



UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL ESTADO DE PUEBLA



BIBLIOTECA CENTRAL
TESIS
USO ÚNICAMENTE EN SA

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

" Análisis y Diseño de Marcos Tridimensionales de Concreto "

Trabajo de Investigación

Presentado Por:

DARIO HERNÁNDEZ HERMAN



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyła**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

H. Puebla de Zaragoza, a 10 de noviembre de 1996.

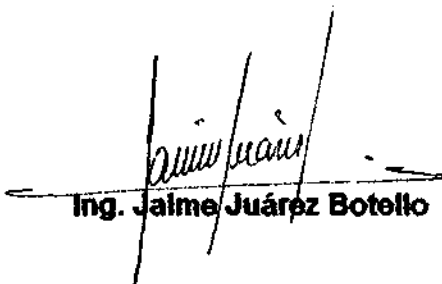
ING. MARIO JIMÉNEZ SUÁREZ

DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

Me permito informarle que el alumno **DARIO HERNÁNDEZ HERMAN**, con número de matrícula 70119, de la Facultad de Ingeniería Civil de la U.P.A.E.P., ha desarrollado su trabajo de investigación "**ANÁLISIS Y DISEÑO DE EDIFICIOS TRIDIMENSIONALES DE CONCRETO**", que bajo la asesoría y supervisión de quien suscribe, ha cumplido con los objetivos planteados en su comienzo.

Sin otro particular, me reitero de Usted como su atento y seguro servidor.

Atentamente



Ing. Jaime Juárez Botello

63162

AGRADECIMIENTOS

Es verdaderamente una gran emoción estar a un paso de pertenecer a una de las profesiones más nobles al servicio de la sociedad, el poder ser un ingeniero civil.

Quisiera dedicar fundamentalmente este trabajo a mis Padres Dario y Elva, pilares indiscutibles en la formación de mi persona y a quienes simplemente les debo el incommensurable regalo de mi existencia. Con mucho cariño dedico también este trabajo a mis hermanas Elva y Olga Libia.

Por otro lado, sería un tanto injusto dejar de mencionar a todos aquellos ingenieros que han sido parte esencial en mi formación, sin embargo, merecen un reconocimiento especial de mi parte a los ingenieros José Manuel Cuatlayotl Sarmiento, Mario Jiménez Suárez, Alfonso Hernández Cumplido, Jaime Juárez Botello y Marco Antonio Zago Merlo, por su incondicional y generoso apoyo.

Para la realización de este proyecto extendiendo mis más sinceras gratitudes al ingeniero Jaime Juárez Botello, quien sin su asesoría y comentarios, no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

Esta fase es sólo el inicio en una nueva etapa en la vida, no obstante la manera de lograr las cosas es comenzándolas. Por el momento es difícil ver el cuadro cuando es uno mismo quien está dentro del marco, pero ciertamente el tiempo transcurrirá obligándonos en cada momento, a trazar nuestro propio destino en la consecución de la felicidad, que no basta sólo en hacer lo que se quiere, sino querer lo que se hace.

El autor

1.- RESUMEN

Este trabajo de investigación expone las bases de los procedimientos necesarios para el desarrollo de un programa de computación de análisis y diseño de marcos tridimensionales de concreto. Se cubre desde la fundamentación teórica de los métodos numéricos, pasando por el procedimiento conciso para realizar los cálculos en cada método, hasta la integración de los datos de los diversos métodos. En la parte de análisis se utiliza el método de rigidez en el caso tridimensional. Además se desarrolla el análisis sísmico estático y dinámico, con los efectos de torsión que generan, que finalmente se utilizan los resultados para el diseño de elementos rectangulares de concreto reforzado por flexión y flexocompresión.

Los métodos mencionados en su gran parte son procesos largos que inevitablemente requieren ser resueltos mediante un programa, aún si se requiere manejar los resultados en forma integral de modo que todos los métodos interactúen entre sí, esto motivó a la realización del presente trabajo. El desarrollar una herramienta que contemple los procesos de análisis y diseño que puedan ser mecanizados, justifica el esfuerzo invertido.

Asimismo, se exponen las ventajas, criterios y limitaciones de cada uno de los métodos, así como las precauciones que se deben tomar al realizar el proceso de análisis y diseño con los procedimientos planteados.

Finalmente se sugieren algunas recomendaciones en cuanto a los conceptos que este trabajo cubre y cuáles son las perspectivas de su crecimiento, para conseguir una mejor herramienta de cálculo que asista los procedimientos de análisis y diseño que día a día el ingeniero estructurista enfrenta.

ABSTRACT.

This research work exposes the basis of necessary procedures for the development of a computer program for three-dimensional concrete frames analysis and design. The research regards since the theoretical fundamentals of numerical methods, going through the concise procedure to accomplish the calculations in each method, until the data integration of several methods. In the part concerning to analysis, the stiffness method for the three-dimensional case is used. Furthermore, the dynamical and static seismic analysis is developed, with torsion effects that generate, that finally the results are used for reinforced concrete elements design by bending and axial bending.

Likewise, an exposition of advantages, criteria and limitations of each one of the methods is made, as well as cautions that should be taken upon accomplishing the analysis and design process with the outlined procedures.

The mentioned methods in the main are long processes that inevitably require be solved through a program, even if it is required to handle the results in integral form, so that all methods interact mutually, this point motivated to the accomplishment of this work. Developing a tool that envisages the analysis and design processes that could be mechanized, justifies the expended effort.

Finally some recommendations are suggested concerning to concepts that this research regards and which are the growth perspectives, to obtain a better computing tool that assists the analysis and design process that day by day the structural engineer faces.

2.- INDICE.

1.- Resumen.	1
2.- Índice general.	2
3.- Introducción.	4

I.- FUNDAMENTOS GENERALES SOBRE DISEÑO ESTRUCTURAL

1.1 Introducción	7
1.2 Definiciones Básicas	8
1.3 El Proceso del Diseño Estructural	9
1.4 Conceptos de Mecánica	12
1.4.1 Geometría	14
1.4.2 Materiales	16
1.4.3 Solicitaciones	17
1.5 Conclusiones	18

II.- EL METODO DE RIGIDEZ

2.1 Introducción.	20
2.2 Fundamentos de elasticidad lineal	21
2.3 Idealización de la barra	26
2.3.1. Distribución debido a esfuerzo normal	28
2.3.2 Distribución debido a esfuerzos cortantes	29
2.3.3 Deformaciones debidas a esfuerzo normal	31
2.3.4 Deformaciones debidas a esfuerzo cortante	34
2.3.5 Deformaciones debidas a esfuerzo por torsión	36
2.4 La matriz de rigidez	39
2.5 Transformación de coordenadas	53
2.6 Procedimiento General para análisis por el Método de rigidez	57
2.7 Conclusiones	61

III.- ANÁLISIS SISMICO.

3.1 Introducción	64
3.2 Conceptos Fundamentales de Ingeniería Sísmica.....	65
3.3 Parámetros que definen las fuerzas sísmicas	66
3.4 Espectro de Diseño	71
3.5 Hipótesis relativas al análisis sísmico.....	76
3.6 Análisis estático	79
3.6.1 Cálculo de las fuerzas sísmicas.....	80
3.6.2 Estimación del periodo de vibración de la estructura.....	81
3.6.3 Reducción de fuerzas sísmicas obtenidas del método estático	83
3.7 Método Dinámico.....	84
3.7.1 Método de Krylov para valores característicos	86
3.7.2 Valuación de fuerzas sísmicas dinámicas	88
3.8 Efectos de torsión.....	91
3.9 Conclusiones.....	97

IV.- EVALUACIÓN Y DISEÑO

4.1 Introducción	99
4.2 Combinaciones de cargas	100
4.3 Deformaciones permisibles	102
4.4 Efectos de segundo orden.....	104
4.5 Conceptos básicos en el diseño de elementos de concreto reforzado.....	106
4.6 Diseño de elementos sujetos a flexión	107
4.7 Diseño de elementos sujetos a flexocompresión.....	113
4.8 Conclusiones.....	116

V.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES118**REFERENCIAS 121****APENDICES.**

A.- Tabla de reacciones en los empotramientos	123
B.- Propiedades de Secciones Transversales.....	124

3.- INTRODUCCIÓN.

La construcción de una estructura inevitablemente requiere de un diseño previo. Cualquier obra o construcción puede concebirse como un sistema entendiéndose como un conjunto de partes que se combinan de forma ordenada para cumplir una función específica. Ejemplificando el sistema es un edificio de concreto, el cual está conformado de varios subsistemas: los espacios arquitectónicos, los elementos estructurales, las instalaciones, las cimentaciones, etc. El subsistema que este proyecto abarca es el de *diseño estructural*, que básicamente se define como la determinación de la geometría, dimensiones, materiales y características detalladas de las estructuras que tiene como función el satisfacer una necesidad a lo largo del periodo de vida útil de la estructura.

Es por todos sabido que los conocimientos de la ingeniería son aún un tanto inciertos para lograr edificaciones completamente fuera de riesgo. Un edificio, como cualquier estructura, esencialmente no se diseña para soportar cargas, ni siquiera es una finalidad primaria, se diseña para satisfacer una necesidad, pero una condicionante fundamental es que la geometría, materiales y su comportamiento en conjunto cumpla sus funciones sin que sufra fallas o efectos secundarios debidos a su incapacidad para soportar las cargas que sobre ella imponen. Para ejemplificar es obvio que una trabe se diseña básicamente para salvar un claro, *no para resistir flexiones, pero desde luego se condiciona que su diseño sea capaz de evitar las fallas que las cargas impuestas sobre ella generen.*

Desde el punto de vista estructural un edificio se considera que falla cuando los materiales y elementos empleados no son suficientes para soportar las cargas, en otras palabras, que alguno de sus elementos se destruya en parte o en su totalidad y que la nueva acción de una carga provoque el colapso de la edificación en parte o en su totalidad.

Otra falla, hasta hace unas décadas no considerada como tal, es que la misma estructura resistía lo suficiente, pero se deformaba tanto que los usuarios sentían a diario las molestias de dichas deformaciones, pues se sentían vibraciones y las deformaciones provocaban daños a elementos no estructurales como cristales, instalaciones y cancelas. Incluso en algunos casos, se presentaban ciertas grietas en acabados que no significan necesariamente una falla en la resistencia, pero sí transmitía sensación de inseguridad a los usuarios.

Es por lo tanto, que para evitar los dos tipos de fallas mencionadas, es necesario hacer un cálculo del edificio de manera profunda y eficaz que satisfagan las condiciones exigidas por los usuarios, que en una forma legal, está plasmadas en los reglamentos y normas de construcción.

La columna vertebral del diseño de una edificación es la modelación. Un modelo es una representación física o matemática de un fenómeno real, que en lo posible trata de representar lo más fielmente a la realidad. La problemática en la modelación consiste en que se tienen que recurrir inevitablemente a las simplificaciones: En un modelo si se tratara de analizar completamente todos los efectos, se tendrían muchísimas variables que el resolver la solución a ese sistema sería imposible, incluso muchas veces ni siquiera conocemos a ciencia cierta si todos los efectos ya han sido considerados. Una buena modelación implica entonces, que aunque no contemple todos los parámetros de comportamiento, sí contenga los más relevantes.

Para el cálculo de una estructura es necesario realizar dos procesos, aunque ambos dependen entre sí, tienen distintos métodos y criterios, estos procesos son el análisis y el diseño. En el análisis básicamente se valoran todas las cargas a las que estará sujeta el edificio durante su vida útil, tales como el peso propio, personas, muebles y relativos por el uso propio que cumple el edificio, efectos de sismos, viento, etc. , las fuerzas internas en cada uno de los miembros de la estructura, la interacción con otras estructuras, entre otros.

En el diseño, una vez que se han obtenido los resultados del análisis, se calcula la resistencia de los elementos estructurales o se cuantifica la cantidad o resistencia de ciertos materiales. Una diferencia esencial entre análisis y diseño consiste en que para realizar un análisis, se tienen por conocidas la geometría, dimensiones y comportamiento de los materiales, y bajo la acción de una carga externa se definen las fuerzas internas. Sin embargo en el diseño, se tienen por conocidas las fuerzas internas y se calculan los materiales, dimensiones, etc.

Para la modelación esquemática de un edificio los elementos estructurales se dividen en: Elementos de la superestructura y elementos de la subestructura. Los primeros se subdividen en trabes, columnas, losas y muros. Los segundos se refieren a las cimentaciones que básicamente incluyen zapatas, muros de contención, cajones, pilas y pilotes.

Una estructura se dice que es reticular cuando está definida exclusivamente por barras, las cuales se definen como aquellos elementos que tienen una dimensión sensiblemente mayor a las otras dos.

De acuerdo con los preceptos matemáticos del análisis estructural, que es la teoría que involucra los conceptos de geometría, material y cargas con las leyes de la mecánica newtoniana, se pueden construir modelos que son extraordinariamente simples o extraordinariamente refinados, dependiendo de la herramienta de cálculo con que se disponga. Los modelos refinados implican grandes geometrías, fuerzas dinámicas, no linealidad geométrica, etc. que necesariamente necesitan uso de una computadora.

Dado que este proyecto es un programa de computadora, se realizará una modelación tridimensional de un edificio, siendo el análisis realizado por el método de rigideces lineal tridimensional, método que pese a su fundamentación simple (el comportamiento lineal de los materiales) es considerado como "exacto" y versátil. Asimismo, este método puede incorporársele un análisis de segundo orden o P-delta.

Para el análisis sísmico se considera un modelo unidimensional, pero con efectos tridimensionales, tanto estático como dinámico. También el proyecto contempla el diseño de trabes y columnas de concreto.

Todos estos métodos se basaron en los requisitos exigidos con el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1987, que es el de mayor uso en México y se hacen algunas referencias al Reglamento de Construcciones para el Municipio de Puebla.

El programa de este proyecto plantea realizar todo el proceso de análisis y diseño en una sola unidad. Con esto se logra ahorrar tiempo y esfuerzos de cálculo al simplificar los procedimientos numéricos que pueden ser mecanizados. Asimismo, con el uso de la computadora se obtienen resultados rápidos, menos erróneos, más confiables y apegados a los reglamentos y normas de construcción.

Los procedimientos de análisis y diseño pueden considerarse en este momento como "refinados" si se toma en cuenta que anteriormente se utilizaban métodos muy aproximados y simplificados, pues solo se utilizaban reglas de cálculo o calculadoras, y aún así el cálculo manual resultaba sumamente laborioso. Actualmente los métodos del programa del presente proyecto es igual o similar al de los programas existentes.

Este programa a pesar de tener ambiente gráfico interactivo con el usuario y resuelve en gran parte el problema de análisis y diseño de edificios de concreto, desde luego no es un sistema experto que conduzca a una solución final de tantas y variadas. El programa debe estar dirigido a Ingenieros Civiles familiarizados con la modelación, estructuración , análisis y diseño de edificios de concreto.

Los métodos utilizados son muy flexibles, por lo que se pueden incorporar muchos otros casos y requerimientos, muchos de ellos no se incorporaron, los cuales se mencionan en el cuerpo de este documento.

Se han tomado todas las previsiones razonables para que los resultados sean correctos tomando como referencia a otros estudios, sin embargo no se puede garantizar que el programa esté libre de algunos errores. Cabe mencionar que los resultados que arroja el presente programa no significan que sean los valores definitivos. Los resultados serán tan válidos como apropiada sea la modelación del edificio, de sus cargas, de sus elementos estructurales, su comportamiento y las propiedades de los materiales. Esto se menciona porque sólo un Ingeniero civil estructurista con experiencia puede juzgar hasta que punto las simplificaciones de los métodos son lo suficientemente válidas y hasta cuando no.

No cabe duda que los conocimientos actuales son mejores que los anteriores, y por la misma razón, los conocimientos del mañana harán a los de hoy obsoletos. No estará lejos el día en que se diseñe un programa mucho mejor que los actuales, que se tenga una automatización tal que permitan tener en un parpadeo un edificio diseñado completamente.

En estos casos la pregunta por siempre obligada: Si el programa hace lo que el ingeniero estructurista ¿Será posible tener un programa tan confiable que cualquier persona lo pueda usar y sin temor a equivocarse ofrecer sus resultados?. Desde una opinión personal, desde luego que no. Un programa o computadora, por lo más perfectos que se puedan diseñar, nunca pasarán su jerarquía de herramienta, solo eso, una herramienta. Si los programas de hoy sorprenden a quienes calcularon con herramientas del ayer, solo han visto el cambio de una máquina por otra, pero las máquinas no piensan. Desafortunadamente la tecnología y la automatización nos han disminuido un poco la preocupación de cuestionar los resultados de los programas, cuando en la vida real, en base al criterio de una persona hacemos caso omiso de los resultados cuando se sabe que algo está mal.

Es por lo tanto que este proyecto no trata de ser mejor o peor que los ya establecidos, simplemente trata de ofrecer una herramienta versátil adicional para el análisis y diseño de edificios de concreto.

Capítulo I

Fundamentos generales sobre diseño estructural.

1.1 Introducción.

En este capítulo se tratan las definiciones, los conceptos y criterios fundamentales del proceso de análisis y diseño estructural, que serán de utilidad a lo largo del presente trabajo. Cabe mencionar que los conceptos mencionados y su clasificación hasta cierto punto es subjetiva, pero muchos autores han tratado de organizar de algún modo los procesos generales de diseño, que sin duda se tratan de manera muy distinta dependiendo del proyecto analizado. Por esta razón es adecuado definir los términos en base a varios documentos de mayor uso.

Asimismo se trata de dar un panorama general sobre la ubicación de los conceptos y características involucrados en el proceso del diseño estructural y campos de estudio de la mecánica en general en una gama amplia y variada, para que de este modo se defina las limitaciones y alcances que cubre el presente trabajo dentro de esa gama .

1.2 Definiciones básicas.

Cualquier construcción puede concebirse como un sistema, bajo este enfoque se define un sistema como un conjunto de partes que se relacionan entre sí y que el comportamiento de las partes define el comportamiento del sistema en general. A su vez cada parte puede ser un subsistema y que todos en conjunto se combinan en forma ordenada para cumplir en forma ordenada una función.

Ejemplificando para el caso de un edificio de concreto, el sistema general es el edificio, pero a su vez, este está formado por la estructura, las cimentaciones, las instalaciones, los acabados. A su vez la estructura está subconformada por traveses, columnas, muros y losas. Para ejemplificar la relación entre los subsistemas consideremos que al realizar el análisis de un edificio obtenemos deformaciones posibles en la vida útil de la estructura, estas deformaciones si exceden cierto límite provocarían daños en los acabados, luego entonces hay que modificar la geometría o materiales de la estructura para hacerla menos flexible. Del mismo modo, los asentamientos del suelo provocarían esfuerzos adicionales en la estructura, entonces hay que reforzarla, pero al reforzarla, es posible que aumenten las cargas y se aumenten los asentamientos. Así sucesivamente se podría seguir ejemplificando las innumerables relaciones existentes en nuestro sistema del edificio.

