlowski, K. "Homogeneous set point control for serial manipulators in terms of normalized quasi-velocities".Robot Motion and Control, 2001 Proceedings of the Second International Workshop on Volume , Issue , 2001 pp. 59 – 64.
- [19] Ishii, C.; Shen, S.; Qu, Z. "Lyapunov recursive design of robust tracking control with L2-gain performance for electrically-driven robot manipulators". Control Applications, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Volume 1, Issue , 1999 pp. 863 – 868.
- [20] Jafarov, E.M.; Parlakci, M.N.A.; Istefanopulos, Y. "A new variable structure PID-controller design for robot manipulators".IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 13, Issue 1, Jan. 2005 pp. 122 – 130.
- [21] Javier Moreno-Valenzuela, Víctor Santibáñez and Ricardo Campa. "A Class of OFT Controllers for Torque-Saturated Robot Manipulators: Lyapunov Stability and Experimental Evaluation" Journal of Intelligent and Robotic SystemsVolume 51, Number 1 / enero de 2008. pp. 65-88.
- [22] Jingyang Yuan; Chang-an Liu; Guixian Li. "Dynamics Coordinated Control Method of Multi-Arm Free-Flying Space Robot with External Force Acting". The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation, Vol.2, Issue , 21-23 Jun. 2006 pp. 8933 – 8937.
-

-
- [23] Karayiannidis, Y, and Doulgeri, Z. "Model-free robot joint position regulation and tracking with prescribed performance guarantees". *Robotics & Autonomous Systems*. 2012, Vol. 60 Issue 2, pp. 214-226.
- [24] Kasac Josip, Novakovic Branko, Majetic Dubravko and Brezak Danko. "Global positioning of robot manipulators with mixed revolute and prismatic joints". *Automatic Control, IEEE Transactions on* Volume 51, Issue 6, June 2006 pp. 1035 – 1040.
- [25] Kelly Rafael, "Global Positioning of Robot Manipulators via PD Control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions", *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 43, Issue 7, Jul. 1998. pp 934 - 938.
- [26] Kobuchi, Y.; Kawai, H. "Quasi-symmetric logic networks have Lyapunov functions". *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, Vol. 18, Issue 21 Nov 1991 pp. 1379 – 1384.
- [27] Kozlowski, K. Herman, P. "A new control algorithm in terms of normalized quasi-velocities with gravitational forces". *Robot Motion and Control*, 1999. RoMoCo '99. Proceedings of the First Workshop on Publication Date: 1999 On page(s): 95-100.
- [28] Kozlowski, K. "New robot control algorithms in terms of quasi-velocities". *American Control Conference*, 1998. Vol.21 No.26 Jun. 1998. pp. 21-25.
- [29] Leena G., K. B. Datta, G. Ray. A Class of Stabilizing PID Controllers for Position Control of Single-Link Robot. *International Journal of Control and Automation*. 2011. Vol. 4 No. 3, pp. 127-142.
- [30] Liu, Y.-C. Chopra, N. Control of Robotic Manipulators Under Input/Output Communication Delays: Theory and Experiments, *Robotics, IEEE Transactions on*, 2012, pp.1-10.
- [31] Lorenzo Sciavicco, Bruno Siciliano, "Modeling and control of robot manipulators", McGraw-Hill. 1996.
- [32] Mark W. Spong, Seth H. Hutchinson, M. Vidyasagar, "Robot modeling and control". John Wiley & Sons. Inc. 2006.
- [33] Maxime Gautier. "A comparison of filtered models for dynamic identification of robots" 35th Conference on Decision and Control. Dec. 1996. pp.875-880.
- [34] Mazenc, F.; Bowong, S. "Tracking trajectories of feedforward systems" *Automatic Control, IEEE Transactions on*. Volume 47, Issue 8, Aug 2002 pp. 1338 – 1342.
- [35] Mazenc, F. Malisoff, M. "Strict Lyapunov Function Constructions Under LaSalle Conditions With an Application to Lotka-Volterra Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 55, Issue 4. Apr. 2010, pp.841-854.
-

-
- [36] Merchán-Cruz, E.A.; Urriolagoitia-Sosa, G.; Ramírez-Gordillo, J.; Rodríguez-Cañizo, R.; Campos-Padilla, I.Y.; Muñoz-César, J.J.; Lugo-González, E. "GA Based Trajectory Planner for Robot Manipulators Sharing a Common Workspace with Adaptive Population Size". Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, 2008. Sept. 2008, pp. 520 – 525.
- [37] Michael Malisoff † Frédéric Mazenc ‡ "Constructions of Strict Lyapunov Functions for Discrete Time and Hybrid Time-Varying Systems". Feb. 2008
- [38] M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators," *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 1981. Vol. 103, pp. 119–125.
- [39] Natalych, O. "Research of Stability of Non-Stationary Control Systems". International Conference Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications, and Computer Science, Feb. 2006. pp. 139-140.
- [40] Nesic, D.; Loria, A. "n uniform asymptotic stability of time-varying parameterized discrete-time cascades". *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 49, Issue 6, 2004 pp. 875 – 887.
- [41] Ordaz Oliver, J.P.; Dominguez Ramirez, O.A. "Global Regulation for Robotics Manipulators Based on Kinetic". Energy. Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference. Vol. 25, Issue 28, 2007 pp. 106 – 111.
- [42] Panjapornpo, C. Soroush, M and Seider, W.D. "Software for analytical nonlinear controller design," *IEEE American Control Conference*, 2006 Vol. 16 No. 16 pp.6-10.
- [43] Parra Vicente, Suguru Arimoto, Liu Yun-Hui, Hirzinger Gerhard and Akella Prasad. "Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 6, Dec. 2003. pp 967-976.
- [44] Reyes Cortes Fernando. "Robótica" Control de robots manipuladores. Alfaomega 2011.
- [45] Reyes Fernando and Kelly Rafael . "On Parameter Identification of Robot Manipulators" International Conference on Robotics and Automation Albuquerque. New Mexico -April 1997.pp.1910-1925
- [46] Reyes Fernando and Kelly Rafael . "Experimental Evaluation of Identification Schemes on a Direct Drive Robot" *Robotica* (1997) volume 15, pp 563-571.
- [47] Santibanez, V.; Kelly, R. "A class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators". *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 4, Issue 20 May. 1998, pp. 3601 - 3606.
-

-
- [48] Stasi, S.; Salvatore, L.; Milella, F. "Robust tracking control of robot manipulators via LKF-based estimator" IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 1999. Vol. 3, 1999. pp.117 – 1124.
- [49] Takahashi, K. Sasaki, M, "Remarks on tip angular position control of single-link flexible robot arm using modified Lyapunov function", International Conference on Mechatronics and Automation, Aug. 2010, pp.1024-1029.
- [50] Victor R. Gonzalez Fernandez. "Fundamentos de robotica". Universidad de Valladolid.2002.
- [51] Wisama Khalil, Pedro Pablo Restrepo. "An efficient algorithm for the calculation of the filtered dynamic model of robots". International Conference on Robotics and Automation. Apr. 1996. pp.323-328.
- [52] Wang Zhongli and Liu Yunhui. "Global asymptotic stabilization control of a lake surface cleaning robot". International Conference on Information and Automation, Jun. 2009. pp. 271-276
- [53] Xinyan Deng; Anderson, J."Extension of the partial state feedback approach to the control of robotic manipulators". Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory, Vol. Issue 8 Mar. 1998 pp. 297 – 301.
- [54] Yu, H.; Seneviratne, L.D.; Earles, S.W.E. "Exponentially stable robust control law for robot manipulators". IEEE Control Theory and Applications. Vol. 141, Issue 6, Nov 1994 pp. 389 – 395.
-

ANEXOS

La segunda configuración establecida con la que se realizaron las pruebas experimentales para analizar el desempeño de los algoritmos de control es:

$$q_{d1} = 90 \text{ grados}, q_{d2} = 90 \text{ grados}, q_{d3} = 135 \text{ grados}.$$

Los resultados correspondientes a los algoritmos de control RFR, Cosh, RE y del PD, se muestran en las graficas de las figuras A1-A4.

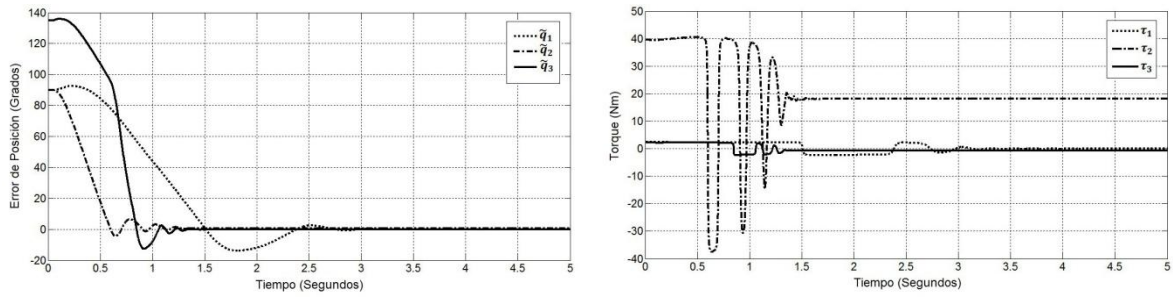


Figura A1. Grafica del controlador RFR $q_{d1} = 90\text{Grados}$, $q_{d2} = 90\text{Grados}$, $q_{d3} = 135\text{Grados}$.

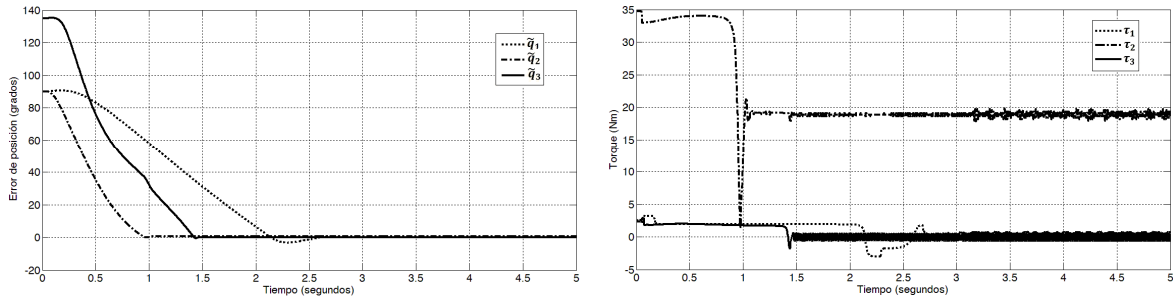


Figura A2. Graficas del controlador Cosh para $q_{d1} = 90\text{Grados}$, $q_{d2} = 90\text{Grado}$, $q_{d3} = 135\text{Grados}$.

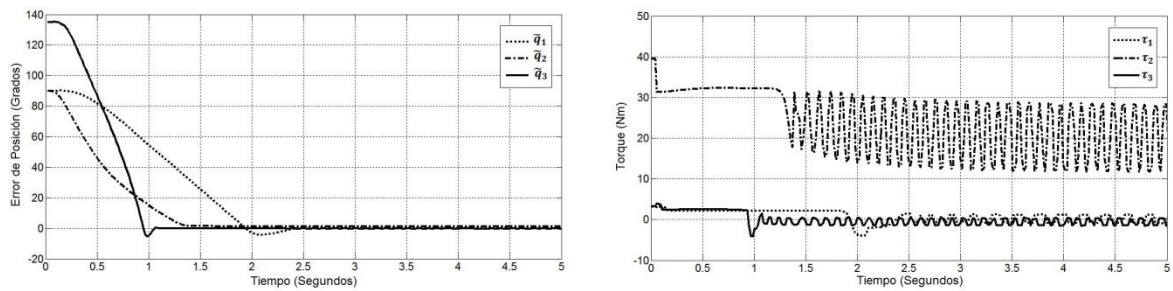


Figura A3. Graficas del controlador RE para $q_{d1} = 90\text{Grados}$, $q_{d2} = 90\text{Grado}$, $q_{d3} = 135\text{Grados}$.

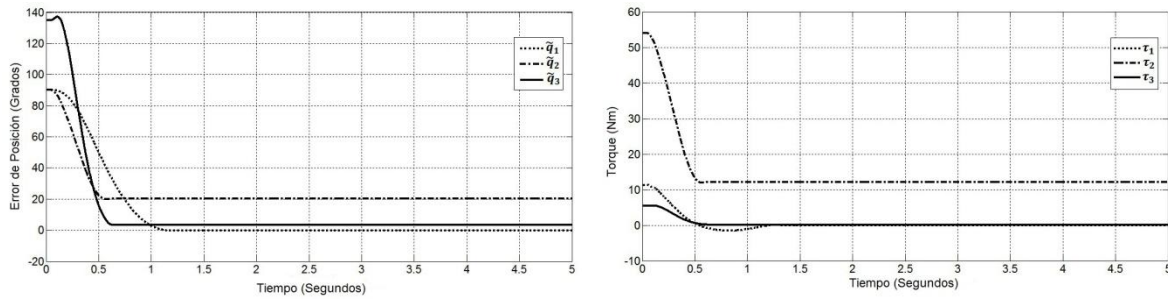


Figura A4. Grafica del controlador PD $q_{d1} = 90\text{Grados}$, $q_{d2} = 90\text{Grados}$, $q_{d3} = 135\text{Grados}$.

En las Figuras A1-A4, podemos observar una convergencia al valor deseado de los cuatro controladores; sin embargo el error de posición del Controlador PD (Figura A4), es mayor que el de los controladores RFR (Figura A1) Cosh (Figura A2) y RFR (Figura A3), aunque es importante destacar que el tiempo para posicionarse en la cercanía de la posición final es más largo que el del PD en los controladores RFR, Cosh y RE.

Los torques aplicados por los controladores RE, Cosh y RFR, mantienen el valor del torque dentro de los límites de funcionamiento lineal de los servo actuadores (Tabla 2.1), mientras que el PD solicita en los primeros instantes de funcionamiento un valor de torque superior a la capacidad física de los servo actuadores. Las graficas A2 y A3 muestran que los controladores Cosh y RE mantienen la demanda de un torque variable aunque el robot este muy próximo a la posición deseada q_d ; mientras que el PD mantiene la aplicación de un torque constate.

En la tabla A1 se presentan los valores finales del error de posición de cada articulación y el valor del par aplicado al cabo de 5 segundos.

$q_{d1} = 90, q_{d2} = 90, q_{d3} = 135$ q_d (Grados); $\tilde{q}$ (Grados); τ (Nm)								
RFR			Cosh		RE		PD	
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s
$\tilde{q}_1$	90	-0.02856	90	0.049438	90	0.088989	90	-0.22467
$\tilde{q}_2$	90	0.483749	90	0.553711	90	1.046951	90	20.11254
$\tilde{q}_3$	135	-0.26806	135	0.032959	135	-0.25927	135	3.362366
τ_1	2.349855	-0.06709	2.531009	-0.45344	3.100000	1.107552	11.25000	-0.02808
τ_2	39.49756	18.10664	34.69931	19.14768	39.50000	18.71917	54.00000	12.06752
τ_3	2.153941	-0.69593	2.326962	0.469116	3.200000	-1.39914	5.400033	0.134495

Tabla A1. Valores finales del error de posición y del par aplicado.

Los resultados del índice de desempeño para los controladores en la posición deseada $q_{d1} = 90$, $q_{d2} = 90$, $q_{d3} = 135$, indican para el RE de 0.4233 grados, para el controlador

RFR de 0.5248 grados, para el Cosh de 0.5535 grados; mientras que para el PD es 0.6265 grados. En la figura A5 se muestra la grafica de evaluación de los algoritmos de control, en donde el valor de índice de desempeño $\mathcal{L}_2$ del PD es el valor más alto, al cual se le asigno el 100% y con esta referencia se calcula el de los otros controladores, siendo de 83.76% para el Cosh, del 83.76% para RFR y de 67.57%. Concluimos que el controlador RE es el que presenta el mejor desempeño, seguido del RFR y finalmente el Cosh. La mejoría que se obtiene en el desempeño mediante el uso de los nuevos controladores es del 12.2% con el Cosh, de 16.24% con el RFR y de 32.43% con el RE; nuevamente los controladores obtenidos mediante la metodología propuesta tienen un mejor desempeño que el PD.

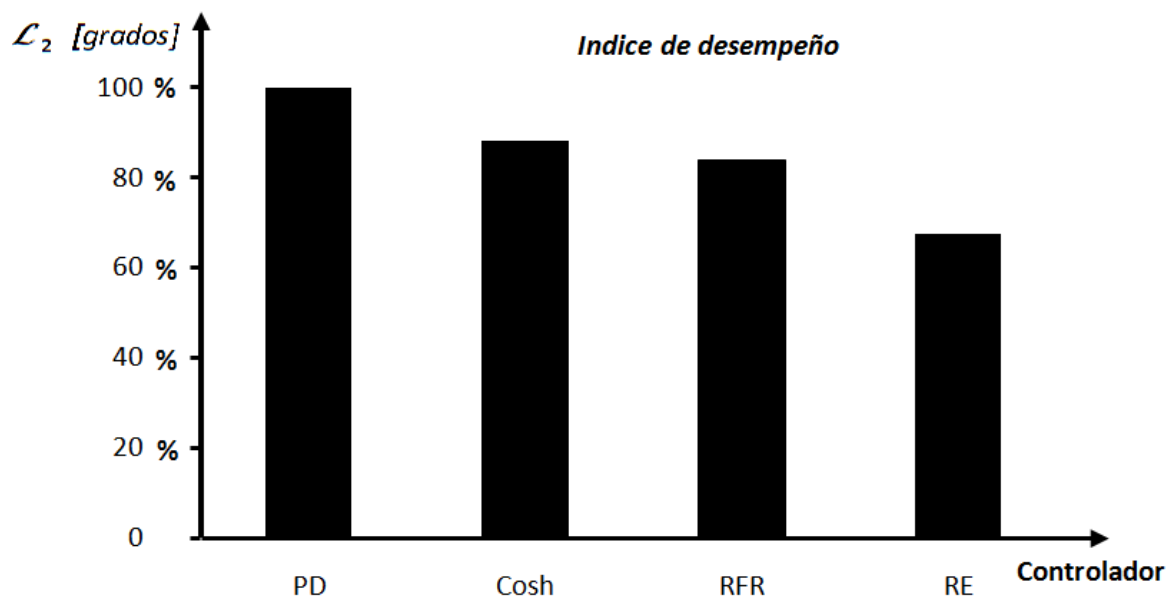


Figura A5. Desempeño de los algoritmos de control RES, RSR1V y PD para $q_{d1} = 90$, $q_{d2} = 90$, $q_{d3} = 135$.

Configuración $q_{d1} = 135$ Grados, $q_{d2} = -45$ Grados, $q_{d3} = 110$ Grados

La configuración se realiza para los controles RFR y PD, con la finalidad de ampliar la gama de posibilidades de análisis del desempeño de los controladores, como resultado de ella se tiene las Figuras A6-A8.

En la figura A6 se aprecia el despeamiento del Robot a la posición deseada, quedando el error de posición en un valor promedio de 0.198 grados para el RFR; mientras que según la figura A7, el promedio del error de posición final de PD fue de 3.6784 grados.

Nuevamente cabe destacar que el tiempo de convergencia del eslabón correspondiente a la base (1), tiene un periodo de tiempo más largo; es decir, se mueve más lentamente, aunque al final del tiempo del experimento tiene el error de posición más pequeño ($\tilde{q}_1 = 0.002747\text{Grados}$).

En referencia al valor de los pares solicitados por los controladores, se observa que ambos demandas valores de par dentro de los límites físicos de los servo actuadores, excepto el PD en el correspondiente al codo, para el cual demanda 9.35 Nm., cuyo valor está muy por encima de la valor de 4 Nm., que puede proporciona (ver tabla 2.1).

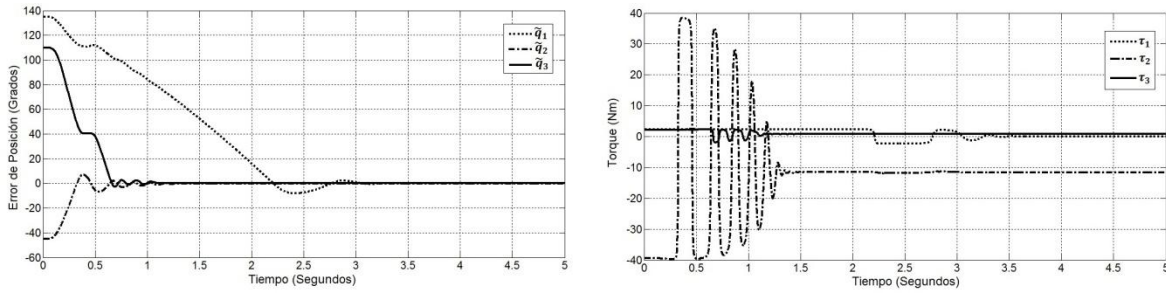


Figura A6. Graficas del controlador RFR $q_{d1} = 135\text{ Grados}$, $q_{d2} = -45\text{Grados}$, $q_{d3} = 110\text{Grados}$.