Para el caso de diseño estructural se deben tomar en cuenta en lo posible, todas las relaciones entre los subsistemas, pero a cambio se obtiene una desmesurada complejidad en los modelos matemáticos para resolverlos. Casi con demasiada frecuencia esta interacción entre los subsistemas de la construcción se considera en muchos casos rudimentaria y sólo se recurre al criterio de muchos años del estructurista.

En otro rubro, el arquitecto propone un proyecto a veces con escasa atención a los problemas estructurales que se presentan. Desde el punto de vista estructural, arquitectónicamente la estructura ideal es la que no existe, en la que se pueden disponer libremente de todos los espacios, pero es muy bien sabido que las geometrías más inusuales son las más complicadas de analizar y de las que menos conocimiento y experiencia se tiene.

Básicamente se considera como una estructura a los elementos de una construcción que están diseñados para soportar las acciones de carga que se presenten en la vida útil de la estructura. Se entenderá como elemento estructural aquel cuerpo que por su geometría o por las simplificaciones que se hicieron sobre él, puede ser idealizado como la más simple y básica estructura. De este modo se deduce que los miembros no estructurales son los elementos que forman parte de una construcción pero que no están diseñados para soportar cargas en la misma magnitud que lo hacen los elementos estructurales. Un sistema estructural por lo tanto es el conjunto de varios elementos exclusivamente estructurales, pero no dejando de tomar en cuenta las restricciones de elementos no estructurales.

El diseño de manera genérica se entiende como el proceso creativo en el cual se definen las características de un sistema de manera que cumpla de manera óptima con sus objetivos. Cabe mencionar que el término "diseño" se utiliza indiscriminadamente para varios conceptos muy distintos. Para evitar discrepancias entre términos, conviene usarlos en una forma amplia. El diseño estructural desde un punto de vista más formal tiene por objetivo determinar las características de los elementos estructurales para resistir las cargas a las que estará sometido un sistema estructural sin que sufra fallas, así pues el "diseño estructural" se referirá al proceso global mientras que "diseño de elementos estructurales" o simplemente "diseño" se limitará a determinar características desconocidas de algunos elementos estructurales a partir de ciertos datos conocidos y arrojen una conclusión de comportamiento de dichos elementos.

Para ejemplificar, el diseño estructural de un puente consistirá en conocer la intensidad del tráfico que soportará, proponer una geometría con columnas, traveses o cables,

calcular su resistencia, revisar deformaciones o vibraciones, etc. Ahora bien, el diseño de la trabe principal del puente consistirá en calcular la cantidad y características de acero, concreto o presfuerzo con el fin de lograr una carga resistente mínima.

De manera formal se dice que una estructura falla cuando alcanza algún estado límite. Se llama estado límite de una estructura a cualquier etapa de su comportamiento a partir del cual su respuesta se considera inaceptable.

El estado límite de falla corresponde a las situaciones en que la estructura sufra un daño irreversible total o parcial que impidan a la estructura resistir nuevas acciones de cargas. En este estado se incluyen el colapso, la inestabilidad, la fatiga o daños irreversibles.

El estado límite de servicio corresponde a las situaciones que aún sin alcanzar el estado límite de falla, afecta el correcto funcionamiento de la estructura. Básicamente comprenden desplazamientos, deflexiones, agrietamientos no estructurales y vibraciones. Se considera como estado límite porque genera molestias a los usuarios y algunas de estas fallas de servicio sin que representen riesgo de colapso pueden dañar elementos no estructurales frágiles, consecuentemente los usuarios sienten cierta sensación de inseguridad al no poder juzgar si es una falla estructural o no estructural.

La resistencia de un elemento estructural se entenderá como la intensidad de una acción de cargas hipotética que conducen a la estructura a un estado límite de falla. Debe notarse que estrictamente las cargas usadas para calcular la resistencia son independientes de las acciones de carga reales en la estructura, por lo mismo se concluye que las cargas actuantes deben ser menores a las hipotéticas usadas en el cálculo de resistencia.

En dado caso de que un elemento estructural tenga resistencia suficiente, no significa necesariamente que satisfaga las condiciones de estado límite de servicio. Puede darse el caso que las fallas por servicio sean las que determinen el diseño de un miembro estructural. Por ejemplo, se pueden fabricar vigas presforzadas muy flexibles que sin llegar a fallar en lo más mínimo, las deflexiones y vibraciones hacen pensar a los usuarios que es una estructura inestable y que en cualquier momento se puede colapsar. En este caso, el diseño de dicha trabe estará dominada por el control de deflexiones más que por el de la resistencia.

1.3 El Proceso del Diseño Estructural.

El proceso de diseño estructural es sumamente complejo y cada proyecto es un caso único, por lo mismo cualquier intento de clasificación o subdivisión sería incluso inaplicable, pero de forma global se pueden definir tres conceptos generalizados que de alguna forma dan nociones del proceso. Dichos conceptos son : Estructuración, Análisis, Diseño y Detallado los que a continuación se especifican.

1.- Estructuración.

En esta parte del proceso se determinan los materiales de los que va a estar constituida la estructura, la forma global de ésta, el arreglo de sus elementos constitutivos, sus dimensiones y características más esenciales. Como se desprende de lo expresado en párrafos anteriores, es ésta la parte fundamental del proceso del diseño estructural. De la correcta elección del sistema estructural depende más que de ningún otro aspecto la bondad de los resultados. En esta etapa es donde desempeñarán un papel preponderante la creatividad y el criterio.

2.- Análisis.

El análisis en su denominación genérica incluye las actividades que llevan a la determinación de la respuesta de la estructura ante las diferentes acciones exteriores que pueden afectarla. En otras palabras, se descompone el gran sistema estructural para conocer lo que pasa en partes más simples.

Alguno de los términos anteriores se definirán de manera más formal posteriormente. Por el momento basta entender que se trata de determinar los efectos de las cargas que pueden afectar a la estructura durante su vida útil. Para esta determinación se requieren los siguientes tres pasos:

a) *Modelación.*

Un modelo es una representación física o matemática de un fenómeno real, que en lo posible trata de representar lo más fielmente a la realidad. La problemática en la modelación consiste en que se tienen que recurrir inevitablemente a las simplificaciones. En un modelo si se tratara de analizar completamente todos los efectos, se tendrían muchísimas variables que el resolver la solución a ese sistema sería imposible, incluso muchas veces ni siquiera conocemos a ciencia cierta si todos los efectos ya han sido considerados. Una buena modelación implica entonces, que aunque no contemple todos los parámetros de comportamiento, sí contenga los más importantes. Una buena modelación requiere idealizar la estructura real con un modelo factible de ser analizado con los conocimientos, experiencias y procedimientos de cálculo disponibles. Un ejemplo es la idealización de un edificio de columnas, vigas y losas de concreto por medio de un sistema de marcos formados por barras de propiedades equivalentes.

En esta etapa se suele cometer con frecuencia muchos errores graves, tales como ignorar elementos estructurales o no estructurales que contribuyen a la respuesta de la estructura o emplear un modelo demasiado simplista que no representa adecuadamente la respuesta estructural. Sin embargo, se puede recurrir a un modelos un poco más simples cuando no se tienen mejores recursos disponibles, siempre y cuando la simplicidad de su cálculo signifiquen resultados del lado de la seguridad.

La modelación incluye la definición de diversas propiedades de los elementos estructurales que componen al modelo. Esto implica la recolección de diversos datos y la suposición de otras propiedades, como son valores de diseño cuando no se cuentan con datos específicos del proyecto. Los valores supuestos en etapas iniciales del proceso para estas propiedades, pueden tener que modificarse e irse refinando a medida que se obtienen los resultados del análisis numérico.

b) *Determinar las acciones de diseño.*

Entenderemos por acciones a todos aquellos agentes que generen cargas que obren sobre la estructura de forma externa y una sollicitación la entenderemos como el valor de la carga en sí, aunque en la práctica común a veces se usan los términos indistintamente, ya que para el caso de análisis lo que nos interesa realmente son las cargas y no las causas que las generan. Si nos referimos a una acción o carga de diseño la entenderemos como aquella carga desfavorable máxima probable que pueda presentarse en algún instante de la vida útil de la estructura, y dicha carga que se utilizará como parámetro para definir la respuesta de la estructura.

Salvo en proyectos inusuales, en muchas situaciones las cargas de diseño están definidas por los códigos y reglamentos de construcción y es obligación del proyectista sujetarse a ellos. Es frecuente, sin embargo, que quede como responsabilidad del proyectista la determinación del valor de diseño de alguna carga, o al menos la obtención de datos específicos del proyecto que definen la acción de diseño. Cabe aquí hacer notar que en esta etapa se suelen tener grandes incertidumbres y se llegan a cometer errores graves que deterioran la precisión que se pretende guardar en las etapas de cálculo numérico. Basta como ejemplo reflexionar sobre el grado de aproximación con que se puede determinar la acción máxima debida a sismo o el efecto de la ráfaga de viento máxima que puede presentarse sobre un edificio durante toda su vida útil.

c) *Análisis Numérico.*

Esta etapa consiste en determinar los efectos de las acciones de diseño en la estructura en base al modelo matemático escogido. En esta fase, que constituye el análisis propiamente dicho, se determinan principalmente las fuerzas internas, deformaciones y la forma como se combinan.

Los resultados de los métodos de análisis estructural serán tan válidos como adecuado sea el modelo que represente a la estructura real. Dichos métodos han evolucionado en las últimas décadas mucho más de lo que han hecho otros aspectos del diseño; el desarrollo de los métodos numéricos asociados al empleo de computadoras ha hecho posible analizar con precisión modelos estructurales cada vez más complejos que de forma manual era prácticamente imposible.

3.- Diseño.

Esta etapa corresponde en determinar características o valores desconocidos de algunos elementos estructurales a partir de los datos arrojados en el análisis y de este modo se llega a una conclusión de comportamiento global de la estructura. Principalmente se refiere al cálculo de las resistencias de los elementos estructurales y su revisión. A diferencia del análisis, en el diseño ya se conoce lo que sucede en las partes simples y se trata de definir parámetros faltantes de los elementos estructurales, que no fueron tomados en cuenta en el análisis, bajo las condiciones de seguridad impuestas.

Posteriormente al diseño se verifica que en ninguna parte de la estructura se genere un estado límite de falla o de servicio que sobrepasen los requisitos de seguridad adoptados. Dichos requisitos están generalmente plasmados en los códigos y reglamentos de construcción.

Sucede con frecuencia que al diseñar los elementos estructurales estos son insuficientes para responder a las condiciones impuestas. Deben entonces replantearse nuevas alternativas y repetir el proceso en la etapa donde sea necesario modificar los valores alterados en el diseño.

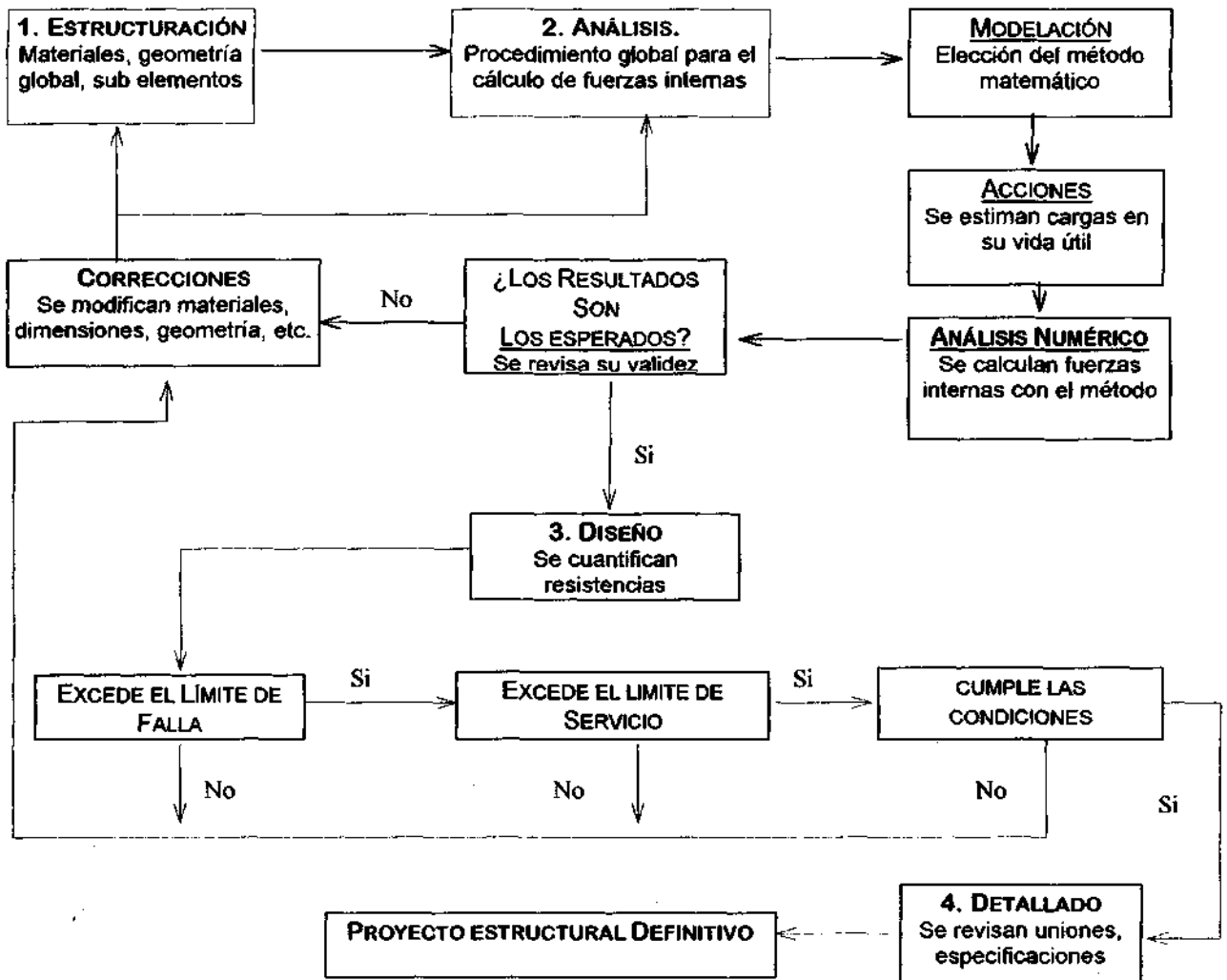
Después de algunas soluciones preliminares, en este punto se tiene un gran avance sobre el proyecto definitivo del sistema estructural, ya que en este punto se tienen bastantes resultados con especificaciones.

4.- Detallado

En esta etapa se define en detalle la estructura. Aquí se hace un proceso similar para analizar y diseñar elementos ignorados en los procesos anteriores pero que cumplen función estructural definitiva y que de algún modo hagan cumplir con las condiciones

supuestas en las etapas previas. Se puede mencionar muchos y variados detalles estructurales como uniones de miembros, remaches, soldaduras, empalmes, juntas constructivas etc. La importancia en el detallado es trascendental, pues existen ciertos tipos de detalles que al ser descuidados han ocasionado el colapso global de la estructura. Basta mencionar que las columnas bajo la acción sísmica requieren de un buen confinamiento del concreto, que es proporcionado principalmente por estribos. El simple doblez de un estribo hacia su interior proporciona dicho confinamiento.

El haber distinguido en el proceso de diseño tres partes que indican una secuencia lógica, no debe llevar a pensar que en el diseño, salvo muy raras excepciones, se sigue un proceso unidireccional. El proceso real es mucho más complejo e iterativo; implica pasar varias veces por cada etapa a medida que la estructura evoluciona hacia su forma final. Dicho seguimiento aunque puede variar dependiendo de algún caso en particular, se puede proponer un esquema general mostrado como sigue:



1.4 Conceptos de mecánica.

Los elementos estructurales utilizados naturalmente son cuerpos sólidos. Dado que una construcción es un cuerpo como tal, son aplicables las leyes de la mecánica en sus diversas y amplias modalidades. Se define a la mecánica como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de solicitaciones. La mecánica en sí se subdivide en mecánica de cuerpos rígidos, en mecánica

de cuerpos deformables y en mecánica de fluidos. Para el caso del presente proyecto, se utilizarán básicamente los conceptos de cuerpos deformables y un poco de los cuerpos rígidos.

La mecánica es una ciencia física porque estudia fenómenos físicos, pero en sí no es una ciencia pura, más bien es una ciencia aplicada que utiliza la formalidad y razonamiento deductivo de las matemáticas pero adecuadas en parte a los conocimientos empíricos basados en la experiencia y observación.

El campo de estudio de la mecánica es sumamente amplio y complicado, dependiendo del modelo estructural y de las simplificaciones que de ese modelo se realicen. Estas simplificaciones se deben principalmente a estas razones:

a) Por restricciones constructivas:

Un modelo de geometría complicada, por ejemplo un cascarón de sección variable, que aunque matemáticamente se demuestren indiscutibles ventajas estructurales, la cimbra de dichos elementos es sumamente costosa por la geometría.

b) Por restricciones matemáticas:

Un modelo que contenga tantos parámetros sería prácticamente imposible de encontrar su solución, incluso, tal vez no sea posible medir de manera directa algunos de ellos.

Sin embargo, existen tres grandes conceptos donde la mecánica vierte su atención. Aunque muchas veces se estudian por separado, para el análisis de cualquier sistema estructural, los tres conceptos siempre se relacionan entre sí. De este modo, para el análisis de un sistema estructural se requieren forzosamente estos tres conceptos:

1.- Geometría:

Se define como la forma, dimensiones y posición de uno o varios elementos estructurales, las condiciones como éstos están unidos entre sí.

2.- Materiales:

Se especifica el tipo de material y consideraciones básicas sobre ellos, tales como comportamiento, propiedades y respuesta.

3.- Solicitaciones:

Se entiende como sollicitación todas aquellas fuerzas externas que alteran la condición de reposo del cuerpo en cuestión. En este rubro se define y se analiza cuantitativa y cualitativamente las posibles fuerzas que actuarán sobre el cuerpo en reposo.

Estos tres conceptos son requisitos mínimos para definir el comportamiento de un sistema estructural. Una vez que se definen las limitaciones y alcances de cada concepto es posible entonces proponer un modelo matemático y plantear su solución. De estos tres conceptos se mencionan las definiciones y características de mayor conocimiento en la Ingeniería.

1.4.1.- Geometría:

Se clasifican a los elementos estructurales más conocidos por su forma y en algunos casos por el modo en que soportan las cargas. Por la relación de sus dimensiones y la forma como soportan las solicitaciones, un elemento estructural se puede clasificar de acuerdo a su nombre genérico como:

1.- Elementos barra:

Se definen como aquellos elementos que tienen una dimensión sensiblemente mayor a las otras dos. Aquí se encuentran postes, traveses, columnas, contravientos, tensores, puntales, etc. Se dice que una barra es de sección constante, cuando la geometría transversal (perpendicular a su eje) no cambia a lo largo de su eje.