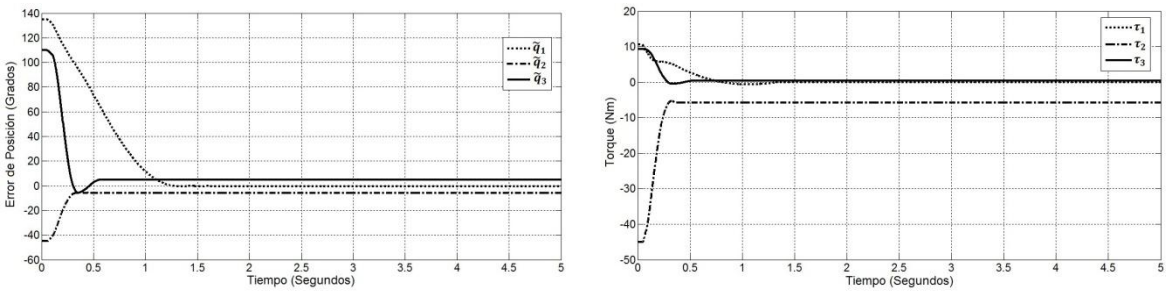


Figura A7. Graficas del controlador PD, $q_{d1} = 135\text{ Grados}$, $q_{d2} = -45\text{Grados}$, $q_{d3} = 110\text{Grados}$.

El índice de desempeño L_2 de los dos algoritmos (RFR y PD), mostrados en la figura A7, muestra que el controlador RFR, es más adecuado para ser utilizado en el control de posición, ya que resulta con un índice de desempeño 33.23% mejor que el PD. Los resultados finales del error de posición de cada articulación y valores de par solicitados por los controladores se presentan en la tabla A2.

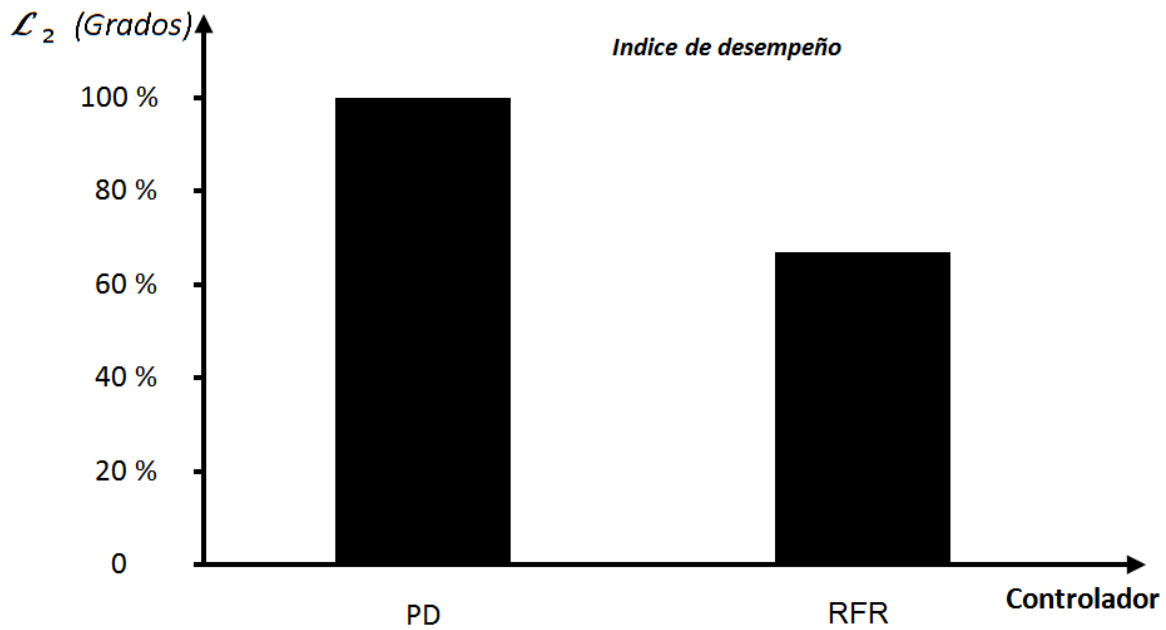


Figura A8. Índice de Desempeño de los algoritmos de control RFR y PD para $q_{d1} = 135$, $q_{d2} = -45$, $q_{d3} = 110$.

$q_{d1} = 135, q_{d2} = -45, q_{d3} = 110$ q_d (Grados); $\tilde{q}$ (Grados); τ (Nm)				
RSR1V			PD	
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s
$\tilde{q}_1$	135	0.002747	135	-0.38012
$\tilde{q}_2$	-45	-0.29250	-45	-5.78953
$\tilde{q}_3$	110	0.298767	110	4.865784
τ_1	2.349936	0.006454	10.53000	-0.02965
τ_2	-39.4902	-11.6322	-45.0000	-5.78953
τ_3	2.153911	0.794421	9.350266	0.413592

Tabla A2. Valores finales del error de posición y del par aplicado controladores RFR y PD.

Configuración $q_{d1} = 45$ Grados, $q_{d2} = 135$ Grados, $q_{d3} = 180$ Grados

Las pruebas experimentales con la presente configuración se realizan para los controles RE y PD, con la finalidad de analizar el desempeño de los algoritmos con movimientos, los resultados de los experimentos se muestran en las graficas de las figuras A9-A11.

En la figura A9 se presenta el comportamiento del Robot durante el desarrollo de la prueba, quedando el error de posición en un valor promedio de 0.2169 grados para el RES; mientras que en la figura A10, el promedio del error de posición final del PD fue de 27.23 grados. El movimiento del eslabón del hombro es lento, aunque el valor del par solicitado es alto, lo que provoca un tiempo de respuesta más amplio que los otros dos eslabones y por ello le toma 2.5 segundos llegar a una posición próxima a la deseada de 135 grados, la cual mantiene prácticamente constante hasta el final del experimento, el cual concluye con $\tilde{q}_2 = 0.349106$ Grados.

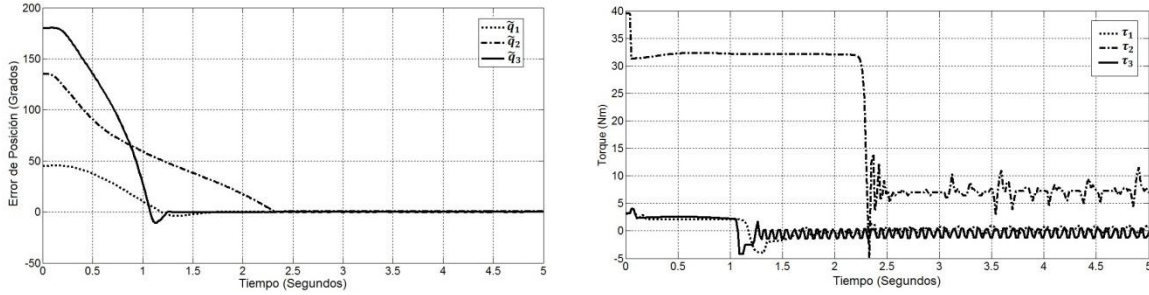


Figura A9. Graficas del controlador RE $q_{d1} = 45$ Grados, $q_{d2} = 135$ Grados, $q_{d3} = 180$ Grados.

El comportamiento del controlador PD en referencia al eslabón correspondiente al hombro, presente un pobre desempeño, debido a que después de varias pruebas realizadas no tiende a converger al valor deseado, quedando al final del experimento en 71.95 grados.

Los valores de los pares solicitados por los controladores RE y PD, se encuentra dentro de los límites físicos de los servo actuadores (tabla A3), solo el par solicitado por el controlador PD para la articulación del codo es superior (4.5 Nm), durante los primeros instantes del movimiento, comparado con el límite físico del servo actuador de 4 Nm., (ver tabla 2.1).

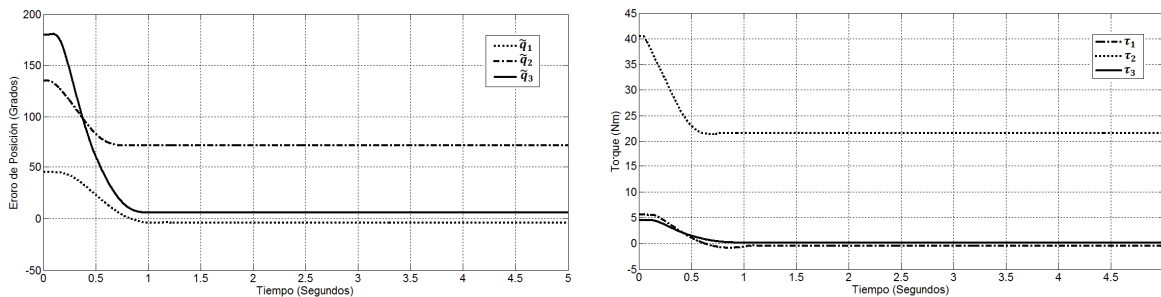


Figura A9. Graficas del controlador PD $q_{d1} = 45$ Grados, $q_{d2} = 135$ Grados, $q_{d3} = 180$ Grados.

El índice de desempeño $\mathcal{L}_2$ de los dos algoritmos RES y PD, se presentan en la figura A11, muestra que el controlador RES, es más adecuado para ser utilizado en el control de posición, ya que resulta con un índice de desempeño 27.098% mejor que el PD. Los resultados finales del error de posición de cada articulación y valores de par solicitados por los controladores se presentan en la tabla A3.

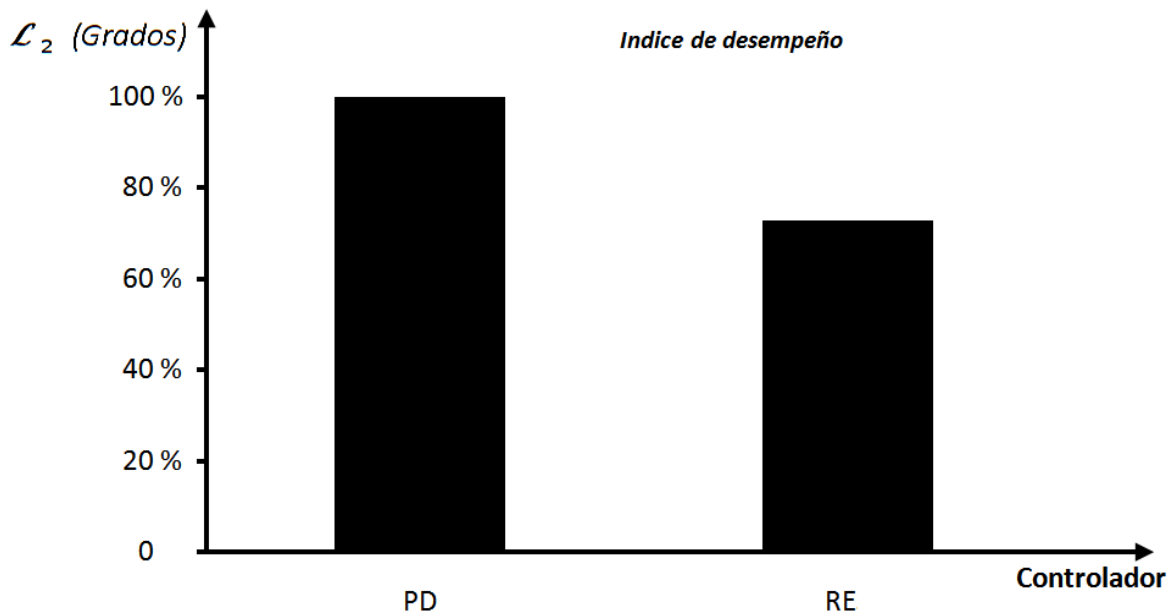


Figura A11. Índice de Desempeño de los algoritmos de control RE y PD para $q_{d1} = 45$, $q_{d2} = 135$, $q_{d3} = 180$.

$q_{d1} = 45, q_{d2} = 135, q_{d3} = 180$ q_d (Grados); $\tilde{q}$ (Grados); τ (Nm)				
RES			PD	
	Inicial	Final t=5s	Inicial	Final t=5s
$\tilde{q}_1$	45	0.099976	45	-3.81060
$\tilde{q}_2$	135	0.349106	135	71.95324
$\tilde{q}_3$	180	-0.20159	180	5.928223
τ_1	3.100000	-0.49153	5.625000	-0.47632
τ_2	39.50000	6.841029	40.50000	21.58597
τ_3	3.200000	-0.88556	4.500000	0.148195

Tabla A3. Valores finales del error de posición y del par aplicado controladores RE y PD.

PRODUCTIVIDAD ACADÉMICA

Revistas Internacionales.

Indexada

Fernando Reyes, Jaime Cid, Miguel Angel Limon and Manuel Cervantes. "Square Root Type-Control for Robot Manipulators." International Journal of Advanced Robotic Systems. Vol.9, 2012. pp. 1-7.

Arbitrada

José Manuel Cervantes, Fernando Reyes and Jorge Bedolla. "Global stability of a regulator for robot manipulators." International Journal of Robotics and Automation (IJRA), Volume (3) : Issue (4), 2012. pp. 220-232.

Memorias en Extenso en Congresos Nacionales.

José M.C. Vázquez, Fernando R. Cortes, and Barbarela D. Carmona. "Analysis of the Performance of a Controller for Robot Manipulators." Congreso Mexicano de Robótica 2012 BUAP, Facultad de Ciencias de la Electrónica. Octubre 24-26, Puebla.

José Manuel Cervantes, Fernando Reyes. "Algoritmo para el Control de Posición Diseñado Mediante la Técnica del Moldeo de Energía." SOMIXXVII Congreso de Instrumentación 2012. Octubre 29-31, Sinaloa.

José M. Cervantes, Fernando Reyes, Marcos Bedolla. "Algoritmo para control de posición de robots manipuladores con acciones acotadas." XIII Congreso Nacional De Ingeniería Electromecánica y de Sistemas (XIII CNIES). México, D.F., México, Noviembre 2012.

Square Root Type-Control for Robot Manipulators

Regular Paper

Fernando Reyes¹, Jaime Cid^{2,*}, Miguel Angel Limon¹ and Manuel Cervantes³

¹ Facultad de Ciencias de la Electrónica BUAP, Mexico

² Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado CUVyTT-BUAP, Mexico

³ Departamento de Mecatronica UPAEP, Mexico

* Corresponding author E-mail: jcid@ece.buap.mx

Received 30 May 2012; Accepted 20 Aug 2012

DOI: 10.5772/52500

© 2012 Reyes et al.; licensee InTech. This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract This paper addresses the problem of position control for robot manipulators. A new control structure with compensation for global position is presented. The main contribution of this paper is to prove that the closed loop system of the nonlinear robot dynamics model and the proposed control algorithm is globally, asymptotically stable and in agreement with Lyapunov's direct method and LaSalle's invariance principle. Besides this, the theoretical results in a real-time experimental comparison are also presented to show a comparison of the performance between the square root type controller and simple PD scheme on a three degrees-of-freedom direct-drive robot.

Keywords Robot, Direct driver, Stability, PD control

1. Introduction

Industrial robots are basically positioning and handling devices. A useful robot is one that is able to carry out a programmed task. The control of robot manipulators requires knowledge of the dynamics model and its mathematical properties. The problem of position control (also called regulation) is one of the most relevant issues in

robotics - this is especially so in the case of motion control or trajectory control. The main goal of position control in a joint space is to move the manipulator end-effector to a fixed desired target, which is assumed to be constant regardless of its joint position. In position control, the simple PD scheme was the most widely used algorithm studied in Takegaki and Arimoto [1]; meanwhile, Arimoto and Miyazaki [2] yield a global asymptotically stable closed-loop system for a trivial selection of proportional and derivative gains [2]. By way of contrast, the simple PID control is another popular strategy. However, it lacks a global asymptotic stability proof [3-5].

In recent years, various PD-type control schemes have been developed for the position control of robot manipulators. Among them, the following can be cited: a class of PID and PD controllers for position in [3-5]; a PD controller with proportional and derivative gains as nonlinear functions of the robot's states proposed in [6]; the methodology of energy shaping to propose many global regulation schemes in [7-8]; energy functions based on Lyapunov's stability theory to design control schemes in [9-13]; a sliding PID control for robot manipulators in [14]; a control algorithm with fuzzy logic in [15]; and a methodology on a $\mathcal{L}_1$ adaptive controller as presented in [16].

In view of the simplicity and applicability of the simple PD control in industrial applications, the main motivation of this paper is to propose both theoretical development and practical applications with high performance.

The objective of this work is to present a new control scheme that leads to global asymptotic stability in agreement with Lyapunov's direct method and Lasalle's invariance principle of the closed-loop system as formed by the nonlinear dynamics model of a degrees-of-freedom robot manipulator and the control structure. The new family has a nonlinear structure, which incorporates square-root type-components to quickly drive the position error to equilibrium point. The proposed control falls into the category of joint-level control and it requires that the set-point or desired position will be given at the joint space.

This paper also presents real-time experiments for position control on a three degrees-of-freedom direct-drive robot manipulator. The experimental results consist of a comparison of the performance between the proposed control and a popular PD scheme using the $\mathcal{L}_2$ norm.

This paper is organized as follows. Section 2 recalls the robot dynamics and useful properties for stability analysis. In Section 3, the proposed algorithms for the control and analysis of global asymptotic stability are presented. Section 4 describes the experimental setup based on the three degrees-of-freedom direct-drive robot manipulator and the experimental comparison between the proposed scheme and PD control. Section 5 contains the experimental comparison between PD and square root-type controllers. Finally, some conclusions are offered in Section 6.

2. Robot dynamics

The dynamics of a serial n -link rigid robot manipulator with viscous friction can be written as [17-18]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} + g(q) \quad (1)$$

where q is then $\times 1$ vector of joint displacements, $\dot{q}$ is then $\times 1$ vector of joint velocities, $\ddot{q}$ is then $\times 1$ vector of joint acceleration, τ is then $\times 1$ vector of input torques, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ represents the symmetric positive definite inertia matrix, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the matrix of centripetal and Coriolis torque, $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ is the vector of gravitational torques obtained as the gradient of the robot's potential energy due to gravity and $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the matrix of viscous friction coefficients. The vector of friction torques is assumed to be dissipative energy at all nonzero velocities and, therefore, their entries are bounded within the first and third quadrants. For zero velocities, only static friction is present.

It is assumed that the robot links are joined together with revolute joints. Although the dynamics model (1) is complex, it has several fundamental properties which can be exploited to facilitate control system design. In particular, the following are useful.

Property 1: the matrix $C(q, \dot{q})$ and the time derivative of the inertia matrix $\dot{M}(q)$ satisfy [17-18]:

$$\dot{q} \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}^T = 0, \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

This property is called skew symmetry and implies that the robot dynamics define a passive mapping between joint torque and joint velocity.

Property 2: the time derivative of the inertia matrix $\dot{M}(q)$ satisfies [17-18]:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T. \quad (3)$$

Property 3: the matrix $C(q, \dot{q})$ satisfies:

$C(q, \dot{q}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, if the joint velocity vector is zero, $\dot{q} = 0$ [17-18].

3. Square root-type controller

In this section, we present the stability analysis of the equilibrium point for the closed-loop system formed by a nonlinear robot dynamics model and the proposed control scheme. The main feature of this new algorithm is that global asymptotic stability is guaranteed with torques inside the prescribed bounds and the response is smooth without oscillations.

Consider the following control scheme with gravity compensation given by:

$$\tau = K_p \frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{q}^2 + 1}} - K_v \frac{\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}^2 + 1}} + g(q) \quad (4)$$

where $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the proportional gain, which is a diagonal matrix, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a positive definite matrix (also called derivative gain), $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ is the vector of position error, which is defined as $\tilde{q} = q_d - q(t)$, and $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ is the desired joint position. We introduce the following notation:

$$\frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{q}^2 + 1}} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1}} \\ \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix} \text{ and } \frac{\dot{q}}{\sqrt{\dot{q}^2 + 1}} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + 1}} \\ \frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_2^2 + 1}} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{\sqrt{\dot{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Figure 1 shows the profile type for the proposed control structure - it is a continuous function, monotonically increasing and it is also bounded.

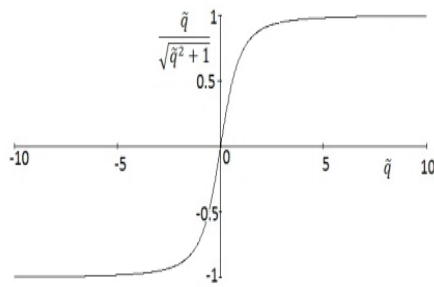


Figure 1. Saturated function for the control structure.

The control problem can be stated as to find a control law and select the design matrices K_p and K_v , such that the position error $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ and joint velocity $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)$ vanish asymptotically to zero (the equilibrium point is achieved), i. e.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n} \forall t \geq 0.$$

Proposition: Consider the robot dynamic model (1) together with the control law (4), then the closed loop system is globally asymptotically stable and the positioning aims $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = 0$ are achieved.

Proof: The closed-loop system equation obtained by combining the robot dynamics model (1) and the control structure (4) can be written as:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) \left[K_p \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1}} - K_v \frac{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1}} - B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \end{bmatrix} \quad (6)$$

which is an autonomous differential equation and the origin of this joint state space is its unique equilibrium point.