Cada barra se distingue por su nombre específico, dependiendo básicamente del elemento mecánico que predomine. Una trabe o viga, es generalmente horizontal que trabaja principalmente a flexión. Una columna es generalmente vertical que trabaja a fuertes compresiones combinadas con flexión. Un tensor trabaja básicamente a tensión y su resistencia a compresión es poca o nula. Un contraviento trabaja a flexión o compresión pero se denomina así por restringir fuerzas laterales.

2.- Elementos planos o placas:

Son aquellos elementos con una dimensión sensiblemente menor a las otras dos y una superficie media plana. Una placa, de acuerdo a la dirección de las cargas que soportarán se distinguen como losa o muro. Si la placa se usa para soportar cargas transversales a su superficie plana se denomina losa. En caso de que se use para soportar cargas en su plano, se denomina muro, aunque comúnmente se distinguen uno del otro porque la losa predominantemente es horizontal y el muro vertical.

3.- Membrana:

Son aquellos elementos donde dos dimensiones son extremadamente mayores y una extremadamente menor. Se diferencian de las placas porque la membrana es de superficie generalmente curva y el espesor de la membrana es muy reducido.

4.- Diafragmas:

Son elementos planos que unen a otros elementos estructurales que los obliga a desplazarse en conjunto, como si fuera una membrana y cuyas solicitaciones y desplazamientos están contenidos en un plano. Se dice que este es rígido cuando dichos desplazamientos son prácticamente nulos. Como se verá posteriormente, los desplazamientos relativos son tan pequeños que los desplazamientos en los nodos contenidos en el diafragma son linealmente dependientes de los tres desplazamientos del diafragma (dos lineales y un angular). Se dice que el diafragma es flexible cuando existen desplazamientos relativos entre los nodos internos del diafragma y son por lo tanto independientes para cada nudo. Para los diafragmas las deformaciones predominantes son las de cortante en vez de las de flexión. Bajo la consideración del concepto de diafragma, se pueden encontrar elementos híbridos como vigas-diafragma (viga de claro reducido y alto peralte que funciona para transmitir grandes cargas concentradas a otra posición), muros diafragma (muros resistentes que restringen deformaciones por cargas laterales), entre algunos otros.

5.- Sólido en general:

Son los que no se clasifican dentro de los anteriores a excepción que estén definidos específicamente por alguna otra razón.

De los elementos estructurales mencionados, uno o varios de ellos se pueden unir para formar un sistema estructural. Los *sistemas estructurales* más usados son:

1.- Estructuras reticulares:

Son aquellos formados por barras de eje recto. Las estructuras reticulares se subdividen dependiendo del número de grados de libertad, significado que posteriormente se discutirá, dicha subdivisión es:

Vigas: Elementos que tienen siempre un eje recto que trabajan a carga axial, flexión y cortante.

Armaduras: Elementos cuyas barras trabajan exclusivamente a carga axial.

Parrillas: Reticula plana cuyas barras trabajan a flexión, cortante y torsión provocadas por cargas perpendiculares a su plano.

Marcos: Reticula cuyas barras trabajan a carga axial, flexión y cortante y básicamente formado por trabes y columnas.

Muromarco: Son una combinación de marcos con muros estructurales o de relleno. Aunque se pueden idealizar los muros como retículas en forma de columnas anchas, se pueden analizar los muros con elementos finitos y posteriormente agregar sus efectos al marco, en este último caso se aíslan, esta sería parcialmente una estructura compuesta de placas y retículas.

Las armaduras y marcos pueden ser bidimensionales o tridimensionales. Las armaduras tridimensionales de igual modo trabajan solo a cargas axiales. Los marcos planos solo pueden analizarse con cargas contenidas en su plano. El marco tridimensional es el caso general de todas las estructuras reticulares mencionadas, además de su geometría tridimensional se considera que todas sus barras trabajen con fuerzas y momentos en las tres direcciones.

2.- Cascarón:

Son sistemas estructurales formados a base de membranas cuya superficie no está incluida en un solo plano y que trabajan básicamente a compresión, aunque es obvio que bajo diversas sollicitaciones esto es imposible. Debido a lo reducido de su espesor la resistencia está regida por el pandeo local de su superficie. Su geometría la define una superficie de una curva de rotación o traslación, tales como semi-cilindros, paraboloides, semi-esferas, etc.

3.- Superficies plegadas:

Son sistemas estructurales formados a base de placas planas. A diferencia de los cascarones, las superficies plegadas evitan en cierto límite el pandeo local, ya que los vértices y bordes aumentan la rigidez.

Para el caso particular de un edificio que de algún modo es el sistema estructural de mayor uso, la geometría representa un sistema muy especial. A pesar de que un edificio es una estructura reticular formado a base de barras, elemento básico de cualquier sistema estructural, el edificio en general posee muchos otros elementos estructurales en conjunto. Para diferenciarlos, un edificio se puede dividir en :

a) Elementos de la superestructura:

Que incluyen traveses, columnas, muros, losas, contravientos, entre otros.

b) Elementos de la subestructura:

Que incluyen contravientos, zapatas aisladas o corridas, cajones de cimentación, pilas, pilotes, muros de contención entre otros.

Solo se mencionan los elementos y sistemas estructurales más conocidos, ya que es obvio que existen muchos otros que son de geometría complicada o de funciones distintas a las mencionadas. Esta clasificación tienen el objeto de diferenciar de algún modo los múltiples y variados elementos constructivos.

Dado que todo sistema estructural real es un sistema tridimensional, no significa que no se puedan analizar en varios casos como bidimensionales o planos. Incluso, muchos elementos cuya geometría no es claramente similar a las mencionadas, de algún modo se tiene que idealizar.

1.4.2.- Materiales.

Se dice que un material es rígido cuando a pesar de las acciones no se deforma, este material es hipotético ya que todos se deforman en mayor o menor grado. Este material hipotético se utiliza en el análisis cuando se busca considerar sólo los efectos, dicho de otro modo, el material rígido solo funciona como un transmisor de cargas.

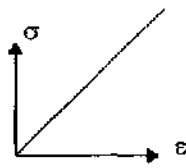
Un material deformable sufre deformaciones bajo la acción de una carga que pueden ser reversibles o irreversibles y la relación entre la carga y su deformación sigue diversas suposiciones. Salvo se indique lo contrario el presente proyecto estará basado en la mecánica de los cuerpos deformables.

Para efectos de fundamentación teórica, los cuerpos deformables se consideran idealizados como medios continuos. Los medios continuos se fundamentan en tres hipótesis básicas, la primera es que los materiales no tienen huecos u oquedades en el cuerpo, la segunda que es homogéneo, es decir que el cuerpo lo constituye un solo material y la tercera es que son isotrópicos, es decir, que su comportamiento es el mismo en todas las direcciones. Cuando el comportamiento difiere en algunas direcciones, se dice que es un material anisotrópico.

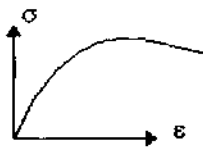
Bajo estas hipótesis, hay materiales que se pueden idealizar perfectamente, pero hay muchos otros que no, tal es el caso del concreto reforzado que no cumple estrictamente ninguna de las tres; no es continuo porque existen poros de aire, no es homogéneo porque intervienen en su constitución agregados, agua, cemento y acero y no es isotrópico porque el concreto simple resiste muy bien a compresión y muy poco a tensión, y el acero de refuerzo el caso contrario.

En base a su comportamiento se define como un material elástico aquel material que una vez deformado bajo la acción de una carga es capaz de retomar su forma original. En cambio un material plástico bajo la acción de una carga sufre deformaciones que son irreversibles. Un material viscoso se define como el material que bajo la acción de una carga presenta flujos de material dependientes del tiempo. La investigación de los materiales viscosos pertenece a la disciplina de la Reología. Se aclara que un material puede ser viscoso siendo sólido o líquido. De los sólidos los pavimentos y el concreto se consideran como materiales viscosos, la deformación de un cuerpo viscoso no solo depende del esfuerzo con el que se deforma sino también con la velocidad con la que este se produce.

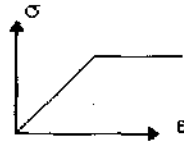
Con lo anteriormente expuesto, por la forma como generan los materiales su gráfica esfuerzo - deformación, se pueden clasificar como :



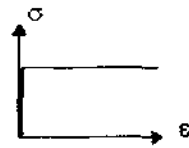
Elástico lineal.



Plástico.



Elastoplástico



Rigidoplástico.

La única manera de determinar el comportamiento de los materiales es mediante ensayos de laboratorio, de los cuales se sacan las curvas mencionadas. Cabe mencionar que cuando el material sufre una gran deformación sin prácticamente ningún aumento en el esfuerzo, el material se encuentra en su esfuerzo de fluencia o plasticidad perfecta.

1.4.3.- Solicitaciones.

Las sollicitaciones son las acciones de cargas que obran sobre la estructura a lo largo de su vida útil, como se ha mencionado con mayor detalle en la sección 1.4. Las sollicitaciones son específicas para cada proyecto y prácticamente son distintas e irrepetibles para cada proyecto. El análisis de cargas juega un papel determinante y delicado en la confiabilidad del proceso del diseño.

Para dar seguimiento secuencial a un análisis de cargas, por la naturaleza del fenómeno que genera a las cargas, estas se pueden dividir en:

- a) *Cargas Determinísticas.* Significa que su valor puede ser definido para cualquier instante en la vida útil de la estructura sin temor a cometer grandes errores, dado que el agente que las genera no cambia sustancialmente con respecto al tiempo.
- b) *Cargas Estocásticas.* Estas cargas son también conocidas como probabilísticas o aleatorias, en las cuales no puede precisarse un valor único, ya que el agente generador de cargas cambia respecto al tiempo.

Para las dos condiciones mencionadas, cada una puede ser estática o dinámica, en función si el agente que las genera depende o no del tiempo.

Sin embargo, en la práctica común se prefiere otra clasificación de acciones que es similar a la anterior

1.- Acciones permanentes.

O también conocidas como cargas muertas, las cuales representan a todas las cargas que conservarán una posición fija a lo largo de la vida útil de la construcción y que su intensidad no cambiará con el tiempo. Básicamente se refieren al peso propio de la construcción y demás instalaciones y elementos fijos. Su valuación puede decirse que es la menos incierta aunque no está libre de errores, ya que los procesos constructivos o uso de la construcción pueden variar las dimensiones o los pesos volumétricos de los materiales. Su estimación es de tipo determinístico.

2.- Acciones variables.

También conocidas como cargas vivas, las cuales se deben a la operación y uso de la construcción. Se consideran a todos aquellos elementos físicos que no tiene una posición fija y que su intensidad puede variar con el tiempo pero se presentan en la estructura regularmente. Básicamente se incluyen las cargas debidos a muebles, personas, mercancías, equipos, entre otros. Su estimación puede decirse que es determinística, ya que los códigos y reglamentos de construcción han estudiado diversas casos probabilísticos posibles y sus resultados posibles máximos han quedado plasmados.

3.- Acciones accidentales.

Son las cargas ocasionados por agentes que ocasionalmente o esporádicamente pudiesen presentarse durante la vida útil de la estructura. Básicamente se incluyen acciones debidas a sismo y viento por la magnitud que ellos representan, pero los fenómenos meteorológicos, cambios de temperatura, explosiones, choques externos entre muchos otros pueden ser incluidos. La estimación es netamente probabilística basada en periodos de recurrencia

Para cualquiera de los casos mencionados, se puede mencionar que estrictamente todas las cargas son probabilísticas, en ninguna se puede asegurar que el valor obtenido sea uno definitivo. Es de recalcar que por la naturaleza probabilística de las cargas se deben extremar precauciones en la incertidumbre esperada y la frecuencia con que estas cargas se pueden presentar.

Otro concepto que será de utilidad es el de estado de carga, el cual es un conjunto de cargas que comparten una característica en común. Es conveniente agrupar por conjuntos a todas las cargas posibles, de una manera similar a la clasificación anterior. De este modo para un edificio tendremos una estado de carga muerta, uno de cargas sísmicas en una dirección, etc.

Un concepto fundamental para el análisis es el de factorizar las cargas. Un factor de carga es una constante mayor a la unidad que amplifica las cargas de diseño. Este abundamiento se justifica porque existe incertidumbre en la estimación de las cargas, las limitaciones e hipótesis de los métodos numéricos empleados y la precisión con que los datos se manejen.

Otro concepto fundamental es el de factor de resistencia el cual siempre es menor a la unidad. Este se justifica porque el control de calidad en la elaboración real de los materiales puede variar con los datos especificados en el diseño, en el proceso constructivo se pueden variar sus dimensiones o forma, y su el modo de falla según sea el caso.

Para el análisis será necesario entonces realizar Combinaciones de Carga, las cuales son la suma de los efectos de los distintos estados de carga con sus factores respectivos. De este modo bajo varias combinaciones se analiza cuales combinaciones generan los esfuerzos máximos.

1.5 Conclusiones.

Se especificaron conceptos básicos que sin ser el objetivo en sí del proyecto, se utilizarán la mayoría de ellos en capítulos subsecuentes. En la sección que concierne al proceso del diseño estructural, de todas las fases mencionadas, el presente proyecto trata de ofrecer una solución sólo a dos de ellas: El análisis numérico y el diseño. En estas dos etapas son las que probablemente los programas de computadora son donde realmente ayudan, porque con estos procesos se gana gran cantidad de tiempo y precisión.

En la fase de análisis el proyecto requiere como etapas previas que ya se haya definido la estructuración, geometría y evaluado las acciones. De los modelos matemáticos disponibles para análisis sólo se utiliza uno, que en el caso de estructuras reticulares es el más general: el método de rigideces en tres dimensiones. Dicho método es el único aplicable a marcos tridimensionales y sus resultados son necesarios para la evaluación de fuerzas sísmicas y viceversa. Es el método de estructuras reticulares porque contempla que una barra puede estar sujeta a fuerza axial, cortante, flexión y torsión.

El proceso de diseño se cubre parcialmente, es decir, se realiza el diseño de trabes y columnas bajo ciertos parámetros, que no conducen necesariamente a resultados definitivos, pero se pueden tomar como valores mínimos de resistencia.

En las demás etapas difícilmente se pueden generar programas que sustituyan el tiempo que el proyectista invierte en dichos conceptos, ya que se requiere en mayor parte del juicio del proyectista, a lo mucho, al igual que el programa de análisis y diseño, sólo se tendrían herramientas auxiliares de cálculo.

Aunque no se pretende menospreciar las ventajas de realizar análisis refinados de un modelo estructural que represente en forma realista y detallada una estructura por medio de un programa, cabe llamar la atención sobre la tendencia que se aprecia cada vez más notoria en muchos ingenieros, de buscar en la etapa de análisis un grado de precisión incongruente con la poca atención que prestan a la determinación del modelo de la estructura y del sistema de cargas.

A partir de la sección que concierne a la geometría de los sistemas estructurales, el proyecto se limitará a analizar marcos tridimensionales. Para el caso de materiales se considerará el caso solamente de materiales elásticos lineales y para la generación de acciones como alternativa el proyecto genera las fuerzas sísmicas a partir de los datos de geometría, carga muerta y viva.

En general el proyecto sólo abarca los rubros que pueden ser mecanizados. Los métodos empleados y la forma de uso corresponderán a los capítulos siguientes.

Capítulo II

El Método de rigidez.

2.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla el análisis de estructuras reticulares por el método de rigideces para el caso tridimensional, dicho de otro modo, se describe el caso de seis grados de libertad por cada nodo. Se explica de forma general la fundamentación de este método en base en la teoría de la elasticidad lineal, desde los principios básicos de la mecánica, la idealización de una barra y la formación de la matriz de rigidez. Asimismo se describe el procedimiento matricial desarrollado del método de rigideces para formar el programa de análisis.

Dado que este método es muy versátil, muchos tópicos adicionales pueden ser incorporados al método sin cambios sustanciales en el procedimiento matricial, tales como desplazamientos en apoyos, apoyos con restricciones elásticas, entre otros, los cuales sólo se mencionan ya que el presente trabajo no los cubre, pero son tópicos indispensables en el análisis cotidiano de las estructuras, que probablemente serán objeto de otro estudio.

Por último se manifiestan las ventajas y desventajas de usar el método de rigidez, además de señalar los alcances y limitaciones de dicho método.

2.2 Fundamentos de la elasticidad lineal.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la atención se concentrará en los cuerpos elásticos lineales, cuya teoría es la representación más simple del comportamiento de los cuerpos deformables, pero la simplicidad de su fundamento no significa que las ecuaciones deducidas sean también sencillas de resolver. Se comienza por definir los conceptos básicos matemáticos de la mecánica.

La mecánica puede ser resuelta bajo dos enfoques:

- Newtoniana.- El cuerpo no se modifica a velocidades bajas, es decir, tal que su velocidad dividida entre la velocidad de la luz, sea casi cero.
- Relativista.- El cuerpo se modifica a velocidades de la luz.

La mecánica newtoniana es un caso especial de la relativista que para los casos que el ingeniero resuelve, como es natural esperarse, se aplica la Mecánica Newtoniana.

Cualquier modelo matemático sobre cuerpos deformables deben satisfacer cinco principios de la mecánica newtoniana, los cuales se enuncian:

1.- Principio de conservación de masas.

La masa de un cuerpo nunca cambia al estar en movimiento.

2.- Principio de Balance de cantidad de movimientos.

Esta Ley nos establece que la rapidez de la variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Da lugar a la segunda ley de Newton. Relaciona al cuerpo con las velocidades del mismo, dichas suposiciones generan la ecuación de movimiento de Cauchy.

3.- Principio de balance del momento de cantidad de movimiento.

La rapidez de variación con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento respecto a un punto de un cuerpo es igual al momento resultante respecto al mismo punto de las fuerzas externas del cuerpo, suponiendo que no hay concentraciones tipo par.

4.- Principio de conservación de energía.

La rapidez del cambio de la suma de las energía cinética e interna del cuerpo es igual al trabajo que por unidad de tiempo desarrolla las fuerzas externas al cuerpo más otras energías que entran o salen del cuerpo.

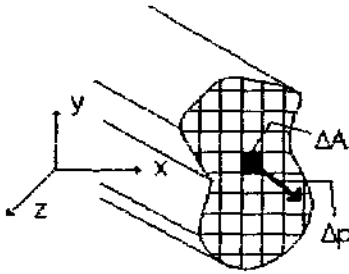
5.- Principio de entropía o la desigualdad de Clausius-Dukem.