We propose the following Lyapunov function candidate to carry out the stability analysis of equation (6):

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

The first term of $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ is a positive function with respect to the state variable $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ because $M(\mathbf{q})$ is a positive definite matrix. The second term in the Lyapunov function candidate represents the potential energy induced by the position error. Note that for each component which satisfies $\sqrt{\tilde{q}_i^2 + 1} \geq 1 > 0$, then it is true that $\sqrt{\tilde{q}_i^2 + 1} - 1 > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$; this term is also a positive definite function since K_p is a diagonal definite positive matrix.

Therefore, equation (4) is a globally positive definite and radially unbounded function.

The time derivative of the Lyapunov function candidate (7) along the trajectories of the closed loop equation (6) is given by:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{d}{dt} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \frac{d}{dt} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (9)$$

Because K_p is a diagonal matrix, then expression (9) is given as:

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1} - 1 \\ \sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1} - 1 \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1} - 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{\sqrt{\tilde{q}_1^2 + 1}} \\ \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{\tilde{q}_2^2 + 1}} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{\sqrt{\tilde{q}_n^2 + 1}} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (10)$$

After some algebra and using certain useful properties from the dynamics model, equation (8) can be written as:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (11)$$

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_p \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \frac{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1} \end{bmatrix}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (12)$$

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \frac{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{q}}^2 + 1}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq 0, \quad (13)$$

The equation (13) is a globally negative semi-definite function because $K_v, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are positive definite matrixes. Therefore, the stability of the equilibrium point is concluded. In order to prove global asymptotic stability, the autonomous nature of equation (6) is

exploited to apply LaSalle's invariance principle, as follows:

Let the region:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} = \{ \tilde{q} \in \mathbb{R}^n, \dot{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \} \quad (14)$$

Since $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0 \in \Omega$, then $V(\tilde{q}(t), \dot{q}(t))$ is a decreasing function of t and $V(\tilde{q}, \dot{q})$ is continuous on the compact set Ω , which is bounded from below. - for example, it satisfies $V(\tilde{q}(0), \dot{q}(0)) \geq V(\tilde{q}(t), \dot{q}(t)) > 0$. Therefore, $V(\tilde{q}(t), \dot{q}(t))$ has a limit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ as $t \rightarrow \infty$. Hence, $\dot{V}(\tilde{q}(t), \dot{q}(t)) = 0$. Since Ω is an invariant set, the unique invariant is $\tilde{q} = \mathbf{0}$ and $\dot{q} = \mathbf{0}$. Since the trivial solution is the unique solution of the closed-loop system (6) restricted to Ω , then it is concluded that the origin of the state space is globally asymptotically stable.

4. Experimental setup

The experimental setup is a platform based on a three degrees-of-freedom direct-drive robot manipulator for research in robotics. It has been designed and built at the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. The robot manipulator moves in three dimensional space, as shown in Figure 2.

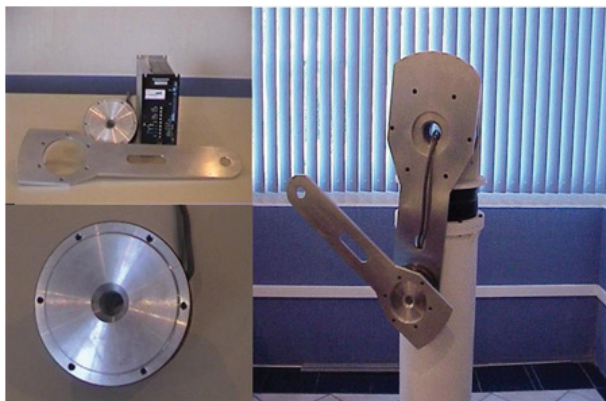


Figure 2. Experimental direct-drive robot manipulator

The experimental robot consists of links made of 6061 aluminium actuated by brushless direct-drive servo actuators from Parker Compumotor so as to drive the joints without gear reductions. The advantages of this type direct-drive servomotor include freedom from backlash and significantly lower joint friction compared with actuators composed by gear drives. The models of the servomotors used in the robot are listed in Table 1.

Link	Servomotor model	Torque [Nm]	Resolution [p/rev]
Base	DM1015A	15	4,096,000
Shoulder	DM1050A	50	4,096,000
Elbow	DM1004C	4	4,096,000

Table 1. Servomotors of the experimental robot manipulator

The servomotors are operated in torque mode and so the servos act as a torque source and accept an analogue voltage as a reference of the torque signal. Position information is obtained from incremental encoders located inside the motors. The standard backwards difference algorithm applied to the joint position measurements was used to generate the velocity signals. The workspace of the robot manipulator is a sphere with a radius of 1 m.

The electronic instrumentation is a motion control board, model MFIO3A from Precision Microdynamics Company Inc.. It is installed inside a Pentium IV computer. The MFIO3A obtains the joint position by FPGA's and the control algorithm is implemented in the language C with a sampling rate set to 2.5 ms.

With reference to the direct-drive robot manipulator, only the gravitational torque is required to implement the proposed control scheme:

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.28 \sin(q_2) + 1.14 \sin(q_2 + q_3) \\ 1.14 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (15)$$

5. Experimental results

This section reports an experimental comparison between a PD scheme and the proposed control on the direct-drive robot manipulator. To investigate the performance among the controllers, they have been classified as τ_{PD} for the PD control while τ_{src} represents the square root control. The experimental comparison consists in finding which provides the better performance between the evaluated controllers by using the scalar-valued $\mathcal{L}_2$ norm. A smaller $\mathcal{L}_2$ norm represents a smaller position error and, thus, the better performance.

An experiment in position control has been designed to compare the performance of τ_{PD} and τ_{src} controllers on a direct-drive robot. Extensive experiments were carried out with the two controllers. However, a representative experiment is presented. The experiment consists in moving the manipulator end-effector from its initial position to a fixed, desired position chosen as $[q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}]^T = [45, 45, 90]^T$ degrees, where q_{d1}, q_{d2}, q_{d3} represent the base, shoulder and elbow joints, respectively. The initial position and velocities were set to zero, for example in the home position.

The PD control algorithm for the experimental robot is given by:

$$\begin{aligned} \tau_{pd1} &= k_{p1}\tilde{q}_1 - k_{v1}\dot{q}_1 \\ \tau_{pd2} &= k_{p2}\tilde{q}_2 - k_{v2}\dot{q}_2 + 14.28 \sin(q_2) + 1.14 \sin(q_2 + q_3) \\ \tau_{pd3} &= k_{p3}\tilde{q}_3 - k_{v3}\dot{q}_3 + 1.14 \sin(q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (16)$$

The three components of the square root type-control for the direct-drive arm are:

$$\begin{aligned} \tau_{sr1} &= k_{p1} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + 1}} - k_{v1} \frac{\dot{q}_1^2}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + 1}} \\ \tau_{sr2} &= k_{p2} \frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_2^2 + 1}} - k_{v2} \frac{\dot{q}_2^2}{\sqrt{\dot{q}_2^2 + 1}} + 14.28 \sin(q_2) + 1.14 \sin(q_2 + q_3) \\ \tau_{sr3} &= k_{p3} \frac{\dot{q}_3}{\sqrt{\dot{q}_3^2 + 1}} - k_{v3} \frac{\dot{q}_3^2}{\sqrt{\dot{q}_3^2 + 1}} + 1.14 \sin(q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (17)$$

where $\tau_{pd1}, \tau_{pd2}, \tau_{pd3}$ represent the applied torques for the base, shoulder and elbow joints, respectively. This is similar in form to $\tau_{sr1}, \tau_{sr2}, \tau_{sr3}$.

However, several trials for selecting the gains were necessary in order to ensure acceptable behaviour in practice - i.e., a fast response in a transitory state and a smaller steady-state error. The actual choice of the gains is, however, limited by practical considerations because it can produce saturation torque in the actuators, which deteriorates the control system performance and leads to thermal and mechanical failure. For a controller τ_{pd} , the proportional gains were chosen such that $\tau_{pdi} < |\tau_i^{max}|$ for $i = 1, 2, 3$ and τ_i^{max} is the maximum applied torque of the i th joint (see the limits of the actuators in Table I). The i th proportional gain is given by $k_{pi} < \frac{\tau_i^{max}}{\dot{q}_i(0)}$ where $\dot{q}_i(0)$ is the initial condition for the i th position error. The derivative gains were adjusted under the requirements to obtain put low damped response satisfying $k_{vi} \ll k_{pi}$. In the case of the controller τ_{src} , the gains were chosen as $k_{pi} < |\tau_i^{max}|$ for $i = 1, 2, 3$; $k_{vi} \ll k_{pi}$. Finally, for the given initial conditions, the proportional and derivative gains have been tuned as in Table 2.

Link	τ_{pd}		τ_{src}	
	K_p [Nm/degrees]	K_v seg/degrees]	K_p [Nm]	K_v [Nm]
Base	$k_{p1} = 0.30$	$k_{v1} = 0.12$	$k_{p1} = 40$	$k_{v1} = 0.8$
Shoulder	$k_{p2} = 1.0$	$k_{v2} = 0.45$	$k_{p2} = 10$	$k_{v2} = 1.5$
Elbow	$k_{p3} = 0.04$	$k_{v3} = 0.004$	$k_{p3} = 0.9$	$k_{v3} = 0.34$

Table 2. Tuning up for proportional and derivative gains.

Figure 3 contains the experimental results of the position errors for the proposed controller τ_{src} corresponding to the base, shoulder and elbow joints.

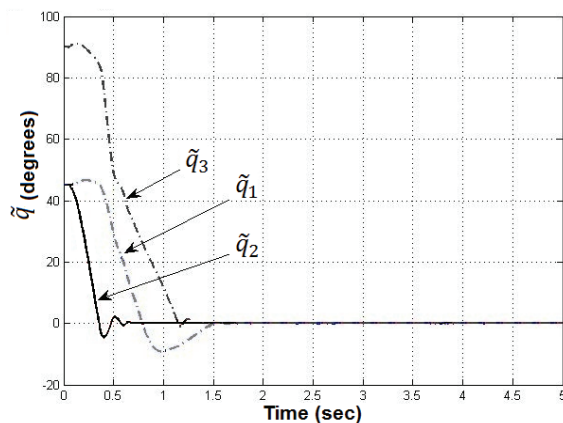


Figure 3. Experimental position errors of the proposed controller τ_{src} .

After a smooth transient ($t = 1.6$ seconds), all the components of the position errors tend asymptotically towards a small neighbourhood convergence of zero; the steady state position errors at time $t = 2$ s have small values of $[\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(t)]^T = [0.005, 0.004, 0.006]^T$ degrees. These errors are present due to presence of static friction at the joints and a lack of static friction compensation in the control scheme.

Figure 4 contains the experimental results of the applied torque for the proposed controller τ_{src} for each joint. From the experimental results, these applied torques clearly evolve inside the prescribed limits shown in Table 1.

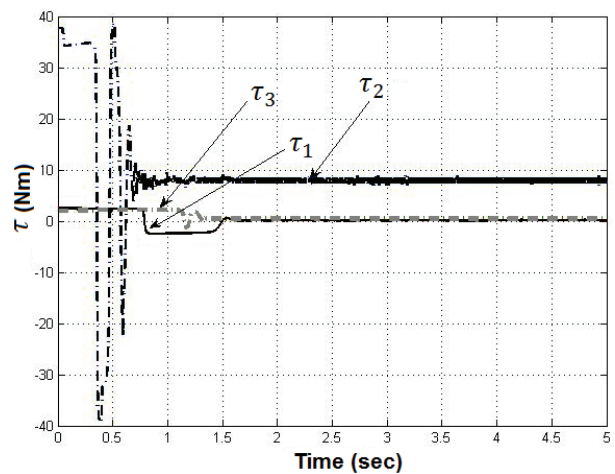


Figure 4. Applied torques of the proposed controller τ_{src} .

Figure 5 shows the experimental results of the position errors for the PD control, which evolve slowly until reaching steady state errors of $[\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(t)]^T = [0.5, 0.4, 0.6]^T$ degrees. It is worth noticing that the transient state requires more time than the proposed controller. Additionally, the torque signals are inside the limits from the actuators.

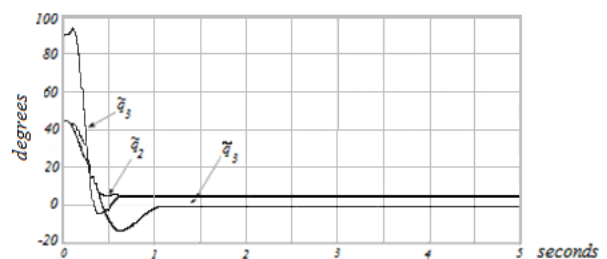


Figure 5. Experimental position errors of the PD algorithm.

The proposed controller has the property of quickly driving the position error to zero. This feature is due to its square root structure, since the position error is driven as an exponential function, the applied torque is as high as is required and this makes the control action faster, holding the actuator torque constraints through the saturating limits.

The $\mathcal{L}_2$ norm measures the root mean square “average” of the $\tilde{q}$ position error, which is:

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t \|\tilde{q}\|^2 dt} \quad (18)$$

Where $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ are the initial and final times, respectively. A smaller $\mathcal{L}_2$ represents a smaller position error and, therefore, the best performance of the evaluated controller.

The main results are summarized in Figure 6, which includes the performance indexes for the τ_{src} and τ_{PD} controllers. For clarity, the data presented is compared with respect to the $\mathcal{L}_2$ norm of PD control. The $\mathcal{L}_2$ norm for τ_{PD} was 32 degrees and for τ_{src} it was 12.8 degrees - the performance of the PD controller was improved, roughly, by its counterpart to the proposed controller by 60%. The proposed controller effectively exploits its square root-type exponential capacity to drive the position error to zero, having a short transient phase and a small steady-state error. Consequently, the control performance is increased in comparison with the PD scheme.

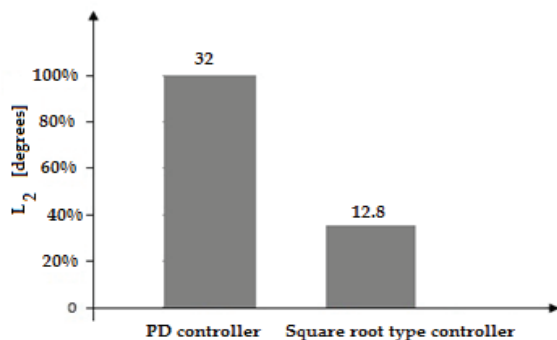


Figure 6. Indexes of performance for the evaluated controllers.

6. Conclusions

In this paper we introduced a new control scheme for the position control of robot manipulators. The proposed scheme leads to a closed-loop equilibrium point which is supported by stability analysis - in the sense of Lyapunov - and established conditions for ensuring global regulation. Such a stability proof is important in guaranteeing the suitable operation of the robotic system.

The proposed controller has a bounded smooth response such that the applied torques are inside the prescribed bounds of the servo actuator; with this controller we attempt to retain, to a certain degree, the advantage of a bounded signal to overcome the saturation problems of control schemes.

For the purpose of stability, the tuning procedure for the new scheme is sufficient to select a proportional gain as diagonal positive definite matrix and a derivative gain as a positive definite matrix. The tuning up for proportional

and derivative gains was chosen such that $k_{pi} < |\tau_i^{max}|$ for $i = 1, 2, 3$; and $k_{vi} < k_{pi}$.

The efficiency of the proposed scheme was corroborated through experimental tests on a real robot and good results were obtained. The performance of the proposed controller was compared with a PD control in a real-time experimental comparison on a three degrees-of-freedom direct-drive robot manipulator.

From experimental results, the proposed scheme showed better performance, the response was smoother and without oscillations and the position error was zero due to its square root structure. Since the position error is driven as an exponential function, the applied torque is as high as is required and this makes the control action faster, holding the actuator torque constraints thorough the saturating limits. In contrast, the simple PD was observed to be less robust than the square root-type controller. The proposed controller represents an attractive scheme for the position control problem and applications in point-to-point control and pick-and-place.

7. References

- [1] M. Takegaki and S. Arimoto, A new feedback method for dynamic control of manipulator, ASME J. Dynamics Syst. Measurement and Control, Vol. 103, 1981, pp. 119-125.
- [2] A. S. Miyazaki, Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulator, in Robotics: Theory and Application DSC, Vol. 3. Edited by F. Paul, 1986.
- [3] R. Kelly, Global Positioning of Robot Manipulators via PD Control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 7, 1998, pp. 934-938.
- [4] R. Kelly, A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators, Robotica Cambridge University Press, Vol. 13., 1995, pp. 141-148.
- [5] J. Alvarez, V. Santibañez and R. Campa, Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 16, No. 6, 2008, pp. 1333-1341.
- [6] Y. Xu, J. M. Hollerbach and D. Ma, A nonlinear PD controller for force and contact transient control, IEEE Control Systems, Vol. 15, No. 1, 1993, pp. 15-21.
- [7] R. Kelly and V. Santibañez, Global Regulation of Elastic Joint Robots Based on Energy Shaping, Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 10, 1998, pp. 1451-1456.
- [8] V. Santibañez, R. Kelly and F. Reyes, A New Set-Point Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators, IEEE Transactions on Industrial electronics, Vol. 45, No. 1, 1998, pp. 126-133.

- [9] F. Azenc, M. Malisoff, Strict Lyapunov Function Constructions Under LaSalle Conditions With an Application to Lotka-Volterra Systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 55, April 2010, p.841.
- [10] F. Mazenc and S. Bowong, Tracking Trajectories of Feedforward Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 8, 2002, pp.1338-1342.
- [11] K. Takahashi, M. Sasaki, Remarks on tip angular position control of single-link flexible robot arm using modified Lyapunov function, *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, August 2010, p.1024.
- [12] J. Kasac, B. Novakovic, D. Majetic and D. Brezak, Global Positioning of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No.6, 2006, pp. 1035-1040.
- [13] C. Xie and Y. Lin, A stability theorem and applications in control designs, 8th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), June 2010, p.1758.
- [14] V. Parra, S. Arimoto, Y. Liu, G. Hirzinger and P. Akella, Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments, *IEEE Transactions on Robotic and automation*, Vol. 19, No. 6, 2003, pp. 967--976.
- [15] V. Santibañez, R. Kelly and M. Llama, A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 13, No. 3, 2005, pp. 362-372.
- [16] H. Sun, N. Hovakimyan and B. Tamer, L1 Adaptive controller for uncertain nonlinear multi-input multi-output systems with input quantization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, No. 3, March 2012, pp. 565-578.
- [17] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, NY, 1989.
- [18] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, Springer-Verlag, London, 2005.

ARTICLE: Square root Type-Control for Robots Manipulators

AUTHOR(S): Dr. Jaime Cid, Dr. Fernando Reyes

JOURNAL: International Journal of Advanced Robotic Systems

NOTIFICATION OF ACCEPTANCE

20 August, 2012

Dear Dr. Jaime Cid,

On behalf of the Editorial Board it is my pleasure to inform you that your paper titled "Square root Type-Control for Robots Manipulators" has been accepted for publication in the *International Journal of Advanced Robotic Systems* (ISSN 1729-8806).

We firmly believe that your contribution will be of great importance to the scientific community.

Sincerely yours,

Aleksandar Lazinica, CEO


INTECH
d.o.o. Rijeka

Global Stability of A Regulator For Robot Manipulators

José Manuel Cervantes

Department of Mechatronics

Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla (UPAEP)

Puebla, Post code 72160, México

mcervantesv@hotmail.com

Fernando Reyes

Faculty of Sciences of the Electronics

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

Puebla, Post code 72530, México

freyes@ece.buap.mx

Jorge Bedolla

Instituto Tecnológico de Apizaco

Av. Instituto Tecnológico s/n, Apizaco,

Tlaxcala, México

ljbedolla@cenidet.edu.mx

Abstract

In this work a regulator for robot manipulators is proposed, it has been developed considering that the equilibrium point of the closed-loop system is globally asymptotically stable in agreement with Lyapunov's direct method. The global asymptotic stability of the controlled system is analyzed. We present real-time experimental results to show the performance of the proposed regulator on a robot manipulator of direct drive with three degrees of freedom. The performance of the new control scheme is compared with respect to the popular PD Algorithm in terms of positioning error

Keywords: Regulator, Global asymptotic stability, Lyapunov function, position control, robot manipulators.

1. INTRODUCTION

The position control (also called regulation) of robot manipulators plays a fundamental role in design and analysis of the modern nonlinear robust controllers. The robot manipulators are programmed to execute a sequence of movements, such as moving to a location $(x_1, y_1, z_1)^T$ and later to move to a new location $(x_2, y_2, z_2)^T$. Some theoretical results on the stabilization of robot manipulators under bounded control actions have been reported in the open literature [1] [2].