La rapidez de variación de la entropía total del cuerpo nunca es menor que la entropía que entra a través de la superficie frontera, las fuentes de entropía por unidad de masa.

Una forma de resolver el comportamiento de los cuerpos deformables, es la teoría de la elasticidad lineal, que es la forma más simple. Esta teoría se fundamenta bajo las siguientes hipótesis:

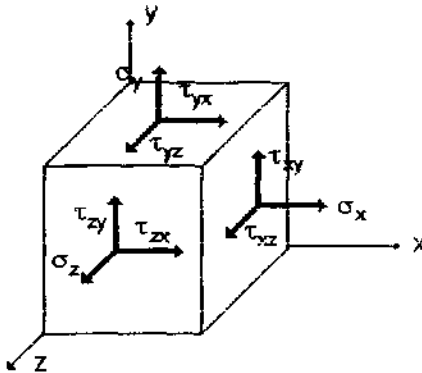
- 1.- El material es un medio continuo.
- 2.- El material es un sólido elástico lineal.
- 3.- La magnitud de los desplazamientos de los puntos del cuerpo son tan pequeños, que el tensor de deformaciones se considera infinitesimal.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo deformable son de naturaleza vectorial y actúan en distintas posiciones y direcciones, es por ello que es necesario descomponer dichas fuerzas en componentes ortogonales. Se define entonces como esfuerzo a la intensidad de fuerza actuando sobre un punto infinitesimal:



$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Para el elemento infinitesimal mostrado, dicho esfuerzo se descompone en otros más simples que son ortogonales entre sí dependiendo de la dirección donde actúan. Así pues cuando el esfuerzo actúa en la dirección paralela a un eje del sistema de coordenadas es un esfuerzo normal, cuando es perpendicular es esfuerzo cortante. En la figura se muestran dichos esfuerzos en su dirección positiva.



$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Se define como σ al esfuerzo normal y τ como esfuerzo cortante, el primer subíndice indica el plano perpendicular al eje donde actúa, y el segundo subíndice representa la dirección de dicho esfuerzo. Del elemento infinitesimal mostrado la representación matricial se denomina tensor esfuerzo y tensor deformación. Dichos tensores son de segundo rango, que requiere dos subíndices para determinar a todos sus elementos, un vector es un tensor de rango uno y un escalar un tensor de rango cero. Por requisito de equilibrio el tensor de esfuerzos es simétrico.

Cuando se aplica un sistema de cargas a un cuerpo deformable, es entonces necesario definir la cantidad de deformación en términos del sistema de referencia en cuestión.

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Definidos los tensores de esfuerzo y deformación, la primera hipótesis de la elasticidad señala que la relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones es lineal. De este modo

$$\bar{\tau} = C\bar{\varepsilon} \quad (2.7)$$

Donde C es una constante cualquiera. A esta relación lineal se le conoce como la Ley de Hooke (En 1676 Hooke realmente trabajó con resortes y no con barras). La Ley General de Hooke al formularse utilizó como válido el principio de superposición el cual expresa que el esfuerzo o la deformación resultante en un sistema sometido a varias fuerzas es la suma algebraica de sus efectos cuando se aplican individual o separadamente. Dicho en otras palabras, los efectos de un conjunto de fuerzas es igual a la suma de los efectos de cada fuerza. El principio de superposición sólo es válido cuando las deformaciones son pequeñas en comparación con la geometría del cuerpo, lo que afortunadamente en realidad sucede, de este modo queda liberada la hipótesis II.

Como el material es un medio continuo homogéneo, se tienen 36 constantes en el tensor de proporcionalidad cuando es material anisotrópico, lo cual es sumamente difícil determinar experimentalmente, se puede demostrar que la simetría de los tensores de esfuerzo y deformación también el tensor de constantes es simétrico y se reducen las constantes a 21. Estas suposiciones son aplicable al caso de materiales compuestos tales como plásticos reforzados con filamentos, rellenos de secciones compuestas.

Dichos estudios quedan fuera del alcance de este trabajo, en vez de ello, se examina el caso para materiales isotrópicos, cuyas simplificaciones son ampliamente aceptadas. De las 21 constantes del tensor de constantes anisotrópico, se puede demostrar que para una condición tal que las constantes de la diagonal sean iguales y el resto de la matriz simétrica, todas las otras constantes desaparecen. Esta simplificación origina la Ley de Hooke Generalizada, de la cual se establecieron tres restricciones y solo quedan tres constantes, con lo que la relación entre esfuerzo y deformación quedan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] & \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] & \sigma_{xz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] & \sigma_{yz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (2.8)$$

O despejando las deformaciones en términos de los esfuerzos, se tiene que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right] & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La parte de la mecánica del medio continuo que permite modelar el material es la teoría de las ecuaciones constitutivas, las cuales son una teoría particular sobre un material y comportamiento específico. En base a nuestro sistema de referencia las ecuaciones 2.8 y 2.9 se definen como las ecuaciones constitutivas de la Ley de Hooke Generalizada.

Bajo la suposición de deformación lateral de las tres constantes necesarias, se utilizan realmente dos: E y G, dado que la relación se deduce como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.10)$$

De donde :

E : Módulo de elasticidad o la tangente de la curva esfuerzo deformación.

G : Módulo de elasticidad al cortante o módulo de rigidez.

ν : Coeficiente de Poisson:

De los principios de la mecánica mencionados, el que se satisfará es el de equilibrio, que se conocen como las Ecuaciones de Cauchy de Movimiento las cuales resultan ser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde

ρ : Densidad de masa del cuerpo.

f_x, f_y, f_z : Componentes en las direcciones x,y,z debidas al peso propio del cuerpo.

t : Representa la variación de las funciones vectoriales respecto al tiempo.

Finalmente para armar el modelo matemático que ya haya cumplido los principios de la mecánica, éste se construye con

- Las ecuaciones del tensor de deformaciones
- Las ecuaciones constitutivas (Ley de Hooke Generalizada)
- Las ecuaciones de movimiento (Ecuaciones de Cauchy del Movimiento).

Para nuestro caso, se sustituyen las ecuaciones de los tensores en las constitutivas de Hooke. Este resultado se sustituye en las ecuaciones de movimiento de Cauchy, cuyo resultado se denominan ecuaciones de campo, denominadas Ecuaciones de Navier.

$$\begin{aligned}
 G \left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 G \left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 G \left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como es de esperarse las soluciones de este sistema resultan ser extraordinariamente difíciles. Las ecuaciones de Navier, con las simplificaciones mencionadas son válidas para los sólidos elásticos lineales isotrópicos de cualquier forma. Sin duda alguna, es necesario hacer múltiples simplificaciones específicas para cada caso en particular.

Para resolver este sistema tenemos varios métodos con diferentes restricciones, de los cuales unos son simplificaciones de otros. Para tener una idea, el sistema mencionado se puede resolver mediante:

1.- Métodos Aproximados:

- Potencial.
- Variable compleja.
- Transformadas integrales.
- Variaciones
- Del Error
- Diferencias finitas.
- Elementos finitos.

2.- Métodos Directos:

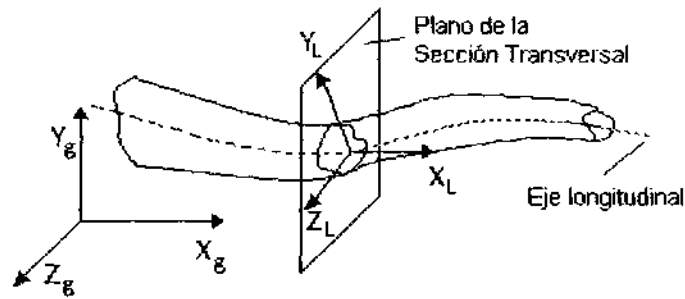
- Flexibilidades.
- Rigideces.

Sin embargo, como nuestro caso es una retícula, la geometría formada a base de barras nos hace generar nuevas hipótesis que simplifican notablemente la solución, de este modo nos concentraremos en la idealización de la barra, cuya idealización, como se discutirá posteriormente, cae en la clasificación de los métodos directos.

2.3 Idealización de la barra

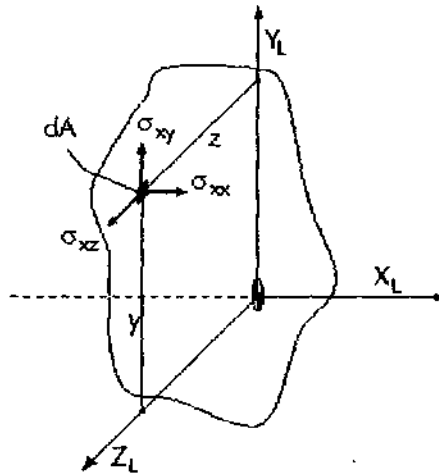
Se retoma la definición de barra como un cuerpo el cual tiene una dimensión mucho menor que las otras dos. Por razones de solución matemática, para simplificar aún más el modelo se supone que:

1. La barra tiene su eje recto, con lo que su eje queda definido por solo dos puntos
2. La sección transversal es constante a lo largo del eje.



Se define también un sistema de referencia cartesiano, pero este tendrá su origen en el centroide de la sección transversal (centroidal) y el sistema será ortogonal con los esfuerzos máximos (principal). A este sistema centroidal y principal se le denominará sistema de referencias local.

A cada punto de la barra, le corresponde un vector esfuerzo como se indica.



Las fuerzas resultantes provocadas por dichos esfuerzos serán las siguientes:

$$\begin{aligned}
 N_x^e &= \int_A \sigma_{xx} dA & M_x^e &= \int_A (y \sigma_{xx} - z \sigma_{xy}) dA \\
 V_y^e &= \int_A \sigma_{xy} dA & M_y^e &= \int_A z \sigma_{xx} dA \\
 V_z^e &= \int_A \sigma_{xz} dA & M_z^e &= -\int_A y \sigma_{xx} dA
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donde se tienen tres fuerzas y tres momentos, que se denominan *elementos mecánicos* que por la posición respecto al eje de la barra se reconocerán como se indican:

$$\begin{aligned}
 N_x^e &= \text{Fuerza normal en X.} & M_x^e &= \text{Momento torsionante en X} \\
 V_y^e &= \text{Cortante en Y} & M_y^e &= \text{Momento flexionante en Y} \\
 V_z^e &= \text{Cortante en Z} & M_z^e &= \text{Momento flexionante en Z}
 \end{aligned}$$

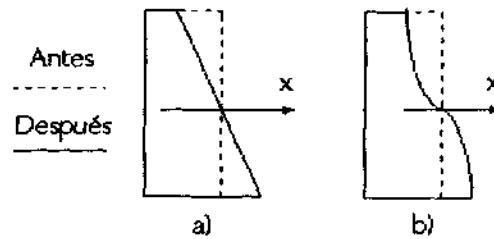
Ya que los esfuerzos de la figura son provocados por cargas externas, el superíndice "e" de los elementos mecánicos significa "equilibrante", ya que son fuerzas internas que contrarrestan los efectos de las fuerzas externas para cumplir las condiciones de reposo. El subíndice x,y,z indica la dirección del vector. El signo de las fuerzas corresponde a la

orientación del vector respecto del sistema de la barra, para los momentos se considera positivo si sigue el sentido contrario a las manecillas del reloj en el plano resultante, conocida esta convención como "la ley de la mano derecha".

Para calcular la relación entre esfuerzo y deformaciones entre dichos elementos, es necesario ahora definir una configuración de deformación. Al retomar el concepto de deformaciones infinitesimales es válido suponer la Hipótesis de Navier para secciones transversales la cual se enuncia:

Hipótesis de Navier:

"Las secciones planas y normales al eje de la barra antes de la deformación, permanecen planas y normales después de la deformación".



Con esto se elimina la posibilidad de alabeo de la sección, mostrado en la figura b), que en algunos casos de secciones de espesores pequeños se presenta.

2.3.1 Distribución debido a esfuerzo normal

La hipótesis de Navier implica que la deformación quede definida en un plano de la forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\beta + \gamma \cdot y + \delta \cdot z) = b + cy + dz \quad (2.14)$$

Donde b,c,d son las constantes que definen un plano cualquiera y hay que encontrar su solución. Al igualar la deformación con el plano se tiene que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] = b + cy + dz \quad (2.15)$$

Tenemos que en la teoría de barras se tiene que: "los esfuerzos normales son independientes entre sí", por lo que se tiene la condición de que $\nu = 0$. Entonces se considera solo una dirección:

$$\sigma_{xx} = E(b + cy + dz) \quad (2.16)$$

Por definición, los momentos estáticos de la sección transversal, se conocen como propiedades geométricas de la sección las cuales se definen como:

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A & \int_A y^2 dA &= I_z \\ \int_A y dA &= Q_z & \int_A z^2 dA &= I_y \\ \int_A z dA &= Q_y & \int_A y z dA &= I_{yz} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde

A: Área transversal.

- Q_z : Momento estático de primer orden respecto al eje Z.
 Q_y : Momento estático de primer orden respecto al eje Y.
 I_y : Momento estático de segundo orden o Inercia respecto al eje Y.
 I_z : Momento estático de segundo orden o Inercia respecto al eje Z.
 I_{yz} : Momento estático de segundo orden o Inercia respecto al plano YZ.

Por simplicidad del manejo de las ecuaciones, se sustituyen estas ecuaciones (2.17), en las ecuaciones (2.13) que contengan al término σ_{xx} , de este modo se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{N_x^e}{E} &= Ab + Q_z c + Q_y d \\
 \frac{M_y^e}{E} &= Q_y b + I_{yz} d + I_y d \\
 -\frac{M_z^e}{E} &= Q_z b + I_z c + I_{yz} d
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

De las cuales se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuyas incógnitas del sistema son las constantes b, c, d que definen el plano de la sección. El valor de b, c y d obtenido se vuelve a sustituir en las ecuaciones (2.13) que contenga al término σ_{xx} . Pero con la condición de que:

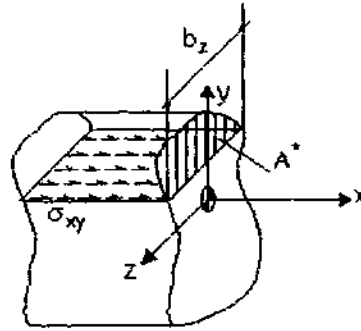
- 1.- El sistema es centroidal, es decir $Q_z = 0$ y $Q_y = 0$
- 2.- El sistema es principal, es decir $I_{yz} = 0$.

Entonces se tiene definido la fórmula del esfuerzo normal en función de las propiedades geométricas de la sección y de los elementos mecánicos equilibrantes, conocida esta también como "fórmula de la escuadría":

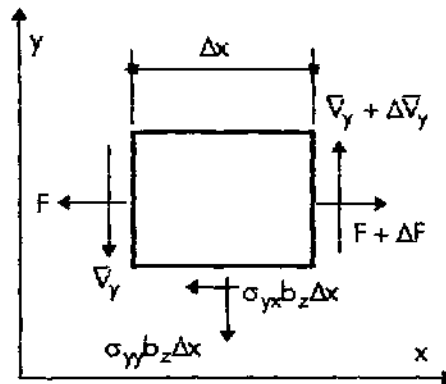
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x^e}{A} - \frac{M_z^e}{I_z} + \frac{M_y^e}{I_y}
 \tag{2.19}$$

2.3.2 Distribución debidos a esfuerzos cortantes.

De las ecuaciones (2.13), falta resolver las que contengan los términos σ_{xy} y σ_{yz} que corresponden a los esfuerzos cortantes. En la figura se muestra un corte paralelo a X y perpendicular a Y, que define una cuña, cuya área transversal es A^* , mostrada en forma sombreada y el resto del área no sombreada no participa en el esfuerzo actuante correspondiente:



Del mismo modo, se toma un elemento infinitesimal para conocer los esfuerzos actuantes:



Para la cuña mostrada y el elemento infinitesimal de cortante mostrados:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{b_z} \frac{dF}{dx} \qquad \sigma_{yy} = \frac{1}{b_z} Q_z \bar{V}_y \qquad (2.20)$$

Donde:

$$F = \int_{A^*} \sigma_{xx} dA \qquad \bar{V}_y = \int_{A^*} \sigma_{xy} dA \qquad (2.21)$$

Que corresponden a la fuerza axial y cortante respectivamente para el elemento infinitesimal de la cuña.

Se contempla la hipótesis para esfuerzos cortantes de que σ_{xy} y σ_{yz} son constantes para todo lo ancho de b_z y que N_x^e también es constante. De este modo se puede en forma aproximada definir:

$$\bar{V}_y = -\frac{A^*}{A} V_y^e \qquad (2.22)$$

Por definición se tienen las propiedades de sección similares a las mostradas en las ecuaciones (2.17), hay que considerar el área de la cuña solamente:

$$\bar{Q}_y = \int_{A^*} y dA \qquad \bar{Q}_z = \int_{A^*} z dA \qquad (2.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.23) en las (2.21), y este resultado se sustituye en las ecuaciones (2.20) se tiene que para un sistema centroidal y principal :

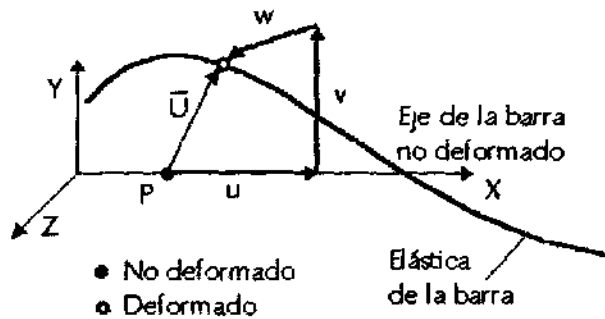
$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \frac{\bar{Q}_z V_y^e}{I_z b_z} + \frac{\bar{Q}_y V_z^e}{I_y b_y} \quad (2.24)$$

Con esto ya se han definido los tres esfuerzos que están un función de los elementos actuantes equilibrantes.

2.3.3 Deformaciones debidas a esfuerzo normal.

A la configuración deformada del eje de la barra se le conoce como "elástica de la barra". Esta última quedará definida si se conocen los desplazamientos en todos sus puntos. Los componentes del vector de desplazamiento medidos desde los puntos que definen el eje de la barra, se denominan *deflexiones*.

Los componentes de desplazamientos paralelos al eje x de cualquier otro punto de una sección transversal, se cuantificarán tomando en cuenta las hipótesis ya descritas.



En la figura se muestran el cambio de un punto sobre el eje no deformado al eje deformado o elástica. Este cambio se define mediante tres vectores de desplazamiento en función de las coordenadas x, y, z , dichos vectores se denominan como u, v, w .

Continuando con la consideración de deformaciones infinitesimales, donde la tangente de algún ángulo se puede aproximar con el valor del mismo ángulo expresado en radianes y la Hipótesis de Navier, se definen los desplazamientos como a continuación se muestra. Para mayor entendimiento de las figuras se dibuja una sección rectangular, aunque estas deducciones son válidas para cualquier forma de la sección transversal.

Los procedimientos subsecuentes definirán los valores de todos los elementos del tensor de deformaciones en base a las ecuaciones de esfuerzos deducidas en la sección anterior, bajo la consideración que las deformaciones existentes en la barra idealizada son giros (deformaciones angulares) o deflexiones (desplazamientos).

La relación existente entre las distintas ecuaciones de elementos mecánicos y deformaciones son derivadas de un orden superior progresivamente. Solo se aclara que para fines de convención matemática la relación existente es la que se muestra, en términos de derivadas lineales.

$$\begin{aligned}
 E \frac{dv}{dx} &= \theta & E \frac{d\theta}{dx} &= M & \frac{dM}{dx} &= V & \frac{dV}{dx} &= W \\
 E \frac{d^2v}{dx^2} &= M & E \frac{d^2\theta}{dx^2} &= V & \frac{d^2M}{dx^2} &= W & & \\
 E \frac{d^3v}{dx^3} &= V & E \frac{d^3\theta}{dx^3} &= W & & & & \\
 E \frac{d^4v}{dx^4} &= W & & & & & &
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

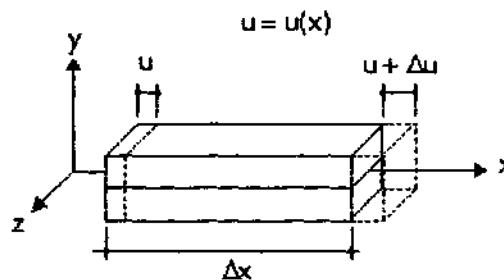
Donde

- v = Deflexión.
- θ = Giro
- M = Momento Flexionante:
- V = Cortante
- W = Función de discontinuidad de carga actuante.

Dado que u, v y w son desplazamientos, su primera derivada significará un giro, la segunda derivada un momento flexionante y la tercera una fuerza. Esta aclaración se hace por que será necesario definir otra nomenclatura para deformaciones al formar la matriz de rigidez.

a) *Desplazamientos debidos a una traslación.*

En la figura se muestra un desplazamiento paralelo al eje X, en un elemento infinitesimal



Dado que la proporción entre desplazamientos es lineal, se hace la interpolación necesaria para calcular Δu

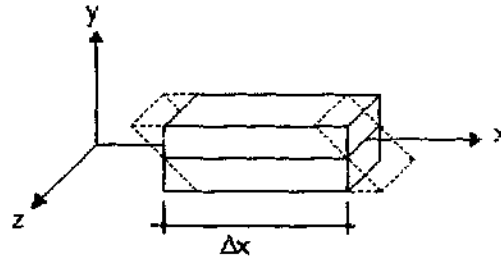
Donde:
$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x$$

De lo anterior, la deformación unitaria paralela al eje X, debida a un desplazamiento en la misma dirección, queda definido en términos de la función u como sigue:

$$(\epsilon_{xx}) u = \frac{du}{dx} \quad (2.26)$$

b).- Desplazamientos debidos a una rotación.

En la figura se muestra una configuración de deformación ocasionado por una rotación en z.



$$(\epsilon_{xx}) v_b = -y \frac{d^2 v_b}{dx^2} \quad (2.27)$$

Del mismo modo para el giro respecto a Y se tiene un valor similar al anterior:

$$(\epsilon_{xx}) w_b = -z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.28)$$

El primer valor del tensor de deformaciones paralelo al eje x, en cualquier punto de la sección transversal resulta la suma de las deformaciones anteriores, que incluyen las tres funciones de desplazamiento u, v y w :

$$\epsilon_{xx} = (\epsilon_{xx}) u + (\epsilon_{xx}) v_b + (\epsilon_{xx}) w_b = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2 v_b}{dx^2} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.29)$$

En la sección anterior se utilizó como condición que los esfuerzos son principales, por lo tanto se deberá respetar la misma. Al sustituir el resultado anterior en la ecuación correspondiente a su esfuerzo:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Y definido en la sección anterior el esfuerzo normal debido a fuerzas actuantes o "fórmula de la escuadría", se correlaciona cada parámetro de las ecuaciones de esfuerzo y deformación correspondientes a cada una de las funciones de desplazamiento u, v y w , de este modo se tiene que:

$\frac{du}{dx} = \frac{N_x^e}{EA}$	$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = \frac{M_z^e}{EI_z}$	$\frac{d^2 w_b}{dx^2} = \frac{M_y^e}{EI_y}$
------------------------------------	---	---

(2.30)

Para calcular las deflexiones para todos los puntos, será necesario entonces integrar estas ecuaciones en la región donde se define el eje de la barra, lo cual se realiza en dos secciones posteriores.

2.2.4.- Deformaciones debidas a esfuerzo cortante.

De la ecuación 2.24 se obtuvieron las ecuaciones correspondientes a esfuerzos cortantes. De dichas ecuaciones se supone que $\bar{Q}_y = 0$. Por lo que se tiene:

$$\sigma_{xy} = \frac{\bar{Q}_z V_y^e}{I_z b_z} \quad (2.31)$$

Se toma la ecuación 2.5, igualando a las ecuaciones constitutivas para cortante 2.9, sustituyendo apropiadamente el módulo de elasticidad de cortante en la ecuación 2.10 y con la ecuación anterior se tiene que:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{\bar{Q}_z V_y^e}{I_z b_z G} \quad (2.32)$$

Analizando la sección antes y después de la deformación por cortante tendremos que

$$u = -y \frac{d^2 v_b}{dx^2}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 2.31 y derivando parcialmente respecto a Y se tiene:

$$-\frac{dv_b}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

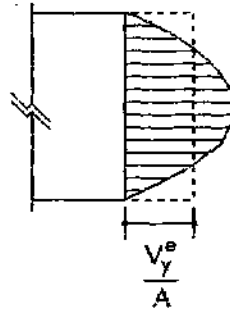
Como ya se aplicó la hipótesis de Navier en las deformaciones normales, es necesario aplicarlas a la ecuación anterior, de este modo, la derivada parcial se convierte en una derivada lineal, de este modo se factoriza para obtener:

$$\frac{d}{dx}(v - v_b) = \frac{dv_s}{dx} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{\bar{Q}_z V_y^e}{I_z b_z G} \quad (2.33)$$

Donde v_s la definimos como la deflexión provocada por cortante. De este modo la deflexión total corresponde a la deflexión por flexión y a la debida por cortante. Es decir:

$$v = v_b + v_s \quad (2.34)$$

En la ecuación de esfuerzo cortante 2.33 se puede notar que el momento estático y el ancho de la base del corte de la cuña generan una distribución de esfuerzo como se muestra en la figura:



En la figura se muestra un corte de la sección transversal con la distribución real de esfuerzos por cortante. El inconveniente surge por que hay que realizar la integración punto por punto para obtener el efecto total cuando se analiza la sección con cargas actuantes. Para superar este problema, esta distribución real se simplifica por una distribución promedio, que se muestra en la figura como punteada.

Considerando el promedio de la distribución, las ecuaciones de esfuerzo y deflexión por cortante se convierten respectivamente en:

$$\sigma_{xy} = \frac{f_y}{A} V_y^e \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{f_y}{AG} V_y^e \quad (2.35)$$

El término f_y es un parámetro adimensional denominado factor de corrección por cortante o factor de forma. Dicho factor es necesario para igualar el efecto de la distribución promedio al de la distribución real.

Considerando las variables de la distribución real que no intervienen en la distribución promedio, se define el valor del factor de forma, el cual resulta ser:

$$f_y = \frac{A}{(I_z)^2} \int_A \left(\frac{Q_z}{b_z} \right)^2 dA \quad (2.36)$$

Dicho factor se calcula con datos a partir de datos de la geometría exclusivamente, por lo que es mejor la conveniencia de usar la distribución promedio de esfuerzos. Pero aún queda superar el inconveniente que a lo largo de la barra se tienen distintos valores de cortante, por lo que las ecuaciones (2.33) no son muy prácticas, entonces se utiliza un factor de forma equivalente constante para toda la longitud de la barra. Este factor de forma equivalente es:

$$\Phi_y = \frac{12 f_y E I_z}{AGL^2} \quad (2.37)$$

Que como podrá notarse depende del factor de forma previamente definido. Entonces la ecuación diferencial para deflexiones ocasionadas por cortante queda como:

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \frac{\Phi_y L^2}{E I_z} V_y^e \quad (2.38)$$

Con lo anteriormente deducido se ha resuelto el caso para deflexión por cortante para el esfuerzo cortante en el plano XY. Para el caso del plano XZ los razonamientos anteriores son aplicables de la misma manera haciendo cambiar las variables correspondientes por el cambio del plano, de este modo se parte de que:

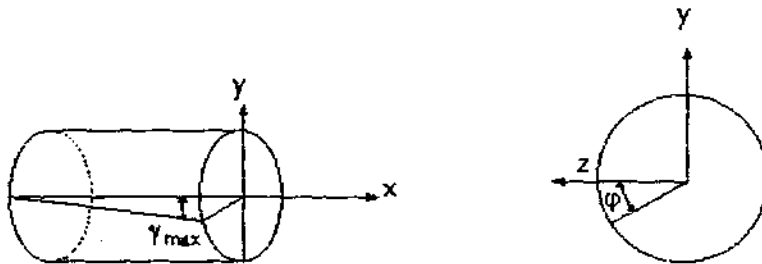
$$\sigma_{xz} = \frac{\bar{Q}_y V_z^e}{I_y b_y} \quad \text{y} \quad w = w_b + w_s \quad (2.39)$$

De este modo para el plano XZ, con el mismo procedimiento para el plano XY se obtienen resultados en forma parecidos a los recientemente calculados:

$$\Phi_z = \frac{12 f_z E I_y}{A G L^2} \quad \frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{12} \frac{\Phi_z L^2}{E I_y} V_z^e \quad (2.40)$$

2.3.5.- Deformaciones debidas a esfuerzo por torsión.

Este es el último elemento del tensor de esfuerzos que falta por analizar. Su análisis se basa en la hipótesis de que los pares que actúan en la barra son sólo en los extremos, es decir, únicamente en la superficie del cuerpo.



En la figura se muestra la deformación angular provocada por un elemento sujeto a torsión. Para el caso de torsión restringida todos los elementos del tensor de esfuerzos valen cero, excepto τ_{xz} y τ_{xy} . Por lo que:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Por lo que al sustituir se tiene que:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.41)$$

Donde el desplazamiento v , por coordenadas polares se extrae a partir de los datos de la figura como $v = -\phi z$. Lo que al sustituir arroja :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Esta ecuación al integrarla con las condiciones de frontera apropiadas, define los desplazamientos por torsión.

$$v = -\theta x z \quad w = \theta x y$$

Que al sustituir las en las ecuaciones de equilibrio se tiene un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$M_x^e = \int_A (y \sigma_{xx} - z \sigma_{xy}) dA$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right) = \sigma_{xy}$$

$$G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right) = \sigma_{xz}$$
(2.42)

Las incógnitas son $\theta, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ y u . Este sistema es muy complejo de resolver para un caso general. Entonces para realizar la integración se recurre al Método Semi-Inverso de Saint-Venant o Método de Potenciales.

Este método considera que existe un potencial de la forma $\Phi = \Phi(y, z)$, el cual al ser sustituido en la segunda ecuación se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$
(2.43)

Si se derivan parcialmente la tercera y cuarta ecuación respecto a Z y Y respectivamente, se obtienen:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \theta \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = G \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \theta \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$
(2.44)

Este último resultado aplicado por el método de Saint-Venant nos conduce a la Ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta$$
(2.45)

Para integrar esta ecuación de Poisson es necesario establecer una condición de esfuerzos tal que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

Por lo tanto el momento torsionante, que es la última ecuación por resolver se simplifica a:

$$M_x^e = 2 \int_A \Phi dA$$
(2.46)

La función Φ se inventa de modo que satisfaga las condiciones de frontera. En este momento se supone que dicha función puede ser sustituida por una constante J , que se denomina constante torsional. De este modo, el momento torsionante queda expresado como:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x^e}{GJ}$$

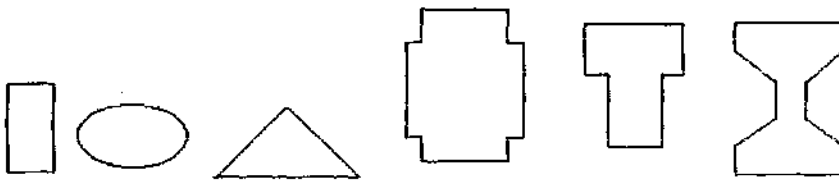
$$M_x^e = GJ\theta \quad (2.47)$$

La constante torsional J tiene ciertas consideraciones dependiendo de la forma de la sección. Para caso de secciones que puedan definirse mediante una función ρ en coordenadas polares sean de sección hueca o maciza se calcula como:

$$J = \int_A \rho^2 dA \quad (2.48)$$

En general las secciones que no caen en la definición anterior se clasifican para efectos de torsión como:

a).- Secciones llenas o de pared gruesa.



La constante torsional se puede aproximar mediante la ecuación:

$$J = \frac{A^4}{40 I_p} \quad (2.49)$$

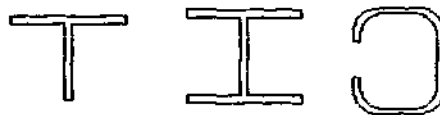
Donde A : Es el área transversal de la sección

$I_p = I_y + I_z$: Es el momento polar de inercia.

Si la sección es compuesta, entonces se debe usar la sumatoria de cada una de las sub-secciones que la componen:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i \quad (2.50)$$

b).- Secciones abiertas de pared delgada.



Las secciones de pared delgada son básicamente las formadas por diversas placas cuyo espesor es reducido en proporción a su dimensiones generales y se dice que son abiertas porque existe discontinuidad en alguno o más de sus puntos que le impiden formar una celda (espacio cerrado). La constante torsional se puede aproximar como:

$$J = \frac{1}{3} b t^3 \quad \text{Para una sola placa.} \quad (2.51)$$

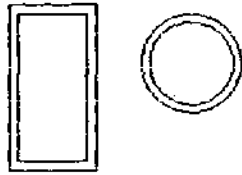
$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad \text{Para secciones compuestas de múltiples placas.} \quad (2.52)$$

Donde b es la base, y t el espesor.

c).- Secciones cerradas de pared delgada.

La sección cerrada está perfectamente confinada para formar celdas.

Si la sección tiene una celda:



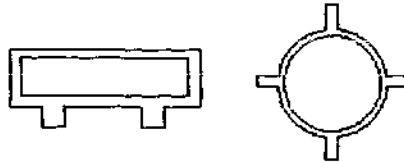
$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{\partial s}{t}} \quad (2.53)$$

Si la sección tiene varias celdas:



$$J = \frac{2}{G\theta} \sum_{i=1}^n q_i \Omega_i \quad (2.54)$$

d).- Secciones híbridas.



Son las secciones formadas por una celda y varios apéndices:

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{\partial s}{t}} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3 \quad (2.55)$$

Como se podrá haber notado, las aproximaciones de constantes torsionales pueden irse sumando directamente para cualquier tipo de sección. Aunque cabe aclarar que son excepcionales los casos que requieren una geometría de sección muy complicada como las últimas mencionadas, por fines prácticos en edificios de concreto se utilizan solo secciones de pared gruesa o llenas.

2.4. La Matriz de Rigidez.

Una vez que se han definido las ecuaciones diferenciales de equilibrio de una barra en la sección, en este punto se aclaran algunas consideraciones fundamentales sobre el concepto de rigidez. En los cuerpos deformables existe una relación entre las acciones y las deformaciones. Según el punto de interés es como se definen dos conceptos de esta relación muy importantes: la rigidez y la flexibilidad.

La flexibilidad se expresa básicamente como la capacidad que tiene un cuerpo de deformarse bajo la acción de una carga. Con esto se quiere decir que un elemento flexible es aquel que se deforma cuando se aplica una carga y uno menos flexible es aquel que se deforma menos con la acción de la misma carga.

El modo de expresar a la rigidez es prácticamente el mismo con la salvedad que la rigidez es lo contrario de la flexibilidad. Un miembro muy rígido se deforma poco bajo la acción de una carga, en comparación a uno menos rígido, que se deforma más con la

misma carga. Para fines de definición se dice que la flexibilidad es el desplazamiento provocado por una acción unitaria y la rigidez es la fuerza generada por un desplazamiento unitario.

Las siguientes fórmulas expresan la forma matemática de ver la relación inversa entre acción y desplazamiento, así como la relación también inversa entre rigidez y flexibilidad.

$$K = \frac{P}{\Delta} \quad F = \frac{\Delta}{P} \quad K = \frac{1}{F} \quad (2.56)$$

Donde K =Rigidez

P : Acción.

F =Flexibilidad.

Δ : Deformación.

La diferencia entre flexibilidad y rigidez para un punto de vista de modelación matemática consiste en que si el interés es conocer los desplazamientos o las fuerzas.

Una vez definidos estos conceptos se menciona que las estructuras cuyas incógnitas no pueden ser resueltas mediante la mecánica de cuerpos rígidos se denominan hiperestáticas o indeterminadas, estas últimas son el caso analizado en el presente proyecto. De las estructuras indeterminadas existen dos tipos de indeterminaciones,

a) Indeterminación estática

Cuando se considera que las incógnitas son fuerzas. En este caso se aplica el método de flexibilidades

b) Indeterminación cinemática.

Cuando se considera que las incógnitas son los desplazamientos. En este caso se aplica el método de rigideces.

Para ambos casos la solución es un sistema de ecuaciones linealmente independientes, en el cual, las incógnitas en su caso respectivo se consideran con un valor unitario de acuerdo con su definición. Este razonamiento es válido para el sistema de ecuaciones, ya que los coeficientes involucrados son proporciones y no valores absolutos.

Cualquiera de los dos métodos debe satisfacer dos condiciones fundamentales:

a) Condiciones de Equilibrio:

En otras palabras, que se conserva la condición de reposo de la estructura, es decir, que la suma de momentos y fuerzas internas y externas sean cero en cualquier punto de la estructura.

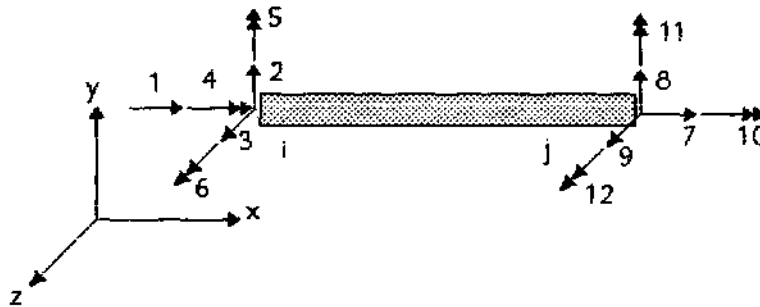
b) Condiciones de Compatibilidad:

Que las deformaciones sean continuas y consistentes con las condiciones de apoyo de la estructura para cada punto de la misma. Es decir, que la continuidad de todos los puntos de la estructura no deformada, permanecen continuos después de la deformación y que estas deformaciones satisfacen las restricciones de deformaciones impuestas.