The goal of position control is to move end-effector of the robot manipulator from any initial state to a final desired position. In an industrial robot the direct application is point-to-point control using the proportional-derivative control (PD) plus gravity compensation [1]; another used control is the proportional integral derivative control (PID) further gravity compensation and modifications of the same ones [3]. The controller design for these robots can be a linear or nonlinear model, and many of the industrial systems are nonlinear [4]-[6]. The PID requires the gravitational torque as partial component of the robot dynamics into its control law, it lacks of a global asymptotic stability proof, PID has local stability only in a closed loop with robot manipulator [9]-[15]. On the other hand, the PD has global asymptotic stability in a closed loop [7]. Finally the best feature of these controllers is that the tuning procedure to achieve global asymptotic stability reduces to select the proportional and derivative gains in a straightforward manner.

The compensation of gravity allows maintaining the desired position once a final position is reached, this requires the robots to apply the proper torque on each joint. Additionally, these regulators assume implicitly that the robot actuators are able to generate the requested torques.

However, in current manipulators robot, the actuators are constrained to supply limited torques [2],[8]. Due to these disadvantages the regulators PD and PID need to develop a control algorithm for industrial robots which does not contain their limitations, and at the same time allows performing the same or better activities carried out within the field of robot [5][16].

The control algorithms used for the control of robot manipulators should present in the equilibrium point of dynamic model global asymptotically stability, for this reason it is important that the proposed Lyapunov function candidate is positive definite and its derivative satisfies the conditions of a negative definite function [2]. To proof an appropriate performance and comply with the Lyapunov's stability criteria, in which it is established that the proposed function should be definite positively and with continuous partial derivatives, also should be considered that the candidate function fulfill the conditions of Lyapunov [2][8][9]. The Lyapunov theorem ensures that, any system that is globally asymptotically stable, must satisfy the conditions before mentioned [3][4]. Unfortunately, for a nonlinear control system, in order to determine a function that satisfies such conditions is in general difficult. It consists in determining functions whose derivatives along the trajectories can be rendered negative semi-definite. The proof of this result is made by the LaSalle's invariance principle [1]-[4],[19]-[27].

Kelly developed a mathematical analysis for a regulator with a polynomial function to determine its asymptotic stability [2][18]; also Meza in [17] performs a similar analysis. Sanchez and Reyes in [18] shows the analysis of a Cartesian controller and evaluate its performance by an experimental proof, yielding a good performance. Other authors, for example in [25] [26], analyze the stability of regulators, developed experimental tests and compare their results against the PD controller. In order to evaluate the performance for regulators, they only measure the Cartesian position error without considering the transitory, which could be evaluate by using other indicator, for example the norm L_2 is used to evaluate the performance along the trajectories [28].

In this paper, we introduce a position regulator for robots plus gravity compensation, motivated by the practical interest in the design of regulators and its analysis with the Lyapunov's theory, to determine that this possesses global asymptotically stability, in order to carry out its utility and performance in the position control. It is fundamental, especially in this case, where a regulator is designed with stabilizing feedback, which are expressed in terms of the first derivatives of Lyapunov's function [1],[2].

Real-time experimental results on a direct-drive robot manipulator with three degrees of freedom are presented. The proposed regulator performance to reach the desired position is good in comparison with the simple PD algorithm. In order to show its utility and performance we verify the positions errors between the initial position and final position taking into account for characteristics of our robot.

This paper is organized by the following form. Section 2, shows the model of the dynamics of robots and some important properties. The regulator of bounded action for position control, and its analysis to demonstrate that it has global asymptotic stability with a Lyapunov's theory is presented in Section 3. In Section 4, we present results of experimental of regulators into a three degrees-of-freedom arm, and its comparison with the control PD. Finally, we offer some conclusions in Section 5.

2. PRELIMINARIES

The dynamics model with n degrees-of-freedom of a manipulator robot with rigid links is represented by

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} + g(q) \quad (1)$$

where τ is an $n \times 1$ vector of applied torque for the robot, $M(q)$ is the $n \times n$ symmetric positive definite inertia matrix, $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ contains the centrifugal and Coriolis forces the size $n \times n$, $B \in R^{n \times n}$, represents the viscous friction matrix of the robot joints, $q \in R^n$ is the vector of

position, $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ is the vector of velocities of the link, $\ddot{\mathbf{q}} \in R^n$ is the vector of acceleration and $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ is the torque due to gravitational forces and, it is the $n \times 1$ vector, obtained as the gradient of the potential energy $U(\mathbf{q})$ due to gravity [1][5]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2)$$

To simplify the process of analysis and compression of control law is necessary the application of the following properties of the dynamics model (1), so to facilitate the demonstration of stability condition(see [2]).

Property 1. The inertia matrix $M(\mathbf{q})$ is a positive definite symmetric matrix and its components are a function of $\mathbf{q}$, satisfies the following:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \in R^n. \quad (3)$$

Property 2. Other important property of inertia matrix is:

$$M(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (4)$$

Property 3. The matrix centrifugal and Coriolis forces $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, satisfies the following:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in R^n \quad (5)$$

3. REGULATOR WITH BOUNDED ACTION FOR POSITION CONTROL

The position control problem of robot manipulators can be formulated as follows: considering the dynamics equation (1) of a robot of n degree-of-freedom, given a desired joint position q_d assumed constant, trying to determine a vector function $\boldsymbol{\tau}$, so that the position associated with the coordinates $\mathbf{q}$ asymptotically reaches the robot joint q_d . Formally the goal of pure position control or simply position control, is to determine $\boldsymbol{\tau}$ so that:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow 0$$

Taking into account the above, we present the design and analyses of a new control scheme for robot manipulators, the proposed regulator is an algorithm based on the energy shaping which is written in function of the potential energy, composed of a proportional and a derivative part, in both by adding the same function and the compensation of gravity. We propose the following rational saturated regulator (RSR):

$$\boldsymbol{\tau} = Kp \frac{12\tilde{\mathbf{q}}}{\sqrt{5+6\tilde{\mathbf{q}}^2}} - Kv \frac{12\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\sqrt{5+6\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^2}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

Where Kp and Kv are the diagonal positive definite $n \times n$ matrices and so-called proportional gain and derivative gain, respectively; which are selected by the designer[2][5]. On the other hand, $\tilde{\mathbf{q}} \in R^n$, it is the position error between the manipulator robot's actual position and the desired position, defined as:

$$\tilde{\mathbf{q}} = q_d - \mathbf{q} \quad (7)$$

by notation is defined

$$\frac{12\tilde{q}}{\sqrt{5+6\tilde{q}^2}} = \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

term of the speed is given by:

$$\frac{12\dot{q}}{\sqrt{5+6\dot{q}^2}} = \begin{bmatrix} \frac{12\dot{q}_1}{\sqrt{5+6\dot{q}_1^2}} \\ \frac{12\dot{q}_2}{\sqrt{5+6\dot{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\dot{q}_n}{\sqrt{5+6\dot{q}_n^2}} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Taking into account (8) and (9), we can write the RSR- regulator (6) as:

$$\tau = Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - Kv \begin{bmatrix} \frac{12\dot{q}_1}{\sqrt{5+6\dot{q}_1^2}} \\ \frac{12\dot{q}_2}{\sqrt{5+6\dot{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\dot{q}_n}{\sqrt{5+6\dot{q}_n^2}} \end{bmatrix} - g(q) \quad (10)$$

The closed-loop system equation formed by the robot dynamics (1) and structure control of energy shaping (10) generates a global stable equilibrium point in the sense of Lyapunov, such an equation expressed in terms of state variables is $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T]^T$ in the following way:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} \left[Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - Kv \begin{bmatrix} \frac{12\dot{q}_1}{\sqrt{5+6\dot{q}_1^2}} \\ \frac{12\dot{q}_2}{\sqrt{5+6\dot{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\dot{q}_n}{\sqrt{5+6\dot{q}_n^2}} \end{bmatrix} - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (11)$$

In order to carry out the stability analysis, we propose the following radially unbounded positive definite function as Lyapunov function candidate:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + U_a(Kp, \tilde{q}). \quad (12)$$

Where the first term of this Lyapunov function candidate corresponds to the kinetic energy, which is a positive definite function in $\dot{q}$, because inertia matrix $M(q)$ is positive definite. The second term $U_a(Kp, \tilde{q})$ is the artificial potential energy, this term is a radially unbounded positive definite function in $\tilde{q}$, and design Kp is a positive-definite matrix.

The term $U_a(Kp, \tilde{q})$ in (12) is defined in the following way:

$$U_a(Kp, \tilde{q}) = 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Therefore, incorporating (13) into (12), we get

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

To demonstrate that candidate function satisfies the Lyapunov's conditions, we have (11) which complies with the following conditions: The first term is defined positive because the inertia matrix $M(\mathbf{q})$ is positive definite. The second term is the artificial potential energy also is a positive definite function on the position error vector $\tilde{\mathbf{q}}$. Note that the term $\sqrt{5}$ was introduced to make $\tilde{\mathbf{q}} = 0$, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ is zero; Therefore, the Lyapunov function candidate $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ is a positive definite function in form globally and radially unbounded.

The time derivative of the Lyapunov function candidate (14) along the trajectories of the closed-loop system can be written as

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (15)$$

Considering that the derived of the position error it is $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\ddot{\mathbf{q}}$, because the desired position q_d is a constant, and substituting the value of the acceleration $\ddot{\mathbf{q}}$ of the equation of closed-loop (11) into (15), we have

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \left[M(\mathbf{q})^{-1} \left[Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}}} \end{bmatrix} - Kv \begin{bmatrix} \frac{12\dot{q}_1}{\sqrt{5 + 6\dot{q}_1^2}} \\ \frac{12\dot{q}_2}{\sqrt{5 + 6\dot{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\dot{q}_n}{\sqrt{5 + 6\dot{q}_n^2}} \end{bmatrix} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{\sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2} - \sqrt{5}} \sqrt{5 + 6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

solving the suitable operations, we have:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K\nu \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T C(q, \dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T B\dot{q} - \\ & \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}-\sqrt{5}} \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}-\sqrt{5}} \\ \vdots \\ \sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}-\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}-\sqrt{5}} \sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}-\sqrt{5}} \sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}-\sqrt{5}} \sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \dot{q} \end{aligned} \quad (17)$$

using property 1 in the third term and fourth term

$$-\dot{q}^T C(q, \dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} = \dot{q}^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} \equiv 0. \quad (18)$$

Let us define w as: $w = \sqrt{5+6\tilde{q}_i^2} - \sqrt{5}$, where $i = 1, 2 \dots n$, and substituting w inside the fifth term of (17) together with (18)

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K\nu \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T B\dot{q} - \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_n} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{w_1} \sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{w_2} \sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{w_n} \sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (19)$$

The fourth term of (19) can be written as:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_n} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{w_1} \sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{w_2} \sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{w_n} \sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_n} \end{bmatrix}^T Kp \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{w_1} \sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{w_2} \sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{w_n} \sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (20)$$

Note that, the matrix Kp is a diagonal positive definite matrix, and as the product of diagonal matrices is commutative, with which simplify the expression being (20) as:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \\ \sqrt{w_2} \\ \vdots \\ \sqrt{w_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{w_1} \sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{w_2} \sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{w_n} \sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix} Kp \dot{q} = \begin{bmatrix} \frac{12\tilde{q}_1}{\sqrt{5+6\tilde{q}_1^2}} \\ \frac{12\tilde{q}_2}{\sqrt{5+6\tilde{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\tilde{q}_n}{\sqrt{5+6\tilde{q}_n^2}} \end{bmatrix}^T Kp \dot{q}. \quad (21)$$

Substituting (21) into (19), finally we obtain the result the time derivative of Lyapunov candidate function

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K v \begin{bmatrix} \frac{12\dot{q}_1}{\sqrt{5+6\dot{q}_1^2}} \\ \frac{12\dot{q}_2}{\sqrt{5+6\dot{q}_2^2}} \\ \vdots \\ \frac{12\dot{q}_n}{\sqrt{5+6\dot{q}_n^2}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0 \quad (22)$$

Using the fact that the Lyapunov function candidate (14) is a globally positive definite function and its time derivative is a globally negative semi-definite function, we conclude that the equilibrium of the closed-loop system (11) is stable. Finally, we can use the LaSalle's invariance principle to demonstrate the global asymptotic stability of the equilibrium. Toward this end, let us defined the set Ω as:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in R^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} \quad (23)$$

$$\Omega = \{ \tilde{q} \in R^n, \dot{q} = 0 \in R^n \} \quad (24)$$

The unique invariant is $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T] \in R^{2n}$. We conclude that this equilibrium is globally asymptotically stable.

4. EXPERIMENTAL RESULTS AND DISCUSSION

The algorithm RSR is experimentally tested in an experimental platform, which consists of a three degree-of freedom direct-driver robot manipulator, designed and built at The Benemerita Universidad Autónoma de Puebla to research robot control algorithms. Figure 1 shows the manipulator robot. It is a direct-drive manipulator robot that consists of links made of 6061 aluminum actuated by brushless direct drive servo actuator from Parker Compumotor to drive the joints without gear reduction (the motors characteristics used in the experimental robot are on the Table 1).



FIGURE 1: Robot Manipulator.

In this robot manipulator we recall the equation of the control law (10) to apply the torque in each joint to produced the movement in every link of the robot. The proportional gains were chosen such that $\tau < \|\tau_{max}\|$, where τ_{max} represents the maximum applied torque of the i th joint (see limits of actuators in Table 1).

The empirical procedure that was used to select the tuning of the proportional gain is given by: $Kp_i = 80\% \tau_{imax} / q_{di}$, after several experimental tests and considering that the best time response

without overshoot the minimum steady-state position error were obtained without reach the saturation zone of the actuators torques.

Link	Model	Torque [Nm]	p/rev
Base	DM-1015B	15	1024000
Shoulder	DM-1050A	50	1024000
Elbow	DM-1004C	4	1024000

TABLE 1: Servo actuators of the robot manipulator.

The proportional and derivative gains were selected as:

$$Kp = \begin{bmatrix} 0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 7.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0.65 \end{bmatrix} Nm; \quad Kv = \begin{bmatrix} 0.176 & 0 & 0 \\ 0 & 1.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 \end{bmatrix} Nm$$

The initial conditions for the joint positions of the robot manipulator were defined as:

Link one (Base) $q_1(0) = 0$ degrees; Link two (Shoulder) $q_2(0) = 0$ degrees; Link three (Elbow) $q_3(0) = 0$ degrees.

The initial conditions for the joint velocities are:

Base joint $\dot{q}_1(0) = 0$ degrees/sec; Shoulder joint $\dot{q}_2(0) = 0$ degrees/sec; Elbow joint $\dot{q}_3(0) = 0$ degrees/sec.

The desired final position was definite as: $q_{d1}(t_f) = 45$ degrees, $q_{d2}(t_f) = 45$ degrees and $q_{d3}(t_f) = 90$ degrees, considered time in the experiment to that the robot arrive to the final positions was $t_f = 5$ seconds.

The experimental results of RSR-regulator are depicted in Figures 2-3. We analyze the acting of the regulator in function of the position errors $\tilde{q}$ and the applied torque τ .

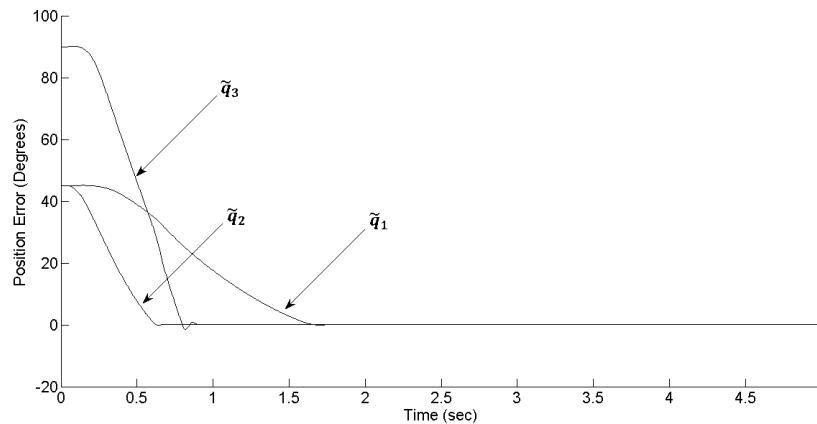


FIGURE 2: Position error of regulator RSR.

Figure 2 shows that, as time evolves, the position errors $\tilde{q}$ tend to zero, in agreement with position control objective defined in equation (10), in this case we can see with regard to the tracking position error in the exponential regulator was of approximately $\tilde{q}_1 = 0.035156 \pm 0.0087$ degree in $t = 1.757517$ sec. $\tilde{q}_2 = 0.086329 \pm 0.0074$ degree in $t = 0.672499$ sec. $\tilde{q}_3 = 0.123596 \pm 0.0269$ degree in $t = 0.902499$ sec. The position is maintained until the end of the

experiment. It can be concluded that the robot system moves fast and practically without overshoot toward the reference position q_d .

Figure 3 shows that the applied torque for each joint remain within the prescribed limits of these actuators (see Table 1), and the magnitude of the torques stay inside physics limits in steady-state. Each joint has a smooth moving, free from irregularities; in stationary state the magnitude of the base torque is: $\tau_1 = 2.497 \text{ Nm}$; for shoulder joint $\tau_2 = 34.775 \text{ Nm}$; and elbow joint $\tau_3 = 2.963 \text{ Nm}$. Also it is observed that the applied torque for the link two (τ_2) is higher than the other two links, this is because of it corresponds to the shoulder joint, which has to support the weight of the arm, causing high oscillations of the applied torque during the first instants of time of the movement, and later decrease until a value of $11.11396 \pm 1.23 \text{ Nm}$; the applied torque by the servos to the links one and three are approximately constant during the beginning of the movement, later on they present smaller oscillations to locate to the links in their final position. Torque τ_1 oscillates among -0.61233 Nm and 0.920216 Nm ; τ_3 among -0.11133 Nm and 1.524700 Nm . The value of the applied torque to the shoulder and elbow links do not decrease to zero because they have to stay in the specified position, for such a reason the servo actuators apply a torque to compensate the effects of the force of gravity that it acts on them.

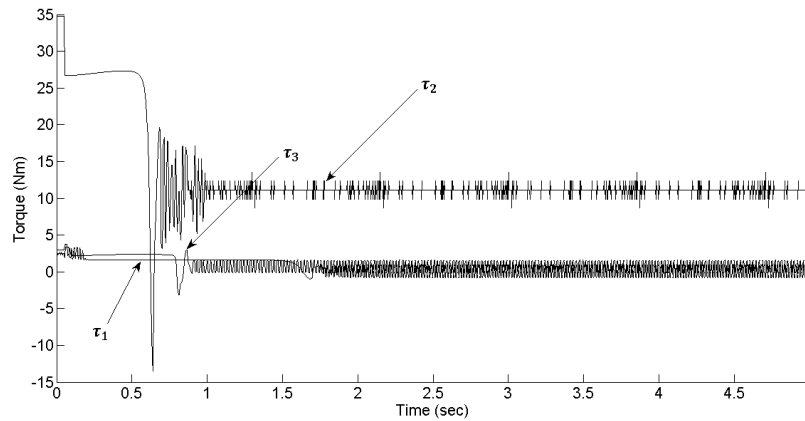


FIGURE 3: Applied torque to the joints of the manipulator.

In order to compare the performance of the RSR-regulator presented here, develop experimental tests with the known PD-regulator

$$\tau = Kp\tilde{q} - Kv\dot{q} + g(q) \quad (25)$$

The tuning-up for proportional and derivative gains were selected as:

$$Kp = \begin{bmatrix} 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix} \text{ Nm/degrees}; \quad Kv = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \text{ Nm-sec/degrees}.$$

Figure 4 shows that the position error $\tilde{q}$ of PD regulator falls with a tendency to zero, however, this presents a broad overshoot and when the experiment concludes his position error was several degrees $\tilde{q}_1 = -0.72399 \pm 0.000275 \text{ degrees}$, $\tilde{q}_2 = 5.47241 \pm 0.00386 \text{ degrees}$, $\tilde{q}_3 = 4.466492 \pm 0.001098 \text{ degrees}$.

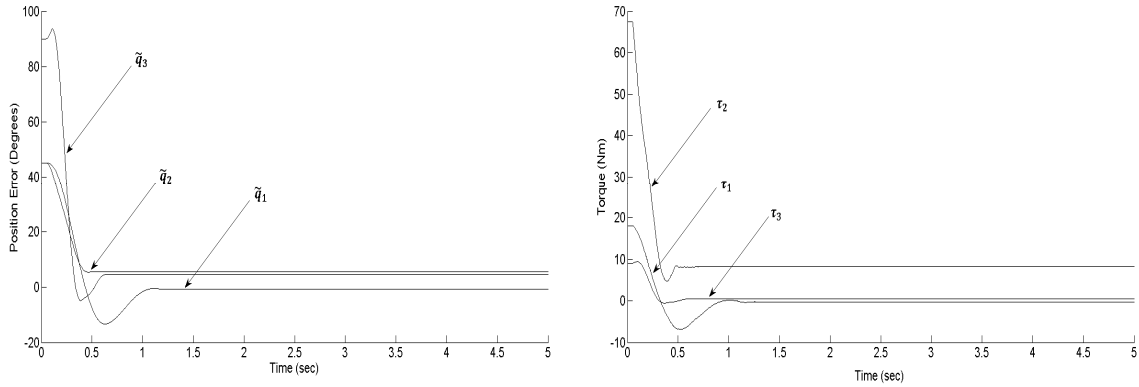


FIGURE 4: Position error and applied torque by means of the control PD.

As we can appreciate the values of the torque applied by the PD-regulator (see Figure 4), they are bigger than the maximum torque values that can give the servo actuators according to Table 1; therefore they work in the saturation condition during the first instants of the robot's displacement. Applied torque by the PD when the robot manipulator approaches to the desired position stays approximately constant to maintain the position.

Previous results do not allow us to properly compare the performance of proposed regulator and PD-regulator. With this propose, the $\mathcal{L}_2$ norm criterion has error useful. The scalar value $\mathcal{L}_2$ norm of position error is given by:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 dt} \quad (26)$$

Where $T_e \in \mathbb{R}_+$ is the duration of the experimental test, in our case, 5 seconds. A small $\mathcal{L}_2$ value represents a better regulator performance.

The performance result of regulators is shown in Figure 5. It can be observed that the smaller $\mathcal{L}_2$ norm corresponds to RSR-regulator, considering these results, we can conclude that the RSR-regulator had the best performance when compared whit PD-regulator using the scalar-valued $\mathcal{L}_2$ norm criterion.

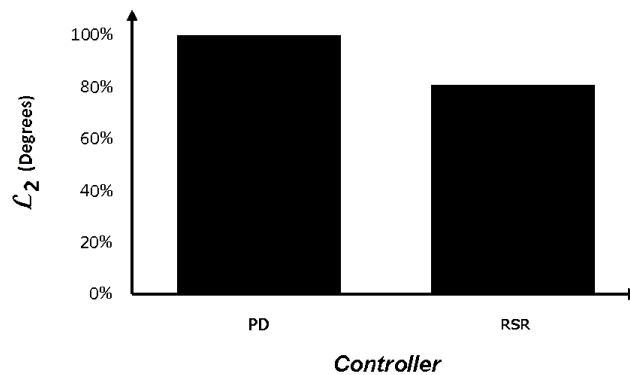


FIGURE 5: Performance index of regulators.

5. CONCLUSIONS & FUTURE WORK

In this paper, we have presented a simple regulator (RSR) to solve the position control problem of robot manipulators, motivated by the practical interest of relying on control algorithms that preserve global asymptotic stability. The RSR-regulator is analyzed, demonstrating that the origin of the state space is asymptotically stable in Lyapunov's sense.

We have developed experiments on a direct-drive robot system of 3 degrees-of freedom, that demonstrate the stability and performance of the RSR regulator. We have shown that, for desired position and under the design guidelines, the requested torques remain within the prescribed limits of the actuators, guaranteeing their correct operation during the experiment, and the steady-state position errors are inside an interval around zero, as shown from the results of the experiments that are carried out. The $\mathcal{L}_2$ norm provided a suitable index used to compare the performance of the RSR-regulator with the PD-regulator under the same conditions, which for the case presented herein, it showed that the RSR-regulator has a better performance. A future work is the generation with auto-tuning control algorithms that enable better performance and reduce time tuning the gains.

6. REFERENCES

- [1] J. Alvarez, V. Santibañez and R. Campa. (2008, Nov.) "Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation." IEEE Transactions On Control Systems Technology. [On-line]. 16(6), pp. 1333-1341. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp> [Feb. 5, 2009].
- [2] R. Kelly and V. Santibañez. (1998, Oct.). "Regulation of Elastic Joint Robots Based on Energy Shaping". IEEE Transaction on Automatic control [On-line]. 43(10), pp. 1451-1456. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp> [Mar. 12, 2012].
- [3] İ. H. Akyuz, E. Yolacan, H. M. Ertunc and Z. Bingul. "PID and State Feedback Control of a Single-Link Flexible Joint Robot Manipulator," in IEEE International Conference on Mechatronics, 2011, pp. 409-414.
- [4] Y. Karayiannidis and Z. Doulgeri. "Robot joint position tracking with an approximator-free prescribed performance controller." in 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2011, pp. 564-569.
- [5] M. Arteaga and R. Kelly. (2004, Apr.). "Control Without Velocity Measurements: New Theory and Experimental Results." IEEE Transactions on Robotics and Automation. [On-line]. 20(2), pp. 297-308. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/search/searchresult.jsp> [Aug. 7, 2012].
- [6] D. Sun, S. Hu, X. Shao, and C. Liu. (2009, Jul.). "Global Stability of a Saturated Nonlinear PID Controller for Robot Manipulators." IEEE Transactions on Control Systems Technology. [On-line]. 17(4), pp. 892-899. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&number=4815396> [Jun. 12, 2012].
- [7] D. Sun, S. Hu, X. Shao and C. Liu. (2009, Jul.). "Global Stability of a Saturated Nonlinear PID Controller for Robot Manipulators." IEEE Transactions on Control Systems Technology. [On-line]. 17 (4), pp. 892-899. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&number=4815396> [Mar. 12, 2012].
- [8] M. Takegaki and S. Arimoto. (1981, Jun.). "A new feedback method for dynamic control of manipulators." ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control, [On-line]. 103(1), pp. 119-125. Available: www.flyingmachjourn.com/properties/fly.edu [Dec. 1, 2003].
- [9] A. De Luca. "A PD-type regulator with exact gravity cancellation for robots with flexible joints," in IEEE International conference on Robotics and Automation (ICRA), 2011, pp. 317 – 323.

- [10] J. Kasac, B. Novakovic, D. Majetic, and D. Brezak. (2006, Jun.) "Global Positioning of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints." IEEE Transactions On Automatic Control. [On-line]. 51(6), pp. 1035 - 1040 . Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1643376> [Feb. 5, 2009].
- [11] F. Mazenc, and M. Malisoff. (2010 Apr.) "Strict Lyapunov Function Constructions Under LaSalle Conditions With an Application to Lotka-Volterra Systems." IEEE Transactions On Automatic Control. [On-line]. 55(4), pp. 841--854. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5404415> [Feb. 5, 2009].
- [12] Y. Liu. And N. Chopra. (2012, Jun.) "Control of Robotic Manipulators Under Input/Output Communication Delays: Theory and Experiments ." IEEE Transactions On Robotics. [On-line]. 28 (3), pp. 742-751. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6152159> [Sep. 11, 2012].
- [13] R. Kelly. (1998, Jul.) "Global Positioning of Robot Manipulators via PD Control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions ." IEEE Transactions On Automatic Control. [On-line]. 43 (7), pp. 934-938. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=701091> [Mar. 12, 2012].
- [14] V. Parra, S. Arimoto, Y. Liu, G. Hirzinger and P. Akella. (2003, Dec.) "Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments." IEEE Transactions On Robotics and Automation. [On-line]. 19 (6), pp. 967-976. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1261350>. [Mar. 12, 2012].
- [15] V. Santibañez, R. Kelly and F. Reyes. (1998, Feb.) "A New Set-Point Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators." IEEE Transactions On Industrial Electronics. [On-line]. 45 (1), pp. 126-133. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=661313> [Mar. 12, 2012].
- [16] R. Goebel. "Basic results on pointwise asymptotic stability and set-valued Lyapunov functions." in 49th IEEE Conference on Decision and Control. 2010. pp. 1571-1574.
- [17] J. L. Meza, V. Santibañez, R. Campa. (2007, Jun.) "An estimate of the domain of attraction for the PID regulator of manipulators." International Journal of Robotics and Automation (IJRA). [On-line]. 22 (3), pp. 187-195. Available: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1739829&picked=prox&CFID=149279592&CFTOKEN=83047867>. [Mar. 12, 2012].
- [18] P. Sánchez, F. Reyes. (2008, Mar.) "A polynomial family of PD-Type Cartesian controller." International Journal of Robotics and Automation (IJRA). [On-line]. 23 (2), pp. 79-87. Available: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1750498&CFID=149279592&CFTOKEN=83047867>. [Mar. 12, 2012].
- [19] G. Leena, K.B. Data and G. Ray. (2011, Sep.) "A Class of Stabilizing PID Controllers for Position Control of Single-Link Robot ." International Journal of Control and Automation. [On-line]. 4 (3), pp. 127-143. Available: http://www.sersc.org/journals/IJCA/vol4_no3/10.pdf [Mar. 12, 2012].
- [20] B. Liu, F. Lin and B. Tian. (2010, Feb.) "A Set of Globally Stable N-PID Regulators for Robotic Manipulators." Engineering. [On-line]. 2 (1), pp. 118-123. Available: <http://www.scrip.org/journal/eng> [Sep. 20, 2012].
- [21] Y. Orlov and L. Aguilar. (2004, Jul.) "Non-smooth -position control of mechanical manipulators with frictional joints." International journal of control. [On-line]. 77 (11), pp. 1062-1069. Available: <http://www.tandf.co.uk/journals> [Sep. 28, 2012].

- [22] K. Takahashi and M. Sasaki. "Remarks on Tip Angular Position Control of Single-Link Flexible Robot Arm Using Modified Lyapunov Function." in International Conference on Mechatronics and Automation. 2010. pp. 1024-1029.
- [23] F. Piltan. N. Sulaiman. M. Rashidi. (2011, Dec.) "Design and Implementation of Sliding Mode Algorithm: Applied to Robot Manipulator-A Review." International Journal of Robotics and Automation (IJRA). [On-line]. 2 (5), pp. 265-282. Available: <http://www.cscjournals.org/csc/manuscript/Journals/IJRA/volume2/Issue5/IJRA-50.pdf> [Sep. 20, 2012].
- [24] F. Piltan. R. Bayat. F. Aghayari. B. Boroomand (2012, Jun.) "Design Error-based Linear Model-free Evaluation Performance Computed Torque Controller ." International Journal of Robotics and Automation (IJRA). [On-line]. 3 (3), pp. 151-166. Available: <http://www.cscjournals.org/csc/journals/IJRA/description.php?JCode=IJRA> [Oct. 20, 2012].
- [25] Y. Su and C. Zheng. "A Saturated PD plus Scheme for Asymptotic Tracking of Robot Manipulators." in International Conference on Robotics and Biomimetics. 2009. pp. 853-858.
- [26] P.R.Ouyang and T. Dam. "Position Domain PD Control: Stability Comparison." in International Conference on Information and Automation. 2011. pp. 8-13.
- [27] C. Murrugarra. J. Grieco. G. Fernandez and O. De Castro. "Design of a PD Position Control based on the Lyapunov Theory for a Robot Manipulator Flexible-Link." in International Conference on Robotics and Biomimetics. 2006. pp. 890-895.
- [28] L.L. Rizzi. A.A. Koditschek. "Comparative experiments with a new adaptative controller for robot arms." in IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1991. pp. 2-7.



Computer Science Journals

Excellence In Education, Research and Service

CERTIFICATE OF ACCEPTANCE

is bestowed upon *José Manuel Cervantes*
Fernando Reyes & Jorge Bedolla
for

***International Journal of Robotics and
Automation (IJRA)***

Volume 3 : Issue 4

Date: December 2012

for

Global Stability of A Regulator For Robot Manipulators



CSC Journals Editorial Office

Analysis of the Performance of a Controller for Robot Manipulators

José M.C. Vázquez,^{1,3} Fernando R. Cortes,² and Barbarela D. Carmona³

Abstract— This paper presents a new scheme for the position control problem of robot manipulators that contains in its structure an exponential function that can be applied to control n degrees of freedom robot manipulators. The proposed scheme is analyzed by proposing a potential energy as Lyapunov function candidate, it is analyzed the closed-loop equation with a unique equilibrium point and its attractor, using the direct method of Lyapunov; the new control algorithm is tested on an experimental three degrees of freedom direct drive arm, the performance is evaluated by $\mathcal{L}_2$ norm. We presented in real-time results on a comparison between the proposed scheme and the popular proportional derivative control (PD). Applications on point to point control are reported (pick and place) to show the utility of the theoretical development.

KeyWords— Global asymptotic stability, Lyapunov function, PD controller, robot manipulators, position control, energy shaping.

I. INTRODUCTION

In the field of control of robot manipulators have been developed various controllers, which have proved their efficiency when applied to industrial-type robots [1]-[4]; Among the main control problems more widely used are position control, force control, hybrid control and visual servo-in, which are used to solve three fundamental problems that are: trajectory generation, trajectory tracking and route planning [1]-[16]. Solution of such problems in function of mentioned control techniques, have in function of control techniques that carry out the control goal.

This paper we describe a technique based on energy shaping to design a new control scheme with exponential structure with high performance. In the case of position control, the problem is the positioning of the end-effector robot in a specific point, regardless of the point where it is initially; it is well known that many applications of robots moving freely in their workspace can be well performed by position controllers.

The proportional-derivative (PD) control plus gravity compensation together with the PD control plus desired gravity compensation are the simplest global regulators for robot manipulators [11,16]. In this sense these controllers improves their control characteristics by means of an appropriate select the proportional and derivative gains in a straightforward manner. Some researchers have addressed the problem of different ways whit certain degree of complexity, through the proposed control algorithms [2]-[6]; by means of the energy-shaping methodology they have proposed algorithms to solve the problem of position control [5]-[13]; however, the methodology allows the design of a great variety of new control algorithms for the position control with mathematical structure of the gradient of artificial potential energy, moulding energy applied to the robot, more the incorporaacin of a dissipative function and a term of compensation of gravity.

Motivated by the energy-shaping methodology and the controllers introduced in [4]-[10], which aims at modifying the potential energy of the closed-loop system and the injection of the required dissipation. In this paper, we develop a control algorithm composed by a exponential structure for the position error and for the damping injection plus gravity compensation. Asymptotically convergence of state variables for the closed-loop equation equilibrium point is demonstrated by stability theory of Lyapunov.

This paper is organized as follows: Section II summarizes the dynamic model of robot manipulator, including the compensation of gravitational forces and of friction presented in the robot, also some important properties. In Section III, we present the proposed control algorithm as well as its demonstration of stability. In Section IV, we present experimental results on a three-degrees-of-freedom robot system. Finally, we offer some concluding remarks in Section V.

II. DYNAMICS MODEL

Position control of robot manipulators, also called regulation of robots, may be recognized as the sim-

¹ Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla (UPAEP)
Department of Mechatronics, 21 Sur 1103 Colonia Santiago C.P. 72160
Puebla. México. mcervantesv@hotmail.com

² Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Facultad de Ciencias de la Eléctronica, 18 Sur y Av. Sn. Claudio, Sn Manuel C.U. Puebla 72530. México. freyes@ece.buap.mx

³ Universidad Autónoma de Tlaxcala, Facultad de Ciencias Básicas, Ingeniería y Tecnología, Calzada Apizaquito s/n, Apizaco Tlaxcala. C.P. 90300. México. bdavila28@yahoo.com

plest aim in robot control and at the same time one of the most relevant issues in the practice of manipulators, the control can be by mean of suitable function such that fulfill the Lyapunov stability criteria, in this case the proposed function it must be positive definite with respect to position error $\tilde{\mathbf{q}}$, with derivatives partial continuous and it has to satisfying the stability conditions of Lyapunov. The dynamic model of robot manipulators with n -links in the absence of friction is given as follows:

$$\tau = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

where $\mathbf{q}$ is a $n \times 1$ vector of link and articular positions, $\dot{\mathbf{q}}$ is the $n \times 1$ vector of joint velocities of $n \times 1$, τ is the vector $n \times 1$ applied joint torques and forces, $M(\mathbf{q})$ is $n \times n$ symmetric positive definite manipulator inertial matrix, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ is the $n \times 1$ vector of centripetal and Coriolis torque, and $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ is the $n \times 1$ vector of gravitational torques obtained as the gradient of the robot potential energy $U(\mathbf{q})$ due to gravity, the $f(\dot{\mathbf{q}})$ is $n \times 1$ vector stands for the friction torque[9].

The following properties of the robot dynamics are important for stability analysis [10].

Property 1.

The matrix $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ and the time derivative of the inertia matrix $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfy:

$$\dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in R^n \quad (2)$$

Property 2.

The gravitational torque vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ is bounded for all $\mathbf{q} \in R^n$.

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| < k_g \quad k_g \in R_+$$

III. ALGORITHM OF CONTROL

The position control problem of robot manipulators is to design a controller to evaluate the torque applied to the joints so that the robot joint displacements tend asymptotically to a defined position joint regardless the initial conditions, in such a way that:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

In fact, the applied control torques should be sufficiently large to counteract the gravitational effects at the desired position $\mathbf{q}_d$, where $\mathbf{q}_d \in R^n$.

Motivated by the energy-shaping methodology[10][12], we propose in this paper a simple control algorithm for robot manipulators given by:

$$\tau = K_p \left[\frac{(2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}}} \right] - K_v \left[\frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}} \right] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4)$$

where K_p and K_v are $n \times n$ diagonal positive definite matrices and so-called proportional gain and derivative gain respectively, $K_p \frac{(2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}}}$ is the gradient of artificial potential energy induced by the controller, and $K_v \left[\frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}} \right]$ is a continuous dissipative function such that

$$K_v \left[\frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}} \right] = 0 \quad \text{if } \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \in R^n$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \left[\frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}} \right] > 0 \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \neq 0 \in R^n$$

Where, $\tilde{\mathbf{q}} \in R^n$, it is the position error between the manipulator robot's position and the desired position, defined as :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (5)$$

On the other hand

$$\frac{(2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{\mathbf{q}}}} = \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_1} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_2} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_n} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - 2/3}}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}} = \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_1} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_2} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_n} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_n}} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Substituting(6) and (7) in (4), the exponential proposed controller (EC) is in the following way:

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_1} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_2} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_n} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_1} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_2} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_n} - 2/3}{1 + (2/3)e^{\dot{\tilde{q}}_n}} \end{bmatrix} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (8)$$

With base in this EC of position control, we have to select the gain matrices of controller, so that this

guarantees his positioning in the desired configuration, with a position error that tends to zero as the time tends to infinite.

The closed-loop system equation obtained by substituting the control law (8) into the robot dynamics (1) leads to

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_1} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_2} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_n} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_1} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_2} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{(2/3)e^{\tilde{q}_n} - 2/3}{1+(2/3)e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

To carry out the stability analysis, we consider the following Lyapunov functions candidate:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

This function is positive definite, because the first term of this Lyapunov function candidate corresponds to the kinetic energy, which is a positive definite function in $\dot{\mathbf{q}}$ because the inertia matrix $M(\mathbf{q})$ is positive definite. the second term is a radially unbounded positive definite function in $\tilde{\mathbf{q}}$, therefore we can deduce that $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ is a positive definite function and radially unbounded.

We now computerize the time derivative of the Lyapunov function candidate (10) along the trajectories of the closed-loop equation to demonstrate that is definite negative, it can be written as

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix} \quad (11)$$

after some manipulations and considering the property of which the derived one from the position error is $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$, we get:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} -$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3})\tilde{q}_1}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1})} \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3})\tilde{q}_2}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2})} \\ \vdots \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3})\tilde{q}_n}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix} \quad (12)$$

substituting the value of the acceleration $\ddot{\mathbf{q}}$ of the equation of closed-loop (9) into (12), and considering that the desired position $\mathbf{q}_d$ is a constant, we get

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} - \\ &\quad \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \\ &\quad \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3})\tilde{q}_1}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1})} \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3})\tilde{q}_2}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2})} \\ \vdots \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3})\tilde{q}_n}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Now, applying the property 1 in the third term and fourth term of (13), we have that

$$\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (14)$$

by using this result in (13), we obtain the following equation

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3})\tilde{q}_1}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_1} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1})} \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3})\tilde{q}_2}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_2} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2})} \\ \vdots \\ \frac{(\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3})\tilde{q}_n}{\sqrt{\ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}) - \frac{2}{3}\tilde{q}_n} (1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Let us define s as

$$s = \ln(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{\mathbf{q}}}) - \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{q}} \quad (16)$$

substituting (16) inside the third term of (15), we get

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{s_1} \\ \vdots \\ \sqrt{s_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{\sqrt{s_1}(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{\sqrt{s_n}(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix} \dot{q}. \quad (17)$$

Note that, the matrix K_p is a diagonal positive definite matrix, and as the product of diagonal matrices is commutative, which can be rearranged in the following form:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{s_1} \\ \vdots \\ \sqrt{s_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{\sqrt{s_1}(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{\sqrt{s_n}(1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n})} \end{bmatrix} K_p \dot{q}. \quad (18)$$

in this way, we can simplify $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix}^T K_p \dot{q}. \quad (19)$$

Finally we obtain the result the time derivative of Lyapunov candidate function

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \begin{bmatrix} \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_1}} \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_2}} \\ \vdots \\ \frac{\frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}e^{\tilde{q}_n}} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (20)$$

Using the fact that the Lyapunov function candidate (10) is a globally positive definite function and its time derivative is a globally negative semi-definite function, we conclude that the equilibrium of the closed-loop system (9) is stable. Finally, we can use the LaSalle's invariance principle to demonstrate the global asymptotic stability of the equilibrium. Toward this end, let us defined the set Ω as

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\} \\ \Omega = \{ \tilde{q} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^n \}. \quad (21)$$

The unique invariant is $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T] \in \mathbb{R}^{2n}$. We conclude that this equilibrium is globally asymptotically stable.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

The algorithm proposed is tested in an experimental platform, this consists of a three degrees-of-freedom, direct-driver robot manipulator, that it has been designed and built at The Benemerita Universidad Autónoma de Puebla to research robot control algorithms; (see Fig. 1). It is a direct-drive manipulator robot consists of links made of aluminum and the joints are actuated by brushless direct drive servo actuators from Parker Compumotor to drive the joints without gear reduction. The servo actuators used in the experimental robot are in the Table 1. In order to compare the

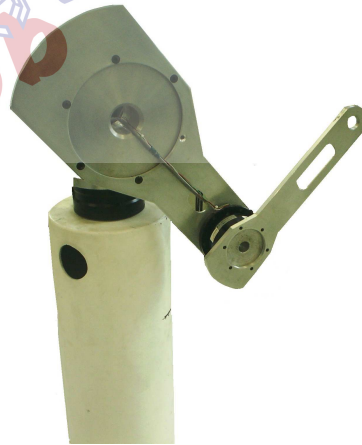


Fig. 1: Robot manipulator of three degrees-of- freedom.

performance of the controller presented here EC, develop experimental tests with the known PD controller

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad (22)$$

The control laws applied to the robot were the equation (8) and (22). The initial configuration of the

TABLE 1.
SERVO ACTUATORS OF THE ROBOT MANIPULATOR.