El método utilizado en este proyecto es el método de rigideces, fundamentado básicamente en que se requiere resolver un solo sistema de ecuaciones para conocer los desplazamientos y de forma indirecta calcular las fuerzas de toda la estructura, mientras

que el método de flexibilidades requiere resolver un sistema de ecuaciones por cada incógnita lo que implica que el número de sistemas de ecuaciones por resolver varía de forma exponencial arrojando un número sumamente grande, además de que el método de rigideces es versátil, ya que puede incorporársele otros tópicos de análisis de manera directa, aspecto que no se puede realizar en el método de flexibilidades.

El caso analizado para el método de rigideces es el tridimensional. Este es el caso más generalizado de las estructuras reticulares por el número de grados de libertad por nodo utilizado. El nodo es la intersección de dos o más barras cuyas deformaciones se desean conocer. La barra recta está definida exclusivamente por dos nodos.



Así pues, en la figura mostrada, se advierte que en el caso tridimensional las posibles deformaciones por cada nodo son seis, correspondientes a tres desplazamientos y a tres giros en las tres direcciones x, y, z , los cuales ocasionan tres fuerzas y tres momentos respectivamente por nodo, las fuerzas se representan como una flecha simple y los momentos como una flecha con doble punta. Así pues se tienen 6 deformaciones posibles que originan 6 elementos mecánicos. Ese número significa el número de grados de libertad, que en este caso cada nodo se dice que tiene 6 grados de libertad. Como la barra tiene dos nodos, por conveniencia se dice que uno es inicial (nodo i) y el otro final (nodo j), el total de deformaciones y elementos posibles para una barra en el espacio es de 12, cuya numeración es la sugerida en la figura que es frecuentemente usada por otros autores.

Entonces las deformaciones y elementos de cada barra pueden agruparse de forma vectorial de orden 12, donde el índice respectivo indica de que elemento o deformación se trata, de este modo se retoman los significados definidos en las ecuaciones 2.13, los cuales se transcriben en la tabla siguiente donde se definen los vectores con los elementos que representa:

Indice	Vector P	Significado	Vector deformación
1	F_{xi}	Fuerza axial en x , nodo i	δ_{xi}
2	F_{yi}	Fuerza cortante en y , nodo i	δ_{yi}
3	F_{zi}	Fuerza cortante en z , nodo i	δ_{zi}
4	M_{xi}	Momento torsionante en x , nodo i	θ_{xi}
5	M_{yi}	Momento flexionante en y , nodo i	θ_{yi}
6	M_{zi}	Momento flexionante en z , nodo i	θ_{zi}
7	F_{xj}	Fuerza axial en x , nodo j	δ_{xj}
8	F_{yj}	Fuerza cortante en y , nodo j	δ_{yj}
9	F_{zj}	Fuerza cortante en z , nodo j	δ_{zj}
10	M_{xj}	Momento torsionante en x , nodo j	θ_{xj}

11	M_{yj}	Momento flexionante en y, nodo j	θ_{yj}
12	M_{zj}	Momento flexionante en z, nodo j	θ_{zj}

En la nomenclatura F representa una fuerza y M un momento, el primer subíndice indica la dirección del vector en x,y ó z. El segundo subíndice indica si dicho elemento mecánico corresponde al nodo i ó al nodo j.

Para el caso de deformaciones, δ significa un desplazamiento y θ giro, como el caso anterior el primer subíndice indica la dirección como se genera dicha deformación, y el segundo subíndice representa el nodo perteneciente.

En este punto se tienen ya definidas todas las ecuaciones de equilibrio necesarias para formular la solución por el método de rigideces. La solución de su modelo matemático parte de las ecuaciones diferenciales de equilibrio para un sistema centroidal y principal deducidas en la sección anterior.

Dichas ecuaciones se ordenan para dar secuencia a la forma vectorial explicada, que a manera de resumen se muestran:

$$1).- \frac{du}{dx} = \frac{N_x^e}{EA}$$

$$2).- \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \frac{\Phi_y L^2}{EI_z} V_y^e$$

$$3).- \frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{12} \frac{\Phi_z L^2}{EI_y} V_z^e$$

(2.57)

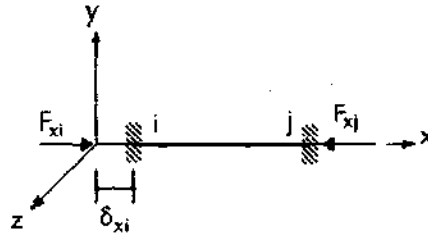
$$4).- M_x^e = G J \theta$$

$$5).- \frac{d^2 w_b}{dx^2} = \frac{M_y^e}{E_y}$$

$$6).- \frac{d^2 v_b}{dx^2} = \frac{M_z^e}{E_z}$$

A continuación se tiene que resolver cada una de las ecuaciones diferenciales mencionadas con las configuraciones para cada uno de los posibles desplazamientos. Para resolverlas, se mencionó anteriormente que se supondrá el valor de dicha incógnita como unitario para todos los casos para definir la rigidez, en una viga restringida en todos los sentidos, es decir, empotrada en todos los extremos. Se aclara que para mayor entendimiento de las figuras, la dirección de los vectores es sugerido, pero las fórmulas deducidas respetan signos de las fuerzas que resulten. Se comenzará analizando las deformaciones del nudo i.

1.- Primera configuración. Desplazamiento en X.



De las ecuaciones de equilibrio se tiene que:

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x^e}{EA} \quad \text{La cual al integrarla respecto a } x \text{ tenemos que: } u = \frac{N_x^e x}{EA}$$

Por condiciones de frontera tenemos que $F_{xi} = N_x^e$ e igualando los desplazamientos se tiene que:

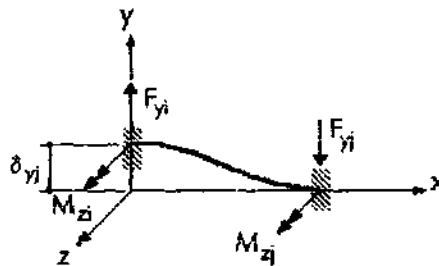
$\delta_{xi} = u = \frac{F_{xi} L}{EA}$ de donde al despejar y considerar la deformación como unitaria se tiene que:

$$F_{xi} = \frac{EA}{L}$$

Para el nodo J, por equilibrio se tiene que $F_{xj} = -F_{xi}$, por lo que de manera similar se tiene que:

$$F_{xj} = -\frac{EA}{L} \quad (2.58)$$

2.- Segunda configuración. Desplazamiento en Y.



Se tienen como acciones equilibrantes que $M_z^e = F_{yi}x - M_{zi}$ y $V_y^e = -F_{yi}$ y sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio correspondientes se tiene que:

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e = F_{yi}x - M_{zi} \quad \text{y} \quad EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \Phi_y L^2 V_y^e = -\frac{1}{12} \Phi_y L^2 F_{yi}$$

Tomando en cuenta que: $v = v_b + v_s$ se debe integrar la primera ecuación para poder sumarlas y realizar la integración de la suma, entonces se tienen las ecuaciones para giro y deflexión:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{F_{yi}x^2}{2} - M_{zi}x - \frac{1}{12}\Phi_y L^2 F_{yi} + C_1$$

$$EI_z v = \frac{F_{yi}x^3}{6} - \frac{M_{zi}x^2}{2} - \frac{1}{12}\Phi_y L^2 F_{yi}x + C_1x + C_2$$

Luego se aplican las siguientes condiciones de frontera para definir las dos constantes:

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad v|_{x=0} = \delta_{yi} \quad v|_{x=L} = 0$$

El valor de las constantes se calcularon como: $C_1 = 0$ y $C_2 = EI_z \delta_{yi}$. Las cuales al sustituirse en las ecuaciones de giro y desplazamiento se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{F_{yi}L^2}{2} - M_{zi}L = 0$$

$$\frac{F_{yi}L^3}{6} - \frac{M_{zi}L^2}{2} - \frac{1}{12}\Phi_y L^3 F_{yi} + EI_z \delta_{yi} = 0$$

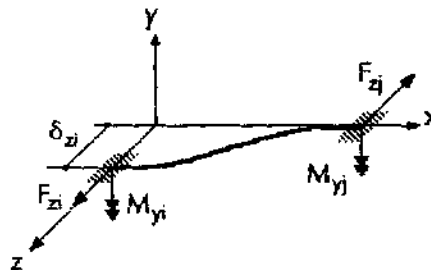
Del mismo modo considerando la deformación como unitaria se resuelve el sistema obteniéndose los siguientes valores:

$$\boxed{F_{yi} = \frac{12EI_z}{(1 + \Phi_y)L^3}} \quad \boxed{M_{zi} = \frac{6EI_z}{(1 + \Phi_y)L^2}} \quad (2.59)$$

Los valores del nodo j se obtienen por equilibrio, lo cual resulta:

$$\boxed{F_{yj} = -\frac{12EI_z}{(1 + \Phi_y)L^3}} \quad \boxed{M_{zj} = \frac{6EI_z}{(1 + \Phi_y)L^2}} \quad (2.60)$$

3.- Tercera configuración. Desplazamiento en Z.



Su solución es prácticamente la misma, pero considerando las acciones y ecuaciones correspondientes. Se tienen como acciones equilibrantes que $M_y^e = F_{zi}x - M_{yj}$ y $V_z^e = F_{zi}$ y sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio correspondientes se tiene que:

$$E_y \frac{d^2 w_b}{dx^2} = M_y^e = F_{zi} x - M_{yi} \quad \text{y} \quad E I_y \frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{12} \Phi_z L^2 V_z^e = -\frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi}$$

Tomando en cuenta que: $w = w_b + w_s$ se debe integrar la primera ecuación para poder sumarlas y realizar la integración de la suma, entonces se tienen las ecuaciones para giro y deflexión:

$$E_y \frac{dw}{dx} = \frac{F_{zi} x^2}{2} - M_{yi} x - \frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi} + C_1$$

$$E_y w = \frac{F_{zi} x^3}{6} - \frac{M_{yi} x^2}{2} - \frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi} x + C_1 x + C_2$$

Luego se aplican las siguientes condiciones de frontera para definir las dos constantes:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad w|_{x=0} = \delta_{zi} \quad w_{x=L} = 0$$

El valor de las constantes se calcularon como: $C_1 = 0$ y $C_2 = E I_y \delta_{zi}$. Las cuales al sustituirse en las ecuaciones de giro y desplazamiento se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{F_{zi} L^2}{2} - M_{yi} L = 0$$

$$\frac{F_{zi} L^3}{6} - \frac{M_{yi} L^2}{2} - \frac{1}{12} \Phi_z L^3 F_{zi} + E I_y \delta_{zi} = 0$$

Del mismo modo considerando la deformación como unitaria se resuelve el sistema obteniéndose los siguientes valores:

$$\boxed{F_{yi} = \frac{12 E I_z}{(1 + \Phi_y) L^3}} \quad \boxed{M_{zi} = -\frac{6 E I_z}{(1 + \Phi_y) L^2}}$$

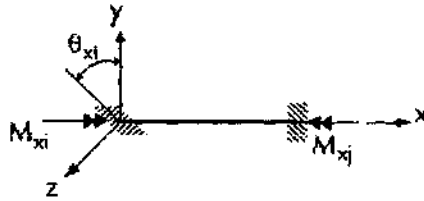
(2.61)

Los valores del nodo j se obtienen por equilibrio, lo que proporciona:

$$\boxed{F_{yj} = -\frac{12 E I_z}{(1 + \Phi_y) L^3}} \quad \boxed{M_{zj} = -\frac{6 E I_z}{(1 + \Phi_y) L^2}}$$

(2.62)

4.- Cuarta configuración. Giro alrededor de X.



Para la figura mostrada, tenemos que la ecuación de equilibrio para torsión es:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x^e}{GJ} \quad \text{donde} \quad M_x^e = M_{xi}$$

De este modo al integrar se obtiene:

$$\theta_{xi} = \frac{1}{GJ} M_{xi} x$$

De la cual, al sustituir las condiciones de frontera para el nodo i:

$$\theta_{xi} = \frac{1}{GJ} M_{xi} L$$

Que despejando se obtiene:

$$M_{xi} = \frac{GJ}{L}$$

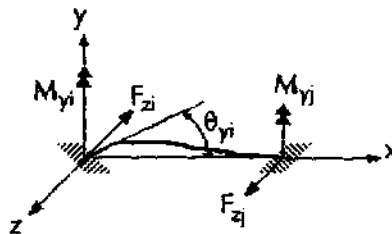
(2.63)

Y finalmente por equilibrio de momentos, para el nodo j, se tiene que: $M_{xj} = -M_{xi}$, por lo tanto:

$$M_{xj} = -\frac{GJ}{L}$$

(2.64)

5.- Quinta configuración. Giro alrededor de Y.



Para la figura mostrada se parte que las fuerzas equilibrantes son:

$$V_z^e = F_{zi} \quad \text{y} \quad M_y^e = M_{yi} - F_{zi}x$$

Y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio se tiene que:

$$E_y \frac{d^2 w_b}{dx^2} = M_y^e = M_{yi} - F_{zi}x \quad \text{y} \quad E I_y \frac{dw_s}{dx} = \frac{1}{12} \Phi_z L^2 V_z^e = \frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi}$$

De estas ecuaciones es necesario integrar la primera para que ambas ecuaciones sean giros. Dado que la deformación total es la deformación por flexión más la de cortante, entonces al sumar se tienen las ecuación para giro total:

$$EI_y \frac{dw}{dx} = M_{yi}x - \frac{F_{zi}x^2}{2} + \frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi} + C_1$$

Al integrarla se obtiene para el desplazamiento total:

$$EI_y w = \frac{M_{yi}x^2}{2} - \frac{F_{zi}x^3}{6} + \frac{1}{12} \Phi_z L^2 F_{zi} x + C_1 x + C_2$$

Las condiciones de frontera para este caso son:

$$\delta_z|_{x=0} = \delta_z|_{x=L} = 0, \quad \theta_y|_{x=0} = 0 \text{ y } \theta_y|_{x=L} = \theta_{yi}$$

Sustituyendo los valores de las condiciones de frontera, se tiene que el valor de las constantes son:

$$C_1 = EI_y \theta_{yi} \text{ y } C_2 = 0$$

Por lo que al sustituirlas en las ecuaciones de giro y pendiente, se aplicando las restantes condiciones de frontera, se tiene que:

$$M_{yi}L - \frac{F_{zi}L^2}{2} + EI_y \theta_{yi} = 0$$

$$\frac{M_{yi}L^2}{2} - \frac{F_{zi}L^3}{6} - \frac{1}{12} \Phi_z L^3 F_{zi} + EI_y \theta_{yi} L = 0$$

Este sistema de dos ecuaciones se resuelve considerando el giro actuante como unitario, al cual su solución es:

$$F_{zi} = - \frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z) L^2}$$

$$M_{yi} = \frac{(4 + \Phi_z) EI_y}{(1 + \Phi_z) L}$$

(2.65)

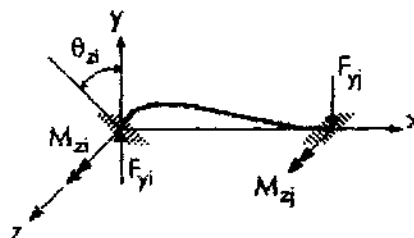
Para el nodo j, se encuentran sus valores por equilibrio, los cuales son:

$$F_{zj} = \frac{6EI_y}{(1 + \Phi_z) L^2}$$

$$M_{yj} = \frac{(2 + \Phi_z) EI_y}{(1 + \Phi_z) L}$$

(2.66)

6.- Sexta configuración. Giro alrededor de Z.



Para la figura mostrada se parte que las fuerzas equilibrantes son:

$$V_y^e = F_{yi} \quad y \quad M_z^e = F_{yi}x - M_{zi}$$

Y sustituyéndolas en las ecuaciones de equilibrio se tiene que:

$$EI_z \frac{d^2 v_b}{dx^2} = M_z^e = F_{yi}x - M_{zi} \quad y \quad EI_z \frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{12} \Phi_y L^2 V_y^e = \frac{1}{12} \Phi_y L^2 F_{yi}$$

De estas ecuaciones es necesario integrar la primera para que ambas ecuaciones sean giros. Dado que la deformación total es la deformación por flexión más la de cortante, entonces al sumar se tienen las ecuación para giro total:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{F_{yi}x^2}{2} - M_{zi}x + \frac{1}{12} \Phi_y L^2 F_{yi} + C_1$$

Al integrarla se obtiene para el desplazamiento total:

$$EI_z v = \frac{F_{yi}x^3}{6} - \frac{M_{zi}x^2}{2} + \frac{1}{12} \Phi_y L^2 F_{yi}x + C_1x + C_2$$

Las condiciones de frontera para este caso son:

$$v|_{x=0} = v|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad y \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_{zi}$$

Sustituyendo los valores de las condiciones de frontera, se tiene que el valor de las constantes son:

$$C_1 = EI_y \theta_{yi} \quad y \quad C_2 = 0$$

Por lo que al sustituirlas en las ecuaciones de giro y pendiente, se aplicando las restantes condiciones de frontera, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{F_{yi}L^2}{2} - M_{zi}L + EI_z \theta_{zi} &= 0 \\ \frac{F_{yi}L^3}{6} - \frac{M_{zi}L^2}{2} + \frac{1}{12} \Phi_y L^3 F_{yi} + EI_z \theta_{zi}L &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de dos ecuaciones se resuelve considerando el giro actuante como unitario, cuya solución es:

$$\boxed{F_{yi} = -\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}} \quad \boxed{M_{zi} = \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}} \quad (2.67)$$

Para el nodo j, se encuentran sus valores por equilibrio, los cuales son:

$$\boxed{F_{yj} = \frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}} \quad \boxed{M_{zj} = \frac{(2+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}} \quad (2.68)$$

En este punto se han deducido completamente para los seis posibles desplazamientos del nodo i. Para resolver los posibles desplazamientos para el nodo j, se pueden deducir de la misma manera, ya que los valores iniciales y condiciones son similares, los cuales arrojan los mismos resultados en cuanto a expresión matemática, pero en diferente posición y signo.

Su deducción completa no se presenta ya que con los resultados para el nodo i se pueden utilizar para deducir por simple inspección los resultados para el nodo j.

Bajo esta consideración los resultados obtenidos para los desplazamientos en las tres direcciones del nodo j, son idénticos que los obtenidos para el nodo i, pero con signo inverso y en las mismas posiciones. Los resultados para el giro en x solo cambian de signo.