Link	Model	Torque [Nm]	p/rev
Base	DM-1015B-60	15	1024000
Shoulder	DM-1050A-115	50	1024000
Elbow	DM-1004C-115	4	1024000

robot manipulator was $q_1(0) = 0$ degrees, $q_2(0) = 0$ degrees and $q_3(0) = 0$ degrees, the initial conditions for the joint velocities are: $\dot{q}_1(0) = 0$ degrees/sec. $\dot{q}_2(0) = 0$ degrees/sec. $\dot{q}_3(0) = 0$ degrees/sec.

The desired final position was definite as $q_{d1}(t_f) = 45$ degrees, $q_{d2}(t_f) = 45$ degrees and $q_{d3}(t_f) = 90$ degrees, the considered time in the experiment to that the robot arrive to the final positions was $t_f = 5$ sec-onds.

The actual gains for the above initial conditions for EC after some experimental proof were chosen as

$$K_p = \begin{bmatrix} 10.0 & 0 & 0 \\ 0 & 54.0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

The gains for PD were selected as

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 1.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix} \text{ Nm/degrees.}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \text{ Nm-sec/degrees.}$$

The experimental results of EC and PD controllers are depicted in figures 2-5. We analyze the acting of the controllers in function of the position errors $\tilde{q}$ and the applied torques τ .

Fig. 2 shows that, as time evolves, the position errors $\tilde{q}$ tend to zero, in agreement with position control objective defined in equation (3), in this case we can see with regard to the tracking position error in the exponential controller was of approximately $\tilde{q}_1 = -0.02362 \pm 0.01181$ degree in $t = 1.637$ sec. $\tilde{q}_2 = -0.084375 \pm 0.001055$ degree in $t = 0.834$ sec. $\tilde{q}_3 = 0.025543 \pm 0.009613$ degree in $t = 1.160$ sec. The position is maintained until the end of the experiment. It can be concluded that the robot system moves fast and practically without overshoot toward the reference position q_d .

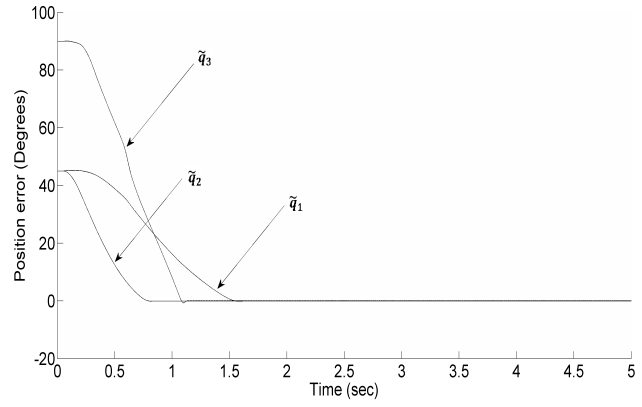


Fig. 2: Position error of EC controller.

Similarly, as shown in Fig. 3, the position error $\tilde{q}$ of PD controller falls with a tendency to zero, however, this presents a broad overshoot and when the experiment concludes his position error was several degrees $\tilde{q}_1 = -0.72399 \pm 0.000275$ degrees, $\tilde{q}_2 = 5.47241 \pm 0.00386$ degrees, $\tilde{q}_3 = 4.466492 \pm 0.001098$ degrees.

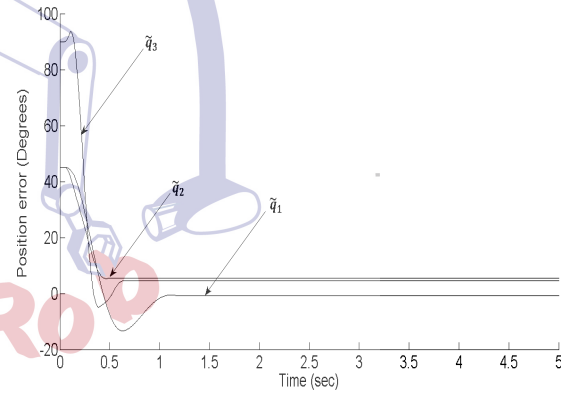


Fig. 3: Position error of PD controller.

The torques applied by the servo actuators to each joint are shown in Fig. 4 and Fig. 5, for the EC and PD controller respectively.

Fig. 4 shows that the maximum torques (τ_{max}) requested by the EC controller are: $\tau_{1max} = 3.094916$ Nm. $\tau_{2max} = 26.37836$ Nm. $\tau_{3max} = 2.296012$ Nm., which are within the capacity of the servo actuators according to table 1, guaranteeing their correct operation during the experiment. Fluctuations represent the adjustment made by the EC controller to achieve the desired position and maintain it.

As we can appreciate the values of the maximum torque applied by the PD controller are: $\tau_{1max} = 18.00$ Nm. $\tau_{2max} = 67.50$ Nm. $\tau_{3max} = 9.50$ Nm.,

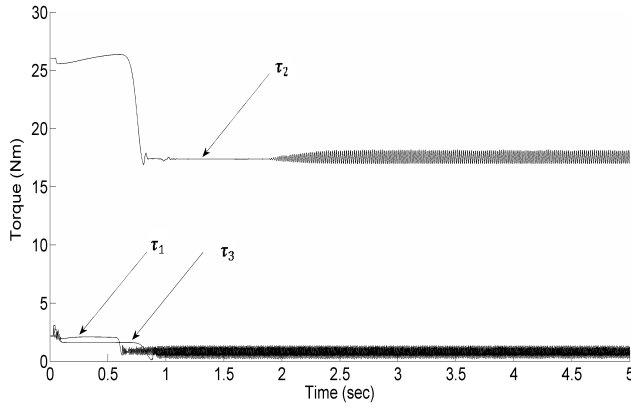


Fig. 4: Torque applied the robot by the EC controller.

as can see you in Fig. 5; they are bigger than the maximum torque values that can give the servo actuators according to table 1; therefore they work in the saturation condition during the first instants of the robot's displacement. Applied torque by the PD when the robot manipulator approaches to the desired position stays approximately constant to maintain the position.

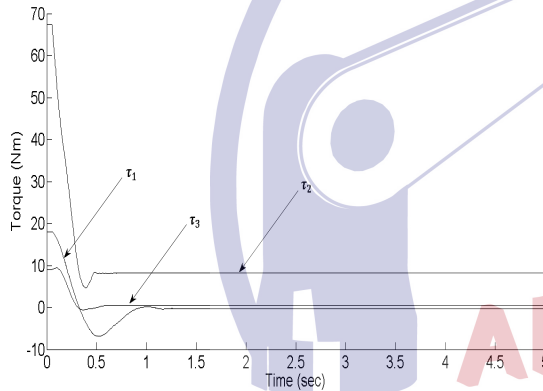


Fig. 5: Torque applied the robot by the PD controller.

Previous results do not allow us to properly compare the performance of proposed controller EC and PD controller. With this propose, the $\mathcal{L}_2$ norm criterion has error useful. The scalar value $\mathcal{L}_2$ norm of position error is given by:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 dt} \quad (23)$$

where $T_e \in \mathbb{R}_+$ is the duration of the experimental test, in our case, 5 seconds. A small $\mathcal{L}_2$ value represents a better controller performance.

The performance result of controllers is shown in Fig. 6. We can see that the lower value of $\mathcal{L}_2$ norm

corresponds to the EC-controller, considering these results, we can conclude that the exponential controller had a lightly bigger performance when compared using the scalar-valued $\mathcal{L}_2$ norm criterion.

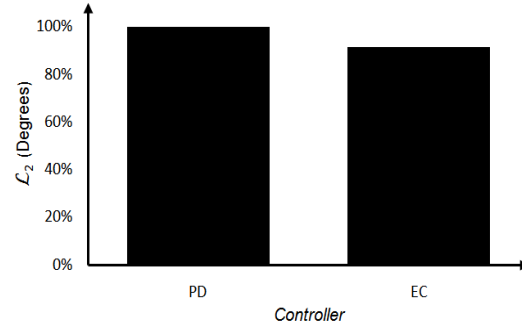


Fig. 6: Performance index of controllers.

V. CONCLUSIONS

In this paper, we have proposed a simple exponential controller to solve the set-point control of robot manipulator; through analysis presented we demonstrated that this controller approach leads to a closed-loop equilibrium point locally, asymptotically stable in Lyapunov sense.

The experimental performance of exponential controller was tested using a direct drive robot manipulator. The experimental results enabled us to verify the ability of the proposed control approach to perform position control; the proposed algorithm has better perform than popular PD algorithm in terms of convergence to desired position.

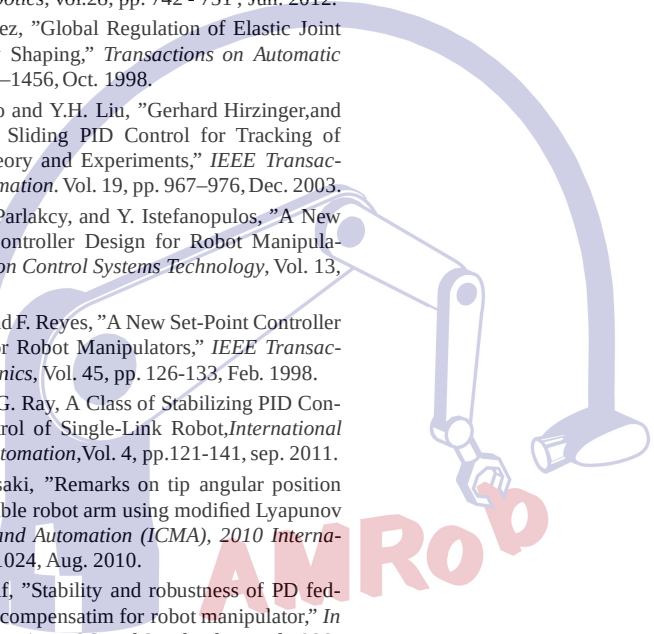
The difference in performance is not more since during the first moments of operation ec responds slowly compared to the PD, however has a higher positioning accuracy.

The scalar valued $\mathcal{L}_2$ norm provided a suitable index used to compare the performance of the proposed exponential controller with PD, which for the case presented herein, favors the exponential controller over the PD controller. The difference in performance is not more since during the first moments of operation ec responds slowly compared to the PD. The EC-controller has better performance than the PD in a 9.5%.

ACKNOWLEDGEMENT:

The Authors give thanks to the Interdisciplinary Center of Postgraduates, to Mechatronics Engineering Postgraduate of the Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla by their support for the realization of this work.

REFERENCES

- 
- [1] J. Kasac, B. Novakovic, D. Majetic, and D. Brezak, "Global Positioning of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints," *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 51, pp. 1035–1040, Jun. 2006.
 - [2] J. A. Ramirez, V. Santibañez, and R. Campa, "Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Vol. 16, pp. 1333–1341, Nov. 2008.
 - [3] F. Azenc, M. Malisoff, "Strict Lyapunov Function Constructions Under LaSalle Conditions With an Application to Lotka-Volterra Systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 55, pp. 841, Apr. 2010.
 - [4] R. Kelly, "Global Positioning of Robot Manipulators via PD Control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, pp. 934–938, Jul. 1998.
 - [5] M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulator," *ASME J. Dynamics Syst. measurement, and Control*, vol. 103, pp. 119–125, Jun. 1981.
 - [6] Y. C. Liu and N. Chopra, "Control of Robotic Manipulators Under Input/Output Communication Delays: Theory and Experiments," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 28, pp. 742 - 751, Jun. 2012.
 - [7] R. Kelly and V. Santibañez, "Global Regulation of Elastic Joint Robots Based on Energy Shaping," *Transactions on Automatic Control*. Vol. 43, pp. 1451–1456, Oct. 1998.
 - [8] V. Parra-Vega, S. Arimoto and Y.H. Liu, "Gerhard Hirzinger, and Prasad Akella, Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments," *IEEE Transactions on Robotic and automation*. Vol. 19, pp. 967–976, Dec. 2003.
 - [9] E. M. Jafarov, M. N. A. Parlakcy, and Y. Istefanopulos, "A New Variable Structure PID-Controller Design for Robot Manipulators," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13, pp. 122–130, Jan. 2005.
 - [10] V. Santibañez, R. Kelly, and F. Reyes, "A New Set-Point Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators," *IEEE Transactions on Industrial electronics*, Vol. 45, pp. 126–133, Feb. 1998.
 - [11] Leena G., 2K. B. Datta, 2G. Ray, A Class of Stabilizing PID Controllers for Position Control of Single-Link Robot, *International Journal of Control and Automation*, Vol. 4, pp. 121–141, sep. 2011.
 - [12] K. Takahashi and M. Sasaki, "Remarks on tip angular position control of single-link flexible robot arm using modified Lyapunov function," *Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on*, pp. 1024, Aug. 2010.
 - [13] S. Arimoto and Miyazaki, "Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulator," *In Robotics; Theory and application DSC*, Vol. 3. Edited F. Paul 1986.
 - [14] M. W. Spong, & M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, NY 1989.
 - [15] L. Sciavicco, & B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, Springer-Verlag, London 2005.



CONGRESO MEXICANO DE ROBÓTICA 2012
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA



LA ASOCIACIÓN MEXICANA DE ROBÓTICA
Y
LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

Otorga el presente reconocimiento a:

José Manuel Cervantes Vázquez

Por haber presentado el trabajo titulado:

Analysis of the Performance of a Controller for Robot Manipulators

En el XIV Congreso Mexicano de Robótica realizado en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la BUAP del 24 al 26 de octubre 2012.

H. Puebla de Z., a 24 de octubre de 2012


Dra. Karla Camarillo
Gómez
Presidenta de AMROB


M. C. Rodolfo Fernando
Porras Sánchez
Director FCE


Dr. Fernando Reyes Cortés
Presidente del Comité
Organizador
COMROB2012

Algoritmo para el Control de Posición Diseñado Mediante la Técnica del Moldeo de Energía

José Manuel Cervantes, Fernando Reyes

Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla/
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
21 Sur 1103 Colonia Santiago 72160, Puebla, México/
18 Sur y Av. Sn. Claudio, Sn Manuel C.U.72530, Puebla, México
mcervantesv@hotmail.com; freyes@ece.buap.mx

Jorge Bedolla

Instituto Tecnológico de Apizaco
Av. Instituto Tecnológico s/n, Apizaco, Tlaxcala, México
ljbedolla@cenidet.edu.mx

RESUMEN

En el presente trabajo se detalla el procedimiento empleado para el diseño de un algoritmo de control para el control de posición de robots manipuladores, mediante la técnica del moldeo de energía. Se determina la función propuesta para la ley de control. Mediante la propuesta de una función candidata de Lyapunov, el método directo de Lyapunov y el teorema de invariancia de LaSalle, se realiza el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado. Se presentan resultados de la simulación del algoritmo diseñado para dos posiciones articulares, los resultados son analizados con respecto al error de posición y el valor del par requerido para producir el movimiento, a la vez que se realiza un análisis comparativo con respecto al control proporcional derivativo, ambos se simulan bajo las mismas condiciones.

PALABRAS CLAVE: algoritmo de control, control de posición, función candidata de Lyapunov, robot antropomórfico, estabilidad asintótica, moldeo de energía.

1 INTRODUCCIÓN

El control de posición, también llamado regulación, es uno de los más simples controles de los robots y al mismo tiempo es uno de los más relevantes en la programación de los manipuladores. En el control de posición la finalidad es el posicionamiento del robot en una posición deseada, sin importar el estado inicial del mismo. La aplicación de tal control se ha estudiado y tiene diversas aplicaciones dentro del ámbito industrial, especialmente en ambientes donde el robot no tiene una interacción con su entorno, y que además desarrollan su trabajo con un buen desempeño.

El problema de regulación ha sido abordado por algunos investigadores en los últimos años[1]-[11]. El problema de regulación puede ser planteado de diversas maneras, particularmente tiene que ver con los valores que se pueden medir durante las pruebas experimentales, dentro de las cuales las más comunes son el par aplicado, la posición y velocidad de los servoactuadores de las articulaciones de los robots[1]-[4]. Particularmente en el presente trabajo se considera el análisis en función de la posición articular y del par aplicado en las articulaciones.

El método del moldeo de energía es una técnica que se puede emplear para el diseño de algoritmos de control para robots manipuladores, en donde se moldea la energía potencial artificial suministrada al robot para cumplir el objetivo del control de posición, tal metodología fue propuesta por Takegaki and Arimoto en los años 80's [11]. Se han desarrollado trabajos de investigación y

propuesto algoritmos de control de posición mediante la propuesta de funciones diseñadas mediante moldeo de energía, como las desarrolladas en [3] y [6]. Mediante los teoremas de Lyapounov, es posible determinar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de tales algoritmos de control, mediante la propuesta de una función candidata de Lyapunov[7]; como la propuesta de una función estricta de Lyapunov es difícil, se puede determinar para algunas clases de sistemas de funciones que sus derivadas temporales a lo largo de su trayectoria sean semidefinidas negativas, en las cuales mediante el cumplimiento de algunas desigualdades matemáticas se puede demostrar que poseen estabilidad asintótica global, lo cual se hace mediante el teorema de invariancia de LaSalle[4].

Motivado por el interés práctico de la amplia variedad de familias de algoritmos de control que pueden ser diseñadas mediante el moldeo de energía[7], aunado a la versatilidad de los teoremas de estabilidad de Lyapunov, es que en el presente trabajo desarrollamos la propuesta de un algoritmo de control de posición para robots manipuladores, estableciendo el análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio, simulando su comportamiento para valorar su desempeño en comparación con el conocido control proporcional derivativo (PD).

El presente trabajo está estructurado de la siguiente forma: en la sección 2 presentamos un resumen del modelo dinámico de un robot manipulador y de algunas de sus propiedades. En la sección 3 se desarrolla el análisis del algoritmo propuesto mediante el moldeo de energía. En la sección 4 presentamos los resultados de la simulación del algoritmo de control. Finalmente, presentamos algunas conclusiones importantes en la sección 5.

2 PRELIMINARES

El modelo dinámico para un robot manipulador con articulaciones de revolución es descrito mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange [6]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} + g(q) \quad (1)$$

donde $q \in R_+$ es el vector de coordenadas articulares de tamaño $n \times 1$, $\dot{q} \in R_+$ es el vector de velocidades articulares de magnitud $n \times 1$, $M(q) \in R_+$ es la matriz de inercia del manipulador, es simétrica y definida positiva de tamaño $n \times n$, $C(q, \dot{q}) \in R^n$ es la matriz de fuerzas Centrífugas y de Coriolis de tamaño $n \times n$, $B \in R^{n \times n}$ es una matriz diagonal semidefinida positiva, corresponde a los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones, $g(q) \in R^n$ es el vector de pares gravitacionales, $\tau \in R^n$ es el vector de pares aplicados a cada una de las articulaciones del robot.

Para simplificar el proceso de análisis y comprensión de la ley de control, resulta conveniente la aplicación de las siguientes propiedades, mismas que facilitarán la demostración del cumplimiento de la condición de estabilidad [2].

Propiedad 1: La matriz $M(q)$ es una matriz definida positiva que satisface $\lambda_{\min} I \leq M(q) \leq \lambda_{\max} I \quad \forall q \in R^n$, $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$ son constantes positivas y I es la matriz identidad de dimensión n .

Propiedad 2: Mediante el uso del símbolo de Christoffel y considerando que la matriz de inercia es simétrica y definida positivamente, en la cual sus componentes son función de q , en el cálculo de $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ se cumple:

$$q^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] q = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in R^n \quad (2)$$

Propiedad 3: El vector de pares gravitacional $g(q)$ está acotado para todo $q \in R^n$.

3 CONTROLADOR PROPUESTO

En la metodología del moldeo de energía la función de control propuesta debe ser definida positiva y acotada, para tal caso, se propone el siguiente algoritmo de control, el cual contiene una función exponencial (AFE):

$$\tau = K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - K_v \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) + g(q) \quad (3)$$

donde

$K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right)$ es la energía potencial artificial; es decir, es la energía de diseño, que es una función diferenciable y definida positiva, el vector J es un término de ajuste que se introduce en la ley de control para que la función tenga un mínimo y único global en el error de posición $\tilde{q} = 0 \in R^n$. El vector $J \in R^{n \times 1}$ es un vector unitario multiplicado por la constante $\sin(\pi/4)$; es decir:

$$J = \sin(\pi/4) \begin{bmatrix} 1_1 \\ \vdots \\ 1_n \end{bmatrix}. \quad (4)$$

La ganancia proporcional $K_p \in R^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva.

$K_v \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right)$ es el freno mecánico. K_v es la ganancia derivativa, también definida positiva y $g(q)$ es el término de compensación de gravedad.

La ecuación de lazo cerrado correspondiente a la dinámica del robot (1) y la ecuación de control del moldeo de energía (3), en términos de las variables de estado para el control de posición $[\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}}^T]^T \in R^{2n}$ es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} \left[K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - K_v \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (5)$$

La ecuación (5) resulta ser una ecuación diferencial autónoma, en la cual se debe realizar el análisis para determinar la existencia y unicidad del punto de equilibrio, para ello se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

El término $-\dot{\tilde{q}}$ en la ecuación de lazo cerrado cumple con $-\dot{\tilde{q}} = -I\dot{\tilde{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0$ para todo $I \in R^{n \times n}$; las ganancias K_p y K_v , son definidas positivas; como $\dot{\tilde{q}} = 0 \in R^n$, entonces la matriz $C(q, \dot{q})$, cumple con $C(q, \dot{q}) = 0 \in R^{n \times n}$; si además consideramos el hecho de que la función $K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right)$ es definida positiva y en donde $K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0$, entonces se tiene que el punto de equilibrio existe y es único.

La estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov, se demuestra mediante la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} M(q)\dot{\tilde{q}} + K_p \left(\text{ctgh}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} \right) - \tilde{q} J \right) \quad (6)$$

En la función $V(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q})$, en el primer término la matriz de inercia $M(q)$ es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector del error de posición $\tilde{q}$; considerando además que cuando $\tilde{q}_i = 0$, el valor de $\text{ctgh}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}_i}}} \right) > 0$ y que la ganancia proporcional K_p es positiva, podemos establecer con base en tales argumentos, que la función candidata de Lyapunov es de definida positiva.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov $V(\dot{q}, \tilde{q})$ a lo largo de la trayectoria del sistema de lazo cerrado se detalla en las ecuaciones (7) y (8):

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{d}{dt} K_p \left(\text{ctgh}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} \right) - \tilde{q} J \right) \quad (7)$$

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + K_p \left(\frac{\dot{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \dot{\tilde{q}} \right). \quad (8)$$

Considerando que la derivada del error de posición es $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ debido a que la posición deseada q_d es una constante, tenemos:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) \dot{q}. \quad (9)$$

El valor de la aceleración $\ddot{q}$ lo obtenemos de la ecuación de lazo cerrado (5) y lo sustituimos dentro de (9), con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= \dot{q}^T K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - \dot{q}^T K_v \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} - \dot{q}^T B \dot{q} + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - K_p \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) \dot{q} \end{aligned} \quad (10)$$

En donde los términos tercero y quinto forman la propiedad de antisimetría del modelo dinámico (1)

$$-\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} = \dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0. \quad (11)$$

Considerando lo establecido en (11) y tomando en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}}$ es una matriz diagonal positiva y que K_p es también una matriz diagonal positiva, y como el producto entre matrices diagonales es conmutativo se pueden simplificar los términos primero y último de (10), con lo cual la derivada de $V(\dot{q}, \tilde{q})$ resulta:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = -\dot{q}^T K_v \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\tilde{q}}}} - J \right) - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0 \quad (12)$$

Usando el hecho de que la función candidata de Lyapunov es una función definida globalmente positiva y que su derivada temporal es semidefinida negativa podemos concluir que el punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (5) posee estabilidad global.

Empleando el principio de invariancia de LaSalle's, se puede probar que posee estabilidad asintótica global, para lo cual se tienen:

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : V(\tilde{q}, q) = 0 \\ &= \tilde{q} \in \mathbb{R}^n, q = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (13)$$

En donde el único invariante es $[\tilde{q}^T, \tilde{q}^T] = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Con lo cual se demuestra que la derivada de la función es definida negativa, por lo que el origen es globalmente asintóticamente estable.

4 EJEMPLO DE SIMULACIÓN

La simulación que presentamos a continuación nos permite valorar el desempeño del algoritmo de control propuesto, con respecto de un algoritmo ampliamente conocido que es el proporcional derivativo (PD). La simulación se realizó en Simnon_PCW 2.0.

Las simulaciones se realizaron con un tiempo de duración de 5 segundos y para dos diferentes posiciones, correspondiendo la posición inicial a $q(0) = 0$ grados, los valores de las posiciones articulares deseadas $q_{d1}(t = 5\text{ s}) = 45$ grados, $q_{d2}(t = 5\text{ s}) = 135$ grados.

Para la simulación se empleó el algoritmo AFE (3), mientras que para el control proporcional derivativo:

$$\tau = K_p \ddot{q} + K_v \dot{q} + g(q) \quad (14)$$

Se realizaron múltiples corridas de las simulaciones, dado que en ellas se sintoniza el valor de las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v , de tal forma que se obtenga un desplazamiento rápido hacia la posición deseada, y con un error de posición lo más cercano a cero, factores esenciales para valorar el desempeño de un controlador.

Los resultados de las simulaciones para ambos algoritmos de control se presentan en las Figuras 1 a 5. En donde, se han graficado para cada posición articular deseada el error de posición y el par aplicada en la articulación para producir el desplazamiento deseado.

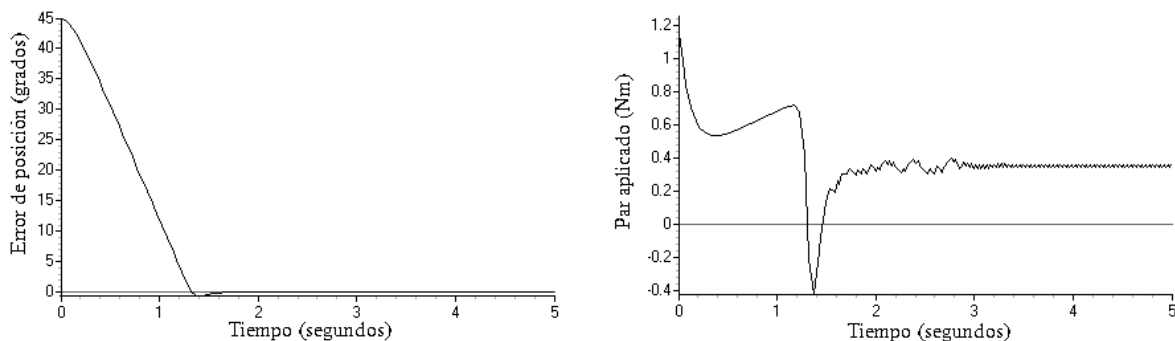


Figura 1. Error de posición y par aplicado mediante el algoritmo AFE para $q_d = 45$ grados

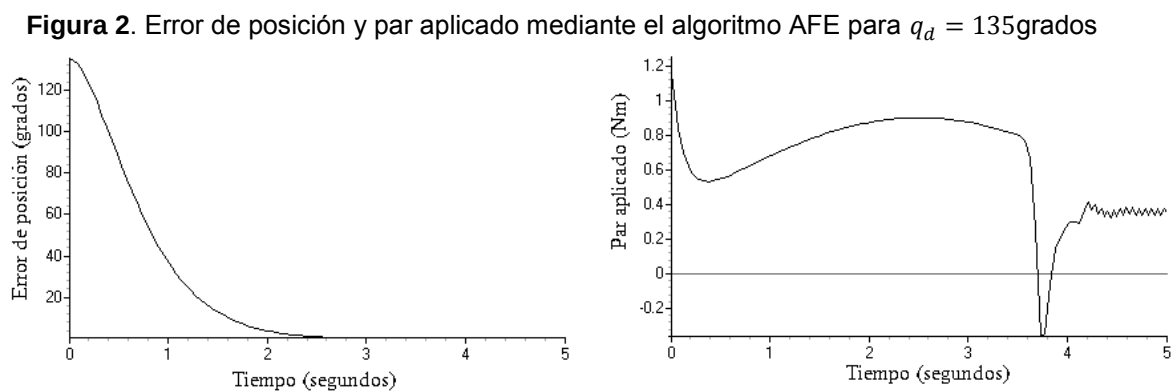


Figura 2. Error de posición y par aplicado mediante el algoritmo AFE para $q_d = 135$ grados

En la Figura 1, podemos apreciarse que el error de posición es pequeño ($\tilde{q}_{45} = 0.096$ grados), mismo que alcanza en un tiempo de $t = 1.4$ segundos y que mantiene hasta el final de la simulación, sin embargo se presenta un ligero sobre tiro de 0.7 grados; por otra parte el valor del par aplicado para el movimiento requerido inicialmente es de 1.23 Nm, mientras que el valor final

es de 0.35 Nm. Las ligeras oscilaciones del par aplicado se deben a que el controlador trata de llegar a la posición deseada.

Una situación similar se presenta con la posición deseada de $q_d = 135$ grados, según se aprecia en la Figura 2, en donde se puede observar que el tiempo de respuesta del algoritmo es un poco más grande, alcanzando un error de posición de $\tilde{q}_{135} = 0.10092$ grados en tiempo $t = 2.5$ segundos; con respecto al valor del par aplicado, se aprecia que presenta oscilaciones en los primeros instantes del movimiento y posteriormente estas disminuyen en su amplitud hasta que prácticamente permanece constante.

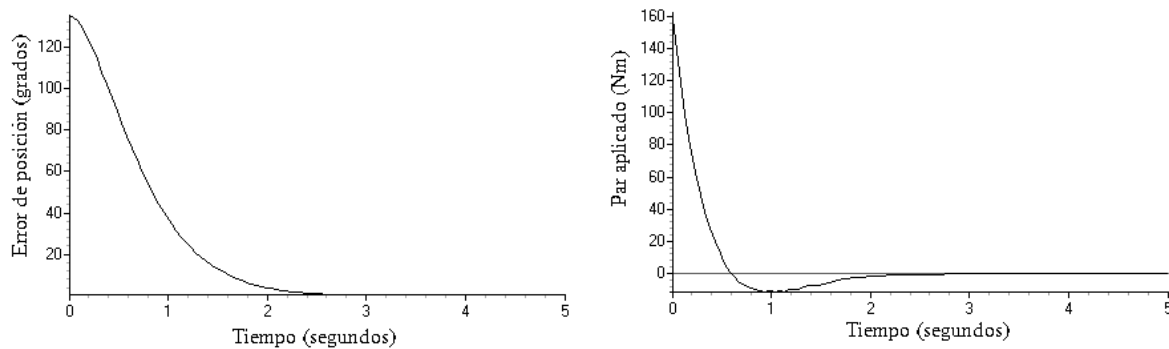


Figura 3. Error de posición y par aplicado mediante el algoritmo PD para $q_d = 45$ grados

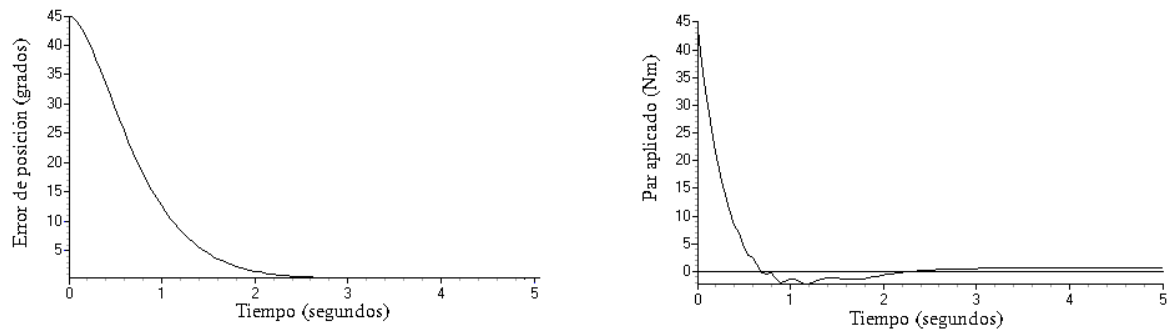


Figura 4. Error de posición y par aplicado mediante el algoritmo PD para $q_d = 135$ grados.

En la Figura 3, el error de posición alcanzado por el control PD para $\tilde{q}_{45} = 0.2356$ grados, en un tiempo $t = 2.7$ segundos, mismo que mantiene hasta el final de la simulación, no se presentan sobretiros; sin embargo, podemos ver que el valor inicial del par solicitado por el control es de $\tau = 44$ Nm, y el final de $\tau = 0.53$ Nm. En la posición de $q_d = 135$ grados, según la Figura 4, el comportamiento es similar, el error de posición final es de $\tilde{q}_{135} = 0.2356$ grados, mismo que alcanzados en un tiempo $t = 2.6$ segundos y se mantuvo hasta el final, el par inicial $\tau = 150$ Nm y el final de $\tau = 0.33$ Nm.

De los datos anteriores, se resalta el hecho de que los errores de posición del controlador AFE son menores, para $\tilde{q}_{45}$ en un 59.2% y para $\tilde{q}_{135}$ en 57.1% que los del PD, con respecto al tiempo de respuesta de igual manera es ligeramente más rápida la del controlador AFE que la del PD. En referencia al valor del par inicial solicitado, tenemos que el controlador PD demanda un par muy grande comparado con el solicitado por el AFE para producir el mismo movimiento, lo que demuestra que el controlador propuesto tiene un mejor desempeño.

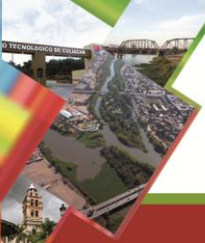


5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos empleado la técnica del moldeo de energía para la generación de un algoritmo de control, para el control de posición de robots manipuladores. En el algoritmo generado hemos demostrado que posee estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Mediante simulación se probó que el algoritmo AFE posee un mejor desempeño, mejorando la acción de control en un promedio de 58% con respecto al PD; además de tener un tiempo de respuesta menor. Los valores de los pares solicitados por el PD son muy altos, lo que excedería en general la capacidad real de los actuadores de un robot, mientras que el AFE para realizar el movimiento deseado demanda pares pequeños, lo que permite establecer que presenta una acciones control acotada. Las investigaciones sobre algoritmos de control generados con la técnica del moldeo de energía son muy importantes, debido a que esta permite generar grandes familias de algoritmos, los cuales deben ser estudiados para buscar aquellos que presente los mejores desempeños para ser aplicados en la solución del problema de control de posición de robots manipuladores.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT 180579. Control de Robots Manipuladores: Teoría y aplicaciones



REFERENCIAS

- [1] Alvarez, J., Santibañez, V., Campa, R. Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2008; 16, 1333–1341. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202
- [2] Arteaga, M., Kelly, R. Robot control Without Velocity Measurements: New Theory and Experimental Results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2004; 20, 297–308. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202.
- [3] Jafarov, E., Parlakci, M., Istefanopulos, Y. A New Structure PID-Controller Design for Robot Manipulators. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*. 2005; 13, 122–130. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202.
- [4] Josip, K., Branko, N., Dubravko, M., Danko, B. Global Position of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 2006; 51, 1035–1040. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202.
- [5] Karayiannidis, Y., Doulgeri, Z. Model-free robot joint position regulation and tracking with prescribed performance guarantees. *Robotics & Autonomus Systems*. 2012; 60, 214–226. DOI: 10.1016/j.robot.2011.10.007.
- [6] Kelly, R. Global Regulation of Elastic Joint Robots Based on Energy Shaping. *IEEE Transaction on Automatic control*. 1998; 43, 1451–1456. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202.
- [7] Leena, G., Datta, K., Ray, G. A Class of Stabilizing PID controllers for Position Control of Single-Link Robot. *International Journal of control and Automation*. 2011; 4, 127–142.
- [8] Liu, B., Lin, F., Tian, B. A set of Global stable N-PID Regulators for Robot Manipulators. *Engineering*. 2010; 2, 118–123. DOI: 10.423/eng.2010.22017
- [9] Orlov, Y., Aguilar, L. Non-smooth –position control of mechanical manipulator with frictional joints. *International Journal of control*. 2004; 77, 1062–1069. DOI: 101080/002071704000273087.
- [10] Radek, M., Roman, P., Libor, P. Parametric and unstructured approach to uncertainty modeling and robust stability analysis. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2011; 5, 1011–1018. DOI: 10.3923/ijbc.2010.190.202.
- [11] Takegaki, M. and Arimoto, S. A new feedback method for dynamic control of manipulators, *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*. 1981; 103, 119–125.



SOMI XXVII

Congreso de Instrumentación

Culiacán, Sinaloa, del 29 al 31 de octubre de 2012

El Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico
de la Universidad Nacional Autónoma de México y
el Instituto Tecnológico de Culiacán

Otorgan la presente

CONSTANCIA



CCADET
CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO



a: José Manuel Cervantes Vázquez, Fernando Reyes Cortés, Jorge Bedolla Hernández

Por haber presentado en el SOMI XXVII Congreso de Instrumentación su trabajo:

ALGORITMO PARA CONTROL DE POSICIÓN DISEÑADO
MEDIANTE LA TÉCNICA DE MOLDEO DE ENERGÍA

Dr. José Manuel Saniger Blesa
PRESIDENTE DEL COMITÉ ORGANIZADOR

Algoritmo para control de posición de robots manipuladores con acciones acotadas

José M. Cervantes, Fernando Reyes, Marcos Bedolla

Resumen — En este artículo se presenta un nuevo algoritmo de control de posición de robots manipuladores, el cual fue diseñado mediante la técnica del moldeo de energía, y basado en acciones acotadas. Se muestra el análisis de estabilidad del punto de equilibrio mediante el método directo de Lyapunov. Se presentan resultados de los experimentos realizados en un robot manipulador de transmisión directa de tres grados de libertad. El análisis comparativo del desempeño del algoritmo propuesto contra el proporcional derivativo es presentado, el cual muestra que el nuevo controlador posee un adecuado desempeño, mejorando la acción de control del PD.

Palabras Clave— Algoritmo de control, control de posición, estabilidad asintótica, función de Lyapunov, moldeo de energía, robot manipulador.

Abstract— In this article a new position control algorithm for robot manipulators is presented, which is designed by energy-shaping methodology and based on bounded actions. A stability analysis for equilibrium point is carried out by means of Lyapunov's direct method. Experimental results are presented in a direct-drive, three-degree-of-freedom robot manipulator. A comparative analysis of performance between the proposed algorithm and the proportional derivative regulator is presented, which shows that the new controller has an adequate performance, improving the capabilities of the PD.

Keywords—Algorithm of control, asymptotic stability, energy-shaping, Lyapunov function, position control, robot manipulator.

I. INTRODUCCIÓN

EL control de posición, es uno de los más simples controles aplicables a los robots y al mismo tiempo es uno de los más relevantes en la programación de los robots manipuladores.

El problema del control de posición consiste en la ubicación del robot manipulador en una posición deseada, sin importar la posición inicial en la cual se encuentre, tal problema ha sido abordado en los últimos años, por ejemplo

en [1]-[9]. El control de posición, también conocido como regulación, tiene diversas aplicaciones dentro del ámbito industrial, de manera relevante en ambientes de trabajo donde el robot no requiere de una interacción física con su medio ambiente, ejemplos de tales aplicaciones son los procesos de pintura y soldadura.

El problema de control de posición puede ser planteado de varias formas, las cuales tienen que ver principalmente con las variables a medir durante el desarrollo de los experimentos. Las variables más frecuentes son: la posición articular, velocidad y el par aplicado a las articulaciones, obtenidas de los servo-actuadores ubicados en las articulaciones del robot. En el presente trabajo se considera como las variables a medir la posición articular y los pares aplicados para producir el desplazamiento del robot.

Se hace uso de la técnica del moldeo de energía para el diseño de familias extensas de algoritmos de control para el control de posición de robots manipuladores; en donde se moldea la energía potencial artificial suministrada al robot para cumplir el objetivo del control de posición. Dicha técnica fue propuesta por Takegaki and Arimoto en los años 80's [8]. Mediante el uso de la técnica del moldeo de energía se han propuesto algoritmos de control con acciones acotadas y con acciones no acotadas, por ejemplo en [3], [6]. La citada técnica requiere del uso de los teoremas de Lyapunov para la determinación de la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de los algoritmos de control diseñados. La demostración puede hacerse mediante la propuesta de una función candidata de Lyapunov[7]; como la propuesta de una función estricta de Lyapunov es difícil, se puede determinar para algunas clases de sistemas, funciones que su derivada temporal a lo largo de su trayectoria sean semidefinidas negativas, en las cuales mediante el cumplimiento de algunas desigualdades matemáticas se puede demostrar que poseen estabilidad asintótica global, lo cual se hace mediante el teorema de invariancia de LaSalle[6].