Para los dos giros restantes, los resultados son idénticos a los del nodo i, con la salvedad que los momentos resultantes intercambian su posición en su caso respectivo.

La forma del sistema de ecuaciones para rigideces es de la forma:

$$K\Delta = P$$

Donde

K= Es la matriz de rigidez.

P= El vector de fuerzas actuantes y equilibrantes.

Δ = El vector de desplazamientos, este vector es la incógnita.

Por el momento se analizará la matriz de rigidez K, los vectores se discutirán posteriormente. De este modo, los elementos mecánicos obtenidos en las configuraciones cinemáticas corresponden a las rigideces de la barra, ya que se consideró una deformación unitaria. Dichas rigideces se agrupan en forma matricial, dependiendo de la posición de la deformación que los originó. Así pues, tenemos que este arreglo corresponde a la matriz de rigidez de la barra.

Dado que las barras pueden ocupar diversas orientaciones en el espacio, el sistema de referencia utilizado para deducir las rigideces, corresponde a los ejes de la barra, por lo que esta matriz de rigidez se denominará como matriz de rigidez de la barra en referencia local. Dicha matriz representada como K_L queda definida como sigue:

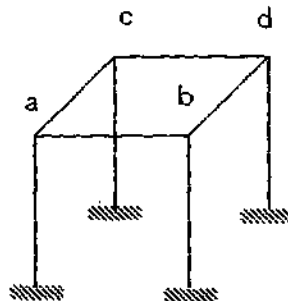
$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0
0	$\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3}$	0	0	$\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$
0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0
0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$	0	$\frac{(4+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$	0	$\frac{(2+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L}$
0	$\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	0	0	$\frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	0	$\frac{(2+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0
0	$-\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{(1+\Phi_y)L^3}$	0	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$
0	0	$-\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\Phi_z)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\Phi_z)L^2}$
0	0	0	$-\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0
0	0	$6EI_y$	0	$\frac{(2+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L}$	0	0	0	$6EI_y$	0	$\frac{(4+\Phi_z)EI_y}{(1+\Phi_z)L}$
0	$\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	0	0	$\frac{(2+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\Phi_y)L^2}$	0	0	$\frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L}$

Como podrá observarse en la matriz de rigidez, se observa que esta matriz es simétrica, es decir, $K_{ji} = K_{ij}$, además para definir sus valores se requiere básicamente los datos la sección transversal de la barra, tanto de su geometría como de sus propiedades y la longitud de la barra.

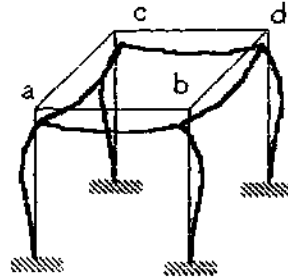
Para deducir los coeficientes de rigidez a partir de las configuraciones cinemáticas, se partió de la base de que ambos nodos están empotrados, es decir, que restringen cualquier deformación de los nodos de la barra en cualquier sentido a excepción de la deformación a analizar. Este precepto también es aplicable a toda la estructura, para este caso, se restringe toda la estructura de cualquier movimiento, y en vez de liberar una deformación, se liberan todas las del nodo. Este precepto es válido, pues se basa en que:

- Se tiene como conocida la matriz de rigidez de la barra, que contemplan las posibles deformaciones totales de cada nodo.
- Es aplicable el principio de superposición, es decir, los efectos de las deformaciones de toda la estructura, son iguales a la suma de los efectos provocados por las deformaciones de cada uno de los nodos.

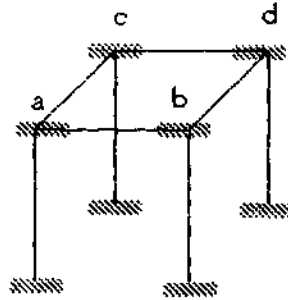
Para ejemplificar se tiene que analizar un marco tridimensional muy simple:



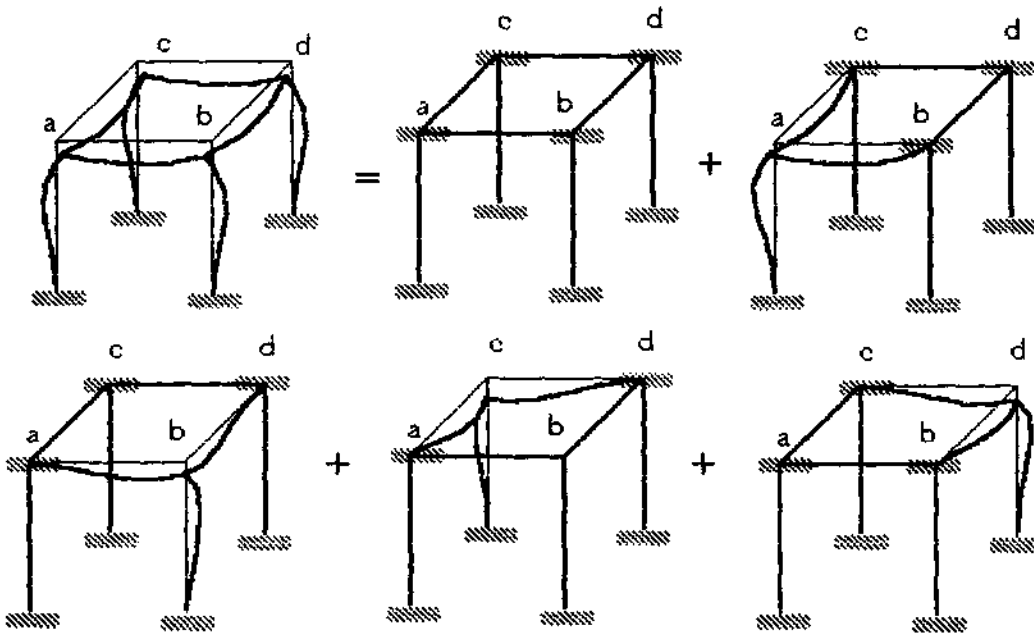
Este marco bajo la acción de cargas sufre deformaciones en los nodos a,b,c y d con una elástica cualquiera:



De manera similar como se hizo para calcular las configuraciones cinemáticas de la barra, se restringen todos los posibles desplazamientos de la estructura, esto es restringiendo todos sus nodos libres:

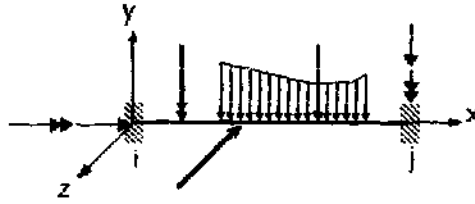


Entonces ahora se libera a cada uno de los nodos, desde el nodo a hasta el nodo d, para definir sus efectos que hasta este momento son independientes entre sí. De manera esquemática se muestra a cada uno de los nodos liberados, aplicando el principio de superposición, donde la suma de los efectos de los nodos a hasta d, son iguales a los de la estructura global.



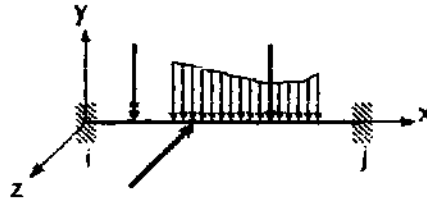
Definida la matriz de rigidez de la barra y el criterio a seguir para sumar los efectos de todas las barras con la estructura, ahora hay que establecer el equilibrio general de una barra en base a los elementos mecánicos. Para cualquier barra que forma parte de la estructura y continuando con el precepto de que la barra está empotrada en sus nodos, la

barra puede estar sometida dos tipos de acciones, que se diferencian por el punto de aplicación de estas. En la siguiente figura se muestra una barra sometida a diferentes posibles cargas:

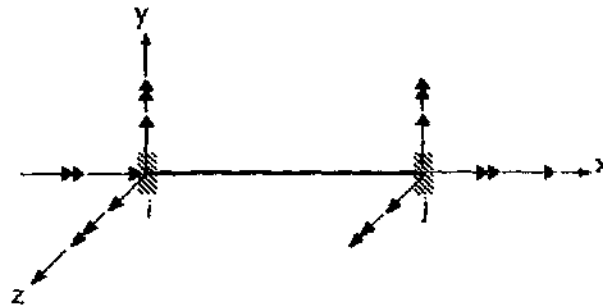


1.- Cargas en la barra.

Son las cargas cuya zona de aplicación está contenida en el cuerpo de la barra. De la figura anterior, las cargas que se consideran como cargas en la barra son las siguientes:



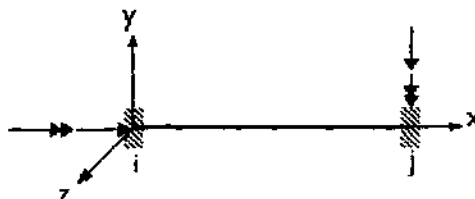
Dichas cargas, independientemente del número que fueren, la posición y dirección de aplicación, generan reacciones en los apoyos como se muestra:



Estas reacciones se denominarán como "*fuerzas de fijación*". Dichas reacciones representan el efecto de todas las cargas actuantes en la barra sobre los nodos. Por lo tanto, dichas reacciones estarán contenidas en un vector llamado "*vector de fuerzas de fijación*".

2.- Cargas en los nodos.

Son cargas concentradas cuyo punto de aplicación está directamente sobre alguno de los nodos. De la figura que ejemplifica las posibles cargas, las cargas en los nodos son:



Dado que las cargas aplicadas en los nodos no pueden generar reacciones y su efecto no se considera de forma interna. Se podrá observar que las cargas en los nodos solo pueden ser concentradas, dado que el área de aplicación posible en un nodo es solo un punto y siguen siempre alguna dirección de los ejes de la barra. Los valores de dichas cargas en los nodos se toman en cuenta en un vector llamado "vector de fuerzas externas".

Con lo anteriormente mencionado, es entonces posible definir el equilibrio general de la barra, el cual en forma matricial queda como:

$$F^o + KU = F^e \quad (2.69)$$

En donde:

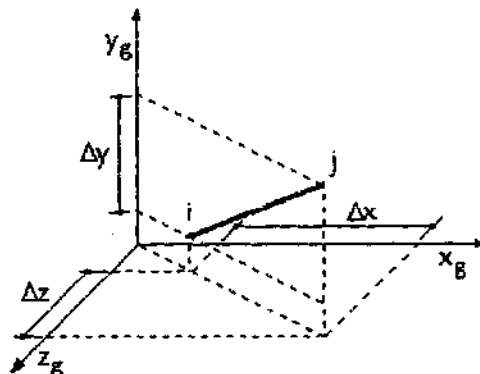
- F^o = Vector de fuerzas de fijación que contiene los valores de las reacciones provocadas por las cargas en el cuerpo de la barra.
- K = Matriz de Rigidez de la barra.
- U = Vector de desplazamientos de la barra.
- F^e = Vector de fuerzas externas. Este vector contiene las fuerzas generalizadas asociados a los desplazamientos desconocidos en los puntos nodales, en otras palabras, contiene el valor de las cargas actuando en los nodos.

Para analizar la estructura global, la formulación matemática del sistema a resolver es la misma que para el caso de una barra cuyos valores e incógnitas son los mismos para los de una barra. Como ya se ha mencionado, cada vector o matriz para la estructura contendrá la suma de los vectores y matrices de cada barra. Para plantear formalmente el sistema de ecuaciones para la estructura, solo falta hacer la transformación de coordenadas para los valores que definen cada barra de la estructura.

2.5 Transformación de coordenadas.

Dado que la orientación y posición de cada barra en una estructura es diferente y como en todo el planteamiento matemático se plantea el principio de superposición, es necesario que cada variable se refiera a un solo sistema de coordenadas para hacer válido dicho principio. De este modo, el sistema de referencia utilizado se denominará "sistema de referencia global" que contendrá las proyecciones o componentes de cada valor correspondiente a cada barra.

En la figura se muestra una barra tridimensional orientada en dirección cualquiera:



De la figura mostrada, a partir de las coordenadas de los nodos se calculan las distancias:

$$\Delta x = x_j - x_i \quad \Delta y = y_j - y_i \quad \Delta z = z_j - z_i \quad (2.70)$$

Los cuales sirven para definir la longitud de la barra como:

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.71)$$

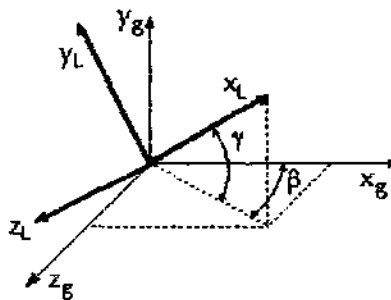
Así pues, es posible definir los cosenos directores de la barra como:

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L} \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{L} \quad C_z = \frac{z_j - z_i}{L} \quad (2.72)$$

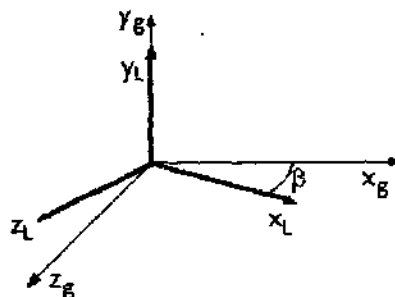
Para definir la transformación de un punto en el espacio de un sistema de referencia local de la barra a otro sistema global de la estructura, se puede realizar de forma matricial dado que cada valor se multiplica por una constante que dependen del ángulo de rotación, la cual es de la forma :

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Donde los vectores contienen las coordenadas en referencia local y global, y R es una matriz de constantes denominada, matriz de rotación. Para la transformación tridimensional completa de cualquier punto se necesitan 3 giros, pero para transformar el eje X de la barra solo se necesitan dos giros, los cuales se muestran en la figura.



El primer giro consiste en rotar el plano XZ sobre el eje Y a un ángulo medido desde el eje X , tal que los cosenos de dicho ángulo sean iguales a los cosenos directores de la barra en el plano XZ , como se muestra:



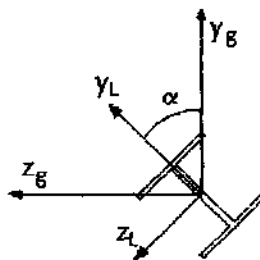
La transformación de este giro afecta a las coordenadas XZ del punto y la coordenada Y, no se modifica, por lo que la matriz de rotación puede expresarse como:

$$R_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

El segundo giro corresponde a rotación del plano XY sobre el eje Z. La transformación afecta a las coordenadas XY del punto, y la coordenada Z no se modifica. Por lo que la matriz de rotación es de forma similar a la anterior:

$$R_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\gamma & 0 \\ -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas dos rotaciones son suficientes para definir la transformación de un eje tridimensional. Sin embargo es necesario aplicar un tercer giro que corresponde a la rotación de la barra sobre su propio eje para tener la transformación completa, en la figura se muestra como se aplica dicho giro.



La matriz de rotación para dicha rotación queda como:

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

La transformación total del punto de referencia local a global queda expresado como el producto de estas tres matrices, por lo que su expresión queda como:

$$R = R_{\alpha} R_{\gamma} R_{\beta} \quad (2.74)$$

Debe tenerse cuidado que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que debe seguirse forzosamente ese orden, dado que así se dedujeron las matrices.

Dado que ya se tenían definidos los cosenos directores de la barra, entonces se puede expresar que:

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (2.75)$$

Del mismo modo:

$$\cos \gamma = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \quad \text{y} \quad \sin \gamma = C_y$$

Al sustituir ambos resultados en la matriz de rotación R , y dejando la rotación del eje como dato se obtiene la matriz de rotación general, la cual es :

$$R = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{C_x C_y \cos \alpha + C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos \alpha & \frac{C_x \sin \alpha - C_y C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin \alpha + C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin \alpha & \frac{C_x \cos \alpha - C_y C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Dicha matriz contiene todos los casos generales de rotación y para todas las posiciones de la barra, a excepción de una barra completamente vertical, dado que se tendría una división por cero. Para ese caso se redefinen los ángulos que originaron la matriz de rotación, que al multiplicarse todos origina que la matriz de rotación para un miembro vertical deberá ser:

$$R_{\text{vert}} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Estas matrices transforman los componentes (x,y,z) de un vector o matriz. Para el caso de la matriz de rigideces, se tiene que el orden de la matriz es de 12, por lo que hay 4 puntos de coordenadas (x,y,z) . Entonces es necesario definir una matriz de orden 12 para hacer el producto compatible, dicha matriz de rotación para transformar una matriz es:

$$R_g = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Que sirve para transformar la matriz de su referencia de local a global, al tratarse de matrices, dicho producto es:

$$K_g = R_g^T K_L R_g \quad (2.79)$$

Donde:

R_g = Matriz de rotación

K_L = Matriz de rigidez en referencia local

R_g^T = Transpuesta de la matriz de rotación.

Se hace nuevamente hincapié que el producto de las matrices no es conmutativo, por lo que debe seguirse el orden de producto establecido. La multiplicación se hace de derecha a izquierda. Es decir, primero se realiza el producto $K_L R_g$ y la matriz que arroje como resultado se multiplica por R_g^T y de esta forma se tiene como resultado la matriz de rigideces en referencia global.

La matriz de rigidez en referencia global en su forma expandida es complicada, por lo que es difícil manejar literalmente todas las variables. El hecho de que operaciones tan extensas puedan expresarse como unos simples productos de matrices es una de las principales ventajas de los métodos matriciales, que aunque es menos directa la sustitución de valores y se utilizan más matrices, es más confiable el manejo y menos propenso a cometer errores.

Para el caso de los vectores, cualquier vector de orden 12 puede transformarse de referencia local a global según la expresión:

$$F_g = R_g^T F_L \quad (2.80)$$

Para el caso inverso, cuando sea necesario transformar de referencia global a local, se utiliza la matriz de transformación transpuesta:

$$F_L = R_g F_g \quad (2.81)$$

2.6 Procedimiento General para análisis por el método de rigidez.

En este punto se tienen definidos todos los planteamientos matemáticos para la solución de una estructura por el método de rigideces. Esta sección se concentrará en la parte logística, es decir, se definen la forma y el modo de utilizar dichos planteamientos en el lugar y posición adecuados.

La secuencia del método es unidireccional, dado que el método de rigideces es un método "exacto". Con esto se quiere decir, que pese a las múltiples simplificaciones, el método de rigidez proporciona como resultado una solución única a un problema único.

El método de rigideces sigue en general una secuencia como la que a continuación se muestra:

- 1.- Definir datos de la estructura.
- 2.- Definir tamaño del sistema a resolver.
- 3.- Construir la matriz de rigidez y el vector de fuerzas de fijación de cada barra.
- 4.- Ubicar la matriz y vector de constantes globales de cada barra en la matriz general.
- 5.- Resolver el sistema de ecuaciones.
- 6.- Reubicar los desplazamientos resueltos del sistema general a cada barra.
- 7.- Calcular los vectores de fuerzas externas.