Debido a la amplia variedad de los algoritmos de control que se pueden diseñar con la técnica del moldeo de energía [1], en el presente trabajo se desarrolla la propuesta de un algoritmo de control con acciones acotadas, para lo cual se introduce una función continuamente derivable y acotada en la ley de control, lo que permite mantener los valores de los pares aplicados en las articulaciones dentro de los límites

José Manuel Cervantes Vázquez. Departamento de Mecatrónica, Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, Puebla, MEX (e-mail: mcervantesv@hotmail.com).

Fernando Reyes Cortés. Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, MEX (e-mail: freyes@ece.buap.mx).

Marcos Bedolla Hernández. Departamento de Metal-Mecánica, Instituto Tecnológico de Apizaco, Tlaxcala, MEX (e-mail: mbedollah@hotmail.com).

físicos de los servo-actuadores del robot manipulador empleado para las pruebas experimentales.

El artículo está estructurado de la siguiente forma: en la sección II, se presenta un resumen del modelo dinámico del robot y de algunas de sus propiedades. En la sección III, se presenta el controlador propuesto y el desarrollo de análisis de estabilidad del punto de equilibrio empleando el teorema de Lyapunov. En la sección IV, se presenta los resultados de las pruebas experimentales. Finalmente, se ofrecen las conclusiones en la sección V.

II. PRELIMINARES

El modelo dinámico para un robot manipulador con articulaciones de revolución en ausencia de fricción es descrito mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, que en su forma compacta y con la notación más ampliamente utilizada en robótica es [9]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (1)$$

donde q es el vector de tamaño $n \times 1$ de coordenadas articulares, τ es de tamaño $n \times 1$, es el vector de pares aplicados a las articulaciones del robot; $\dot{q}$ es el vector $n \times 1$ de velocidades articulares; $M(q)$ es la matriz de inercia del manipulador, es simétrica y definida positiva de tamaño $n \times n$; $C(q, \dot{q})$ es la matriz de pares debidos a las fuerzas Centrípetas y de Coriolis de tamaño $n \times n$; $g(q)$ es el vector de pares gravitacionales de $n \times 1$ [10].

Para facilitar la demostración del cumplimiento de la condición de estabilidad, la ecuación de movimiento (1), tiene las siguientes propiedades importantes [4].

Propiedad 1: La matriz $M(q)$ es una matriz definida positiva que satisface:

$$\lambda_{\min} I \leq M(q) \leq \lambda_{\max} I \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

$\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$ son constantes positivas y I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Propiedad 2: Mediante el uso del símbolo de Chistoffel y considerando que la matriz de inercia es simétrica y definida positivamente, en la cual sus componentes son función de q , en el cálculo de $M(q) - 2C(q, \dot{q})$ se cumple

$$q^T [M(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

III. CONTROLADOR PROPUESTO CON ACCIONES ACOTADAS

Recordando que el problema de control de posición global radica en el diseño de un controlador que aplique un par τ a las articulaciones, de tal manera que los desplazamientos articulares q tiendan asintóticamente a una posición constante deseada q_d , sin importar las condiciones iniciales $q(0)$ y

$\dot{q}(0)$.

De acuerdo a la técnica del moldeo de energía se propone que sea $B = \frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha$ y $D = \frac{e^q}{\sqrt{1+e^{2q}}} - \alpha$ para establecer la siguiente ley de control:

$$\tau = K_p B - K_v D + g(q) \quad (3)$$

donde K_p y K_v son matrices diagonales definidas positivas de tamaño $n \times n$, $\tilde{q}$ es el error de posición articular, el cual está definido por $\tilde{q} = q_d - q$, y α es una constante.

La ecuación de lazo cerrado correspondiente a la dinámica del robot (1) y la ecuación de la ley de control (3), en términos de las variables de estado para el control de posición $[\tilde{q}^T, \dot{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p B - K_v D - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (4)$$

La ecuación (4) resulta ser una ecuación diferencial autónoma. A continuación se desarrolla el análisis para determinar la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado, tomando en cuenta lo siguiente:

El término $-\dot{q}$ en la ecuación de lazo cerrado satisface $-\dot{q} = -I\dot{q} = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$ para todo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$; además, las ganancias K_p y K_v son definidas positivas y considerando que $\dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la matriz $C(q, \dot{q})$ cumple con $C(q, \dot{q}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ por último, considerando el hecho de que el primer termino de (3) es definido positivo, en donde se tiene $B = 0$ si y sólo si $\tilde{q} = 0$ para lo cual se requiere que $\alpha = 1/\sqrt{2}$, lo mismo sucede en $D = 0$ si y sólo si $q = 0$, entonces se tiene que el punto equilibrio existe y es único.

La estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov, se demuestra mediante la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(q, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \begin{bmatrix} \sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\sinh^{-1}(e^q) - \delta - \alpha q} \end{bmatrix} \quad (5)$$

El primer termino de $V(q, \tilde{q})$ corresponde a la matriz de inercia, la cual es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, el cual también es una función definida positiva con respecto al vector del error de posición $\tilde{q}$. La constante δ se ha incorporado como termino de ajuste, para que al momento de evaluar la función del seno hiperbólico inverso sea $\sinh^{-1}(1) = \delta$ si $\tilde{q} = 0$; para que de esta forma la función de la energía potencial al ser evaluada

en cero sea cero.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov $V(q, \tilde{q})$ a lo largo de la trayectoria del sistema de lazo cerrado se detalla en las ecuaciones (6) y (7):

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}} \right]^T K_p \left[\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}} \right] \quad (6)$$

En donde al desarrollar la derivada temporal del tercer término tenemos:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \left[\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}} \right]^T K_p \left[\frac{1}{\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}}} \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right) \right] \tilde{q} \quad (7)$$

Considerando el hecho de que K_p es una matriz diagonal y que el tercer factor del tercer miembro derecho de (6) también es una matriz diagonal, y tomando en cuenta que el producto entre matrices diagonales es conmutativo, tenemos:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \left[\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}} \right]^T \left[\frac{1}{\sqrt{\sinh^{-1}(e^{\tilde{q}}) - \delta - \alpha \tilde{q}}} \left(\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right) \right] K_p \tilde{q} \quad (8)$$

Simplificando (8) y considerando que la derivada del error de posición es $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ debido a que la posición deseada q_d es una constante, se obtiene:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right]^T K_p \tilde{q} \quad (9)$$

De la ecuación de lazo cerrado (4), obtenemos el valor de la aceleración $\ddot{q}$ y lo sustituimos en (9), resultando:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T [K_p B - K_v D - C(q, \dot{q})] \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right]^T K_p \tilde{q} \quad (10)$$

Desarrollando las operaciones y sustituyendo los valores de B y D , se tienen lo siguiente:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = \dot{q}^T K_p \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right] - \dot{q}^T K_v \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right] - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right]^T K_p \tilde{q} \quad (11)$$

Agрупando los términos tercero y cuarto de (11) de tal forma que se pueda aplicar la primera propiedad del modelo

dinámico, se tiene:

$$-\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} = \dot{q}^T [M(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0 \quad (12)$$

Sustituyendo el resultado de (12) en (11), y simplificando los términos semejantes, obtenemos el resultado final de la derivada de la función candidata.

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = -K_v \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right] \quad (13)$$

Note que cuando se tiene $\tilde{q} = 0$ en (13), el valor de la derivada es $\dot{V}(q, \tilde{q}) = 0$, por lo tanto la derivada de la función candidata es semidefinida negativa; es decir:

$$\dot{V}(q, \tilde{q}) = -K_v \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right] \leq 0. \quad (14)$$

En consecuencia se cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, quedando con ello demostrada la estabilidad del punto de equilibrio de (4).

Dado que (4) es una ecuación diferencial autónoma, se puede aplicar el teorema de LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

$$\Omega = \left[\begin{matrix} \tilde{q} \\ q \end{matrix} \right] \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, q) = 0 \Leftrightarrow q = 0 \wedge \tilde{q} \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

Note que $\dot{V}(q, \tilde{q}) = 0$, si $q = 0$ y $\tilde{q}$ puede ser cualquier vector, para que la solución de la ecuación de lazo cerrado pertenezca a Ω se requiere que $q(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Puesto que $K_p \left[\frac{e^{\tilde{q}}}{\sqrt{1+e^{2\tilde{q}}}} - \alpha \right] = 0$ solo si $\tilde{q} = 0$, se tiene

que el máximo conjunto de invariantes que puede existir en Ω es: $[\tilde{q}, q]^T = [0, 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Con lo cual se demuestra que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global

IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se desarrollaron una serie de experimentos en una plataforma experimental, construida en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, consistente de un robot manipulador de tres grados de libertad de transmisión directa. En la Tabla 1, se presentan algunas de las características de los servo actuadores de las articulaciones del robot. Los datos de la posición articular se obtienen mediante un encoder incremental instalado en cada uno los motores que mueven las articulaciones.

El algoritmo propuesto se probó en la plataforma con la siguiente configuración inicial: base $q_1(0)=0$ grados; hombro $q_2(0)=0$ grados; codo $q_3(0)=0$ grados, y como posición final deseada: base $q_1(t=5)=45$ grados; hombro $q_2(t=5)=135$ grados; codo $q_3(t=5)=180$ grados. Los datos anteriores son

programados junto con la ley de control en el robot.

TABLA I
CARACTERÍSTICAS DE LOS SERVO ACTUADORES DEL ROBOT.

Eslabón	Modelo	Torque [Nm]	puntos/revolución
Base	DM-1015B-60	15	2621440
Hombro	DM-1050A-115	50	4096000
Codo	DM-1004C-115	4	2621440

Después de realizar múltiples experimentos se obtuvieron las ganancias adecuadas, lo que permitió obtener un buen desempeño del algoritmo de control.

$$K_p = \begin{bmatrix} 9.1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} Nm$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5.11 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} Nm$$

De las pruebas experimentales se obtuvieron dos archivos de datos por cada articulación, uno de las distintas posiciones articulares que el robot tomó durante su desplazamiento de la posición inicial a la posición final deseada, y otro de los torques aplicados por el servo actuador en la articulación.

Los datos obtenidos se grafican mediante el Software Matlab R2008b. Las graficas obtenidas corresponden al error de posición de la articulaciones del robot y del torque aplicado por los servo actuadores en cada articulación, ver Fig. 1 y Fig. 2.

La Fig. 1 muestra la evolución del error de posición $\tilde{q}$ de las articulaciones a lo largo de los 5 segundos de duración del experimento, se observa como el error $\tilde{q}$ tiende a cero conforme transcurre el tiempo; sin embargo al final del experimento los valores de $\tilde{q}$ en grados [°] para cada posición articular no son cero:

$$\tilde{q}_1 = -0.0972^\circ, \tilde{q}_2 = 0.3424^\circ, \tilde{q}_3 = -0.1609^\circ.$$

La característica de estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado mantiene los errores de posición acotados, de tal manera que estos permanecen dentro del radio de atracción; debido a ello se presentan pequeñas oscilaciones en el error de posición, dado que el controlador está tratando de llevar al robot a la posición deseada.

La Fig. 2 describe el comportamiento del torque aplicado en las articulaciones, en donde se puede ver que la ganancia proporcional garantiza que los servo actuadores trabajen dentro de sus límites físicos, dado que el valor del torque máximo solicitado por el controlador en la base ($\tau_{m\acute{a}x1} = 4 Nm$), el hombro ($\tau_{m\acute{a}x2} = 39.5 Nm$) y el codo ($\tau_{m\acute{a}x3} = 4 Nm$) se encuentra dentro de los límites establecidos

según lo mostrado en la Tabla1.

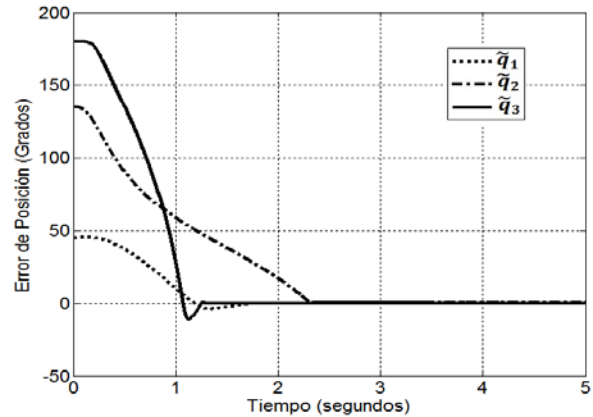


Fig. 1. Error de posición de las articulaciones del robot para la posición $q_1=45^\circ$; $q_2=135^\circ$ y $q_3=180^\circ$.

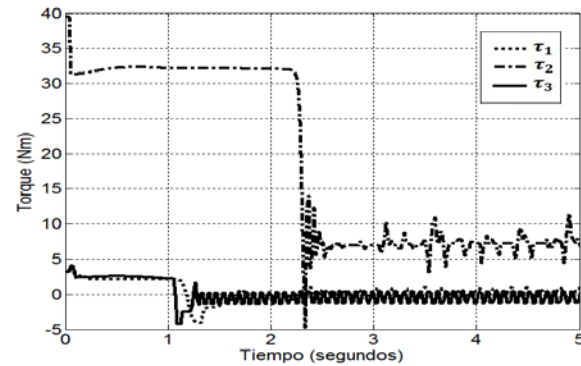


Fig. 2. Torque aplicado por los servo actuadores en las articulaciones del robot.

Los pares aplicados no son cero al finalizar el experimento, debido a que el robot debe mantener la posición final; de igual manera el par más alto corresponde al que aplica el servo actuador del hombro, debido a que soporta el peso del eslabón que lo conforma y el del eslabón y servo actuador del codo. Las oscilaciones del torque se deben a que el controlador trata de llevar al robot a la posición deseada conforme el tiempo tiende a infinito.

Con la finalidad de comparar el desempeño del algoritmo propuesto se aplica la ley de control del PD al robot bajo las mismas condiciones iniciales y finales:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{q} + g(q) \quad (16)$$

Los resultados de los experimentos realizados se muestran en la Fig. 3 y Fig. 4.

Se puede observar en la Fig. 3 que el error de posición de las articulaciones al emplear el control PD es mucho mayor, $\tilde{q}_1 = -3.8106^\circ$, $\tilde{q}_2 = 71.9532^\circ$ y $\tilde{q}_3 = 5.928223^\circ$, en comparación con el del controlador propuesto. En referencia a los torques aplicados (ver Fig. 4), estos son ligeramente mayores y se mantienen dentro de los límites físicos de los

servo actuadores, $\tau_{\max 1} = 5.69 \text{ Nm}$ y $\tau_{\max 2} = 40.5 \text{ Nm}$ a excepción del codo $\tau_{\max 3} = 4.5 \text{ Nm}$ (ver Tabla 1).

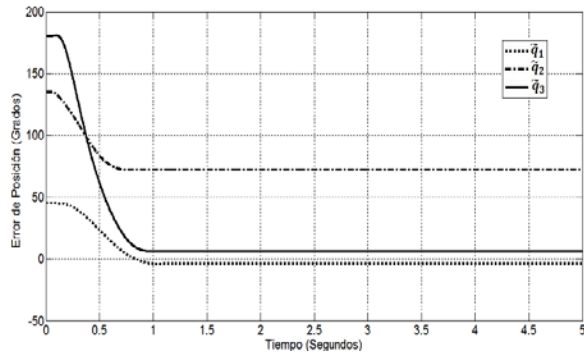


Fig. 3. Error de posición del robot con el control PD.

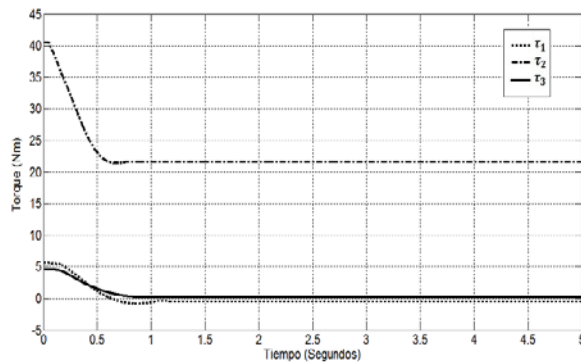


Fig. 4. Torque aplicado por el control PD a las articulaciones del robot.

V. CONCLUSIONES.

El controlador obtenido mediante la técnica del moldeo de energía posee estabilidad asintótica según se demostró mediante la metodología de Lyapunov. Se desarrollaron múltiples pruebas experimentales para la sintonización de las ganancias, en donde finalmente el controlador demostró cumplir con el objetivo del control de posición al ubicar al robot a solo 0.206 decimas de grado en promedio de la posición deseada, con un tiempo máximo 2.4 segundos para ubicarse en la posición final, misma que mantuvo hasta el final de los experimentos.

Al comparar los resultados de error de posición del controlador propuesto con el del PD, se observó una gran diferencia, debido a que mientras el controlador propuesto es de unas decimas de grado, en el PD es de varios grados.

Los pares se mantuvieron dentro de los límites físicos de los servo actuadores, lo que indica que las acciones del controlador son acotadas, evitando de esta forma la saturación de los servo actuadores; mientras que el PD solicita a uno de los servo actuadores un par superior a su capacidad $\tau_{\max 3} > \tau_3$, debido a ello su acción es no acotada, provocando la saturación del mismo.

VI. REFERENCIAS.

- [1] J. Alvarez, V. Santibáñez, R. Campa, "Stability of Robot Manipulators Under Saturated PID Compensation," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 16, pp. 549-557, Nov. 2008.
- [2] M. Arteaga, R. Kelly, "Robot control Without Velocity Measurements: New Theory and Experimental Results," IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 20, pp. 297-308. April 2004.
- [3] E. Jafarov, M. Parlakci, Y. Istefanopulos, "A New Structure PID-Controller Design for Robot Manipulators," IEEE Transaction on Control Systems Technology. Voñ 13, pp 122-130, Jan. 2005.
- [4] J. Kasac., B. Novakovic, D. Majetic, D. Brezak, "Global Position of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 51 pp 1035-1040, Jun. 2006.
- [5] Y. Karayiannidis, Z. Doulgeri, "Model-free robot joint position regulation and tracking with prescribed performance guarantees," Robotics & Autonomous Systems. Vol. 60, pp 214-226. Feb. 2012.
- [6] R. Kelly, V. Santibáñez, "Global Regulation of Elastic Joint Robots Based on Energy Shaping," IEEE Transaction on Automatic control, vol. 43, pp 1451-1456, Oct. 1998.
- [7] G. Leena, K. B. Datta, G. Ray, "A Class of Stabilizing PID controllers for Position Control of Single-Link Robot," International Journal of control and Automation. Vol. 4, pp 127-142, Sep. 2011.
- [8] M. Takegaki, S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control, vol. 103, pp 119-125. Jun. 1981.
- [9] F. Reyes, Robótica. Control de robots manipuladores, México: Alfaomega, 2011, pp. 359-406.
- [10] Y. C. Liu and N. Chopra, "Control of Robotic Manipulators Under Input/Output Communication Delays: Theory and Experiments," IEEE Transaction on Robotics, vol. 28, pp 742-751, Jun. 2012.

VII. BIOGRAFÍAS.

José M. Cervantes nació en la ciudad de Tlaxcala en México en 1970. Recibe el grado de maestro en ciencias en 1999 por el Instituto Tecnológico de Puebla, México, Actualmente trabaja para obtener el grado de DR. En Ciencias en Ingeniería Mecatrónica por la Universidad popular Autónoma del Estado de Puebla. Sus intereses actualmente son el control de robots manipuladores.



Fernando Reyes nació en Puebla, México en 1962. Obtiene el grado de Dr. En ciencias en Especialidad en electrónica y telecomunicaciones en el Centro de Investigación Científica y de educación Superior de ensenada (CICSE) en 1997. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel 1. Es profesor Investigador en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Sus intereses son la robótica y el control.



Marcos Bedolla nació en Tlaxcala, México en 1975. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica en 2001 por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (cenidet), Cuernavaca, México. Se encuentra desarrollando tesis para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Mecatrónica por la Universidad Autónoma Popular del Estado de Puebla.





**XIII CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA
ELECTROMECÁNICA Y DE SISTEMAS**

OTORGA EL PRESENTE

DIPLOMA

A:

**JOSE MANUEL
CERVANTES VAZQUEZ**

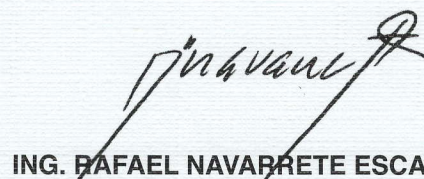
Por su participación con la conferencia:

**ALGORITMO PARA CONTROL DE
POSICIÓN DE ROBOTS
MANIPULADORES
CON ACCIONES ACOTADAS**

México, D.F., 12 al 16 de noviembre de 2012



DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR
Jefe de la Sección de Estudios de Posgrado
e Investigación de la ESIME



ING. RAFAEL NAVARRETE ESCALERA
Director de la ESIME Unidad Zacatenco