Puede ser que la secuencia propuesta no sea en algunos casos la más conveniente, pero dado que el método de rigideces se realizó en forma matricial pensando en programarlo, dicha secuencia debe seguirse para dar un seguimiento lógico y detallado a la solución del problema. En los siguientes puntos se detallan los puntos anteriores para aplicarlos de manera directa a la solución de un problema.

1.- Definir datos de la estructura.

Se requieren tener datos definidos de la geometría, materiales y solicitaciones. Estos conceptos en forma específica se refieren a los nodos, apoyos, barras, secciones y cargas.

a) Nodos: Para cada nodo tener como dato los valores de las coordenadas X,Y,Z.

$$\text{Nodo}_i = (x, y, z)$$

b) Apoyos: Se definen las restricciones de deformación de la estructura en algunos nodos.

$$\text{Apoyo}_i = [\bar{R}_d(x, y, z), \bar{R}_g(x, y, z)]$$

Se muestra que cada apoyo debe contener dos vectores de restricciones, uno para desplazamientos y otro para giros, ambos en las tres direcciones. Estos vectores no contienen valores en sí, más bien en forma indicativa determinan qué nodo está restringido, si se restringe su desplazamiento o giro y en qué dirección, o en dado caso, todas las restricciones.

c) Secciones: Cada sección deberá contener datos de geometría y materiales suficientes para llenar los datos correspondientes en la matriz de rigidez. Un conjunto de secciones se denominará como catálogo de secciones.

$$\text{Seccion}_i = (E, G, A, I_y, I_z, J, f_y, f_z)$$

De este modo para cada sección se deberá contar con los datos los que se mencionan como propiedades geométricas, dígame área, inercias, constante torsional y factores de forma. Dichos valores para las secciones más comunes se presentan en el apéndice A del presente trabajo. Además, se deben definir para cada sección los módulos de elasticidad y cortante que son propios de un material para cada sección.

d) Barras: Cada barra estará definida por su nodo inicial, nodo final y una sección transversal del catálogo.

$$\text{Barra}_i = (i, j, \text{seccion})$$

Las barras requieren solo estos parámetros que no sirven para calcular en sí, pero son indicativos de que se deben tomar datos de otros registros. De esta manera, con los nodos definidos de la barra, se pueden calcular los cosenos directores y su longitud, y a partir de la sección que tiene la barra, se calculan los parámetro para las deformaciones por cortante.

e) Cargas: Se define para cada carga su tipo, valor de carga, punto de aplicación y otros datos necesarios para determinar las reacciones correspondientes como viga doblemente empotrada. Independientemente del tipo de carga, las reacciones en los empotramientos se deben manejar en forma vectorial, así pues, para efectos de análisis, el efecto de una o varias cargas se resumen en un solo vector que se aplicará a la barra o nodo correspondiente. El valor de las reacciones para distintos tipos de cargas se pueden consultar en el apéndice B del presente trabajo.

$$\text{Carga}_i = (\bar{F}^o, \text{barra o nodo})$$

2.- Definir tamaño del sistema a resolver.

Una vez que se han determinado y verificado los datos, esta etapa consiste en definir cuales deformaciones son incógnitas a partir de los datos de los nodos y de los apoyos. El número de incógnitas será la suma del número de grados de libertad de todos los nodos que no estén restringidos.

Aunque no es la única manera, una forma de llevar el control sobre el número de incógnitas es agrupando los seis posibles grados de libertad de cada nodo en un arreglo:

	1	2	3	4	...	n		1	2	3	4	...	n
R_{dx}	x	x	o	o	...	o	R_{dx}	-	-	4	10	...	$N-5$
R_{dy}	x	x	o	o	...	o	R_{dy}	-	-	5	11	...	$N-4$
R_{dz}	x	x	o	o	...	o	R_{dz}	-	-	6	12	...	$N-3$
R_{gx}	o	x	o	o	...	o	R_{gx}	1	-	7	13	...	$N-2$
R_{gy}	o	x	o	o	...	o	R_{gy}	2	-	8	14	...	$N-1$
R_{gz}	o	x	o	o	...	o	R_{gz}	3	-	9	15	...	N

a)

b)

(2.82)

En el arreglo de la izquierda las restricciones se marcan con una x y los grados de libertad con una o . Siendo n el número de nodos, se recorre de arriba a abajo y de izquierda a derecha sumando los grados de libertad ignorando la suma cuando la posición corresponde a una restricción. De este modo el número que se indica dentro del arreglo, corresponde al renglón y columna del grado de libertad en cuestión en el sistema de ecuaciones, hasta llegar al total de grados de libertad N . Así por ejemplo, la libertad para desplazarse en Y del nudo 4, en el arreglo le corresponde el número 11, lo que significa que deberá usarse el renglón ó la columna 11 de la matriz de rigidez y del vector de constantes para dicho desplazamiento en el sistema de ecuaciones por resolver. El orden del sistema de ecuaciones general de la estructura corresponderá al número de grados de libertad totales, es decir, será de orden N .

3.- Construir la matriz de rigidez y el vector de fuerzas de fijación de cada barra.

Para cada barra se deben tener listos los datos de sus cosenos directores y su longitud a partir de los nodos, además de tener definidos los valores de la sección que le corresponde a dicha barra y los vectores de fijación de todas las cargas que pudiesen actuar sobre la barra.

Los datos correspondientes a la propia barra y la sección se agrupan en la matriz de rigidez, en el vector de fuerzas de fijación los datos de las cargas sobre el cuerpo de la barra y en el de fuerzas externas los datos de las cargas en los nodos de la barra, según

corresponda, todos ellos en referencia local, de modo que en la ecuación de equilibrio de la barra:

$$\mathbf{F}_L^0 + \mathbf{K}_L \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L^e \quad (2.83)$$

Se tengan valores conocidos en todos los vectores y en la matriz, a excepción del vector \mathbf{u} , que es la incógnita. El vector de fuerzas de fijación se resta al vector de fuerzas externas para tener un solo vector de constantes de modo que el sistema tenga la forma:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L^e - \mathbf{F}_L^0 \quad \text{y si} \quad \mathbf{F}_L = \mathbf{F}_L^e - \mathbf{F}_L^0,$$

Entonces: $\mathbf{K}_L \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L$ (2.84)

Posteriormente es necesario transformar la matriz y el vector de referencia local a global, para lo cual es necesario definir la matriz de rotación de la barra en base a los cosenos directores. Siendo conocida la matriz de rotación, la transformación de la matriz y el vector a referencia global será:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}_g^T \mathbf{K}_L \mathbf{R}_g \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{R}_g^T \mathbf{F}_L \quad (2.85)$$

En donde para la i -ésima barra se tiene:

- \mathbf{K}_L = Matriz de rigidez en referencia local .
- \mathbf{K}_g = Matriz de rigidez en referencia global.
- \mathbf{R}_g = Matriz de rotación de la barra.
- \mathbf{R}_g^T = Matriz de rotación transpuesta de la barra.
- \mathbf{F}_L^e = Vector de fuerzas externas en referencia local.
- \mathbf{F}_L^0 = Vector de fuerzas de fijación en referencia local
- \mathbf{F}_L = Vector de constantes en referencia local.
- \mathbf{F}_g = Vector de constantes en referencia global.

4.- Ubicar la matriz y vector de constantes globales de cada barra en la matriz general.

La aportación de cada barra dependerá de las restricciones que existan en sus nodos. Para realizar dicha colocación, se tiene que verificar el arreglo de incógnitas y para cada grado de libertad se coloca en la matriz y vector general de la estructura.

5.- Resolver el sistema de ecuaciones.

Teniendo la matriz y vector del sistema de ecuaciones definidos, se procede a su solución. Los métodos numéricos de solución de ecuaciones son amplios y variados, pero para el caso del método de rigidez el método de descomposición de Cholesky parece ser el más apropiado en este caso, ya que:

- La matriz de rigidez general es simétrica.
- Los valores de la diagonal de la matriz son proporcionalmente grandes en comparación al del resto de la matriz.

- La relación entre tamaño de las matrices usadas y el número de operaciones por realizar, parece razonable en este caso.

6.- Reubicar los desplazamientos resueltos del sistema general a cada barra.

Los resultados del sistema de ecuaciones son los desplazamientos de todos los grados de libertad de la estructura mostrados en referencia global. Estos desplazamientos, volviendo a usar el arreglo de incógnitas, se reubican en su posición original, que en vez de ser incógnitas, se convierten en valores conocidos.

7.- Calcular los vectores de fuerzas equilibrantes.

Una vez definidos los valores de los desplazamientos en su posición correspondiente, en la ecuación de equilibrio de la barra ahora es el vector de fuerzas equilibrantes el que se considera como incógnita, tanto en referencia local y global. Dichos vectores de fuerzas equilibrantes contendrán los valores de los elementos mecánicos correspondientes a cada nodo. Como es natural esperarse, los desplazamientos en las posiciones donde existan restricciones, dado que no fueron tomados en cuenta en el sistema de ecuaciones, su valor es cero. Para obtener los vectores de fuerzas equilibrantes se deben realizar las operaciones:

$$\mathbf{F}_L^o + \mathbf{K}_L \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L^o \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_g^o + \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g = \mathbf{F}_g^o \quad (2.86)$$

Como podrá notarse, en este punto se deben conservar o reconstruir la matriz de rigidez y el vector de fuerzas de fijación. Dado que los desplazamientos obtenidos son en referencia global, es necesario realizar la transformación a referencia local, también para el vector de fijación, de esta forma se tiene que:

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{R}_g \mathbf{U}_L \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_g^o = \mathbf{R}_g \mathbf{F}_L^o \quad (2.87)$$

Los vectores de fuerzas equilibrantes son el resultado final de este largo procedimiento, con esto se tiene definidos los valores de los desplazamientos y elementos mecánicos en todos los nodos de la estructura completamente.

El vector de fuerzas externas en referencia local contiene los elementos mecánicos de la barra que se requieren, dado que dichos elementos se denominaron en la orientación original de la barra. El vector de fuerzas externas en referencia global sirve para conocer el valor de las reacciones en los nodos inicialmente restringidos.

2.7 Conclusiones.

A lo largo de este capítulo se hizo un bosquejo general de la teoría de la elasticidad lineal para enmarcar claramente los conceptos que cubre el método de rigideces y sus limitantes. Con los conceptos vistos en el presente capítulo se discutieron las múltiples simplificaciones que se tuvieron que realizar para definir una estructura tridimensional general.

El método de rigidez es un método muy amplio que ofrece diversas ventajas y desventajas, las cuales se mencionan a continuación:

1.- Ventajas.

1.- El método es un procedimiento que pese a sus limitaciones se considera como exacto. Esta exactitud más bien se refiere a que no es un método de aproximaciones o iteraciones sucesivas, sino que es un método directo, que para un problema específico se tiene una solución única.

2.- El método de rigidez en tres dimensiones es el más modelo más general de todas las estructuras reticulares. El método contempla los efectos de fuerza axial, cortante, flexión y torsión en las barras. Se puede decir que las otras estructuras reticulares son sólo casos específicos de un marco tridimensional.

3.- El plantear el método como un método matricial obliga a los elementos mecánicos, desplazamientos y parámetros a ocupar una posición fija en una matriz o vector, con esto se eliminan las confusiones de manejar e interpretar tantos datos de diferentes características, con solo referirse al valor definido en la posición de un vector o matriz. Además es más fácil programar y realizar algunas operaciones con matrices que muchas operaciones con datos sueltos. Así pues, si existen datos o parámetros no utilizados, sus valores valen cero, que aunque ocupen un espacio en las matrices, claramente se identifican que parámetros no se han tomado en cuenta.

4.- El método de rigidez es muy versátil, dado que los conceptos impuestos en la deducción de este, se le puede incorporar con algunos cambios en las matrices, otros tópicos que aunque no son objeto de análisis del presente trabajo son de gran utilidad en la práctica. Entre otros al método de rigidez planteado puede incorporarse :

- Barras de sección variable.
- Desplazamientos de los apoyos.
- Articulaciones en las barras.
- Apoyos elásticos.
- Conexión elásticas en las nodos de las barras.
- Deformaciones previas.
- Discontinuidades en las barras.
- Degradación de la rigidez por ciclos de carga.
- Interacción entre fuerza axial y flexión.

Estos tópicos mencionados se toma en cuenta su valor alterando directamente los valores de rigidez de la barra, y la ventaja consiste en que el procedimiento en general no se modifica. Las condiciones para resolver cada uno de los tópicos adicionales requiere un trato y atención especial, aspectos que deberán ser objeto de otro estudio.

Desventajas.

1.- El método considera sólo el comportamiento lineal de los materiales, cosa que en los materiales usados comúnmente no sucede, salvo en un intervalo reducido. Los conceptos de fluencia y ductilidad de los materiales no son aplicables, es necesario replantear para estos casos un método matricial que sea no lineal.

2.- Solo es aplicable a estructuras que puedan ser idealizadas como reticulares, cualquier otra estructura que no pueda idealizarse como una barra, el riesgo de analizarse por este método es muy alto.

3.- No se pueden tomar en cuenta directamente las concentraciones de esfuerzo. En muchas ocasiones, al área de aplicación de una carga es muy reducida debido a la geometría propia de la estructura, lo que origina esfuerzos adicionales no tomados en

cuenta en el método, los cuales originan una falla local en el miembro. Si este es el caso, las concentraciones de esfuerzo se deben analizar por separado o por otro método.

4.- En el método de rigidez por su naturaleza matricial, la bondad de trabajar con matrices se ve deteriorada por el gran consumo de memoria que las matrices ocupan en las computadoras actuales. Haciendo algunos números se podrá demostrar que el número de ecuaciones en un edificio común, es extraordinariamente grande.

5.- La mayor parte del tiempo de procesamiento del método de rigidez se consume en resolver el sistema de ecuaciones. Dado que el número de incógnitas es muy grande, fácilmente el programa de rigideces agota los recursos de memoria de las computadoras, esto ha sido motivo de desarrollo de nuevos métodos de solución de ecuaciones para reducción iterativa de matrices que vuelven lento el procedimiento. Para el caso del presente trabajo se realizó un método de generación dinámica de matrices eliminando los valores que sean cero, pero a cambio como dato adicional se guarda el renglón y la columna del valor.

6.- Como en casi todos los métodos matriciales, la cantidad de datos y resultados es enorme, por lo que hay que prestar atención especial en evitar cometer errores al capturar los datos y revisar cuáles resultados son los que realmente interesan, pues muchos de ellos son intrascendentes. Cualquier omisión o error en los datos altera sustancialmente el resultado del comportamiento global de la estructura.

7.- Con la matriz de rigidez tan grande, es frecuente encontrar enormes dispersiones de datos entre grandes espacios con ceros. Para evitar este problema, es necesario ordenar los datos de entrada, especialmente la numeración de los nodos, para que de esta manera, los datos se concentren en lo posible en la diagonal principal.

Pese a las inconveniencias, el método de rigidez es de uso muy amplio, incluso se han hecho simplificaciones para idealizar los muros de un edificio como barras, que fácilmente pueden analizarse en el método de rigidez.

El método de rigidez expuesto con los conceptos tomados en cuenta y con las simplificaciones que implica, por el momento, se consideran como el método de análisis mínimo necesario para la modelación tridimensional de un edificio.

Capítulo III.

ANÁLISIS SÍSMICO.

3.1 Introducción.

Los conocimientos de ingeniería sísmica son aún inciertos y algunas veces muy simplificadorios en la práctica común, dado que su naturaleza es de carácter impredecible. En muchas regiones los sismos representan la causa del mayor número de fallas en las estructuras, es necesario tomar precauciones especiales, sobre todo en la estructuración de los elementos resistentes. Son numerosos los casos en el que las fuerzas proporcionadas por el análisis sísmico son las que rigen el diseño de la estructura.

Prácticamente ninguna zona se puede considerar como libre de riesgo sísmico, pese que no se tengan registro de ningún sismo, con fines de diseño se debe considerar un sismo mínimo actuante para dar rigidez lateral a la estructura. Se descarta la idea de que son sólo las cargas verticales las que determinan el diseño de la estructura, pues las cargas laterales, sean sísmicas o de viento, son parte fundamental del diseño.

Se explican y discuten en este capítulo los dos procedimientos de análisis sísmico estipuladas en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal: el estático y el dinámico. Su solución es parte del presente programa de análisis y diseño, además se desarrolla los efectos de torsión provocados por las fuerzas sísmicas. En el transcurso del capítulo se discuten los criterios necesarios como requisitos mínimos para lograr que el diseño de una estructura tenga comportamiento sísmico adecuado.

3.2 Conceptos fundamentales de ingeniería sísmica.

Los sismos son movimientos oscilatorios generalmente horizontales sobre la superficie de la Tierra, provocados por el movimiento de placas de la Tierra. La configuración de la Tierra consta de un núcleo sólido formado a base de metales, un manto interior, un manto exterior y la corteza. El problema radica en el manto exterior, pues se conoce que su consistencia es fluida y la corteza no es más que una gran costra del manto que se ha enfriado. La naturaleza discontinua de la corteza hace que esta sea un enorme rompecabezas de placas en movimiento constante.

El sismo se provoca cuando dos placas chocan o una interfiere el movimiento de la otra acumulándose gran energía. La zona más activa registrada es el Cinturón Circunpacífico, que consta de toda la costa del continente americano en el océano pacífico, las islas Aleutianas en Alaska, Japón, China, y la zona polinesia. La geología y la geofísica son disciplinas imprescindibles en este estudio, el geólogo conoce las densidades de los diferentes estratos, los de densidad menor o más calientes por efecto de la gravedad, forzan a desplazar hacia abajo a los de densidad mayor o más fríos. Los sismos se provocan exactamente en las fronteras de las placas. Richter clasificó las zonas sísmicas del mundo en tres grandes: La del Cinturón Circunpacífico, La del Cinturón Alpino (Medio Oriente y el Mediterráneo) y el Resto del Mundo.

La intensidad de un sismo es una medida de los efectos que este produce en un sitio dado, o sea, de las características del terreno y de la potencialidad destructiva. La escala para medir la intensidad de un sismo es la de Mercalli modificada, la cual es una apreciación subjetiva del comportamiento de las construcciones en sitio. Es poco confiable en cuanto a precisión y difícil de procesar numéricamente.

La magnitud de un sismo, es la medida del tamaño de un sismo, que es independiente del lugar donde se toma el registro. Su determinación es objetiva y cuantitativa, está relacionada aproximadamente con la cantidad de energía liberada durante el evento. Se determina a partir de las amplitudes de los registros de sismógrafos estándar. La escala utilizada es la escala de Richter. Un aumento en un punto en la escala Richter implica un aumento de 32 veces la energía liberada.

Desde el punto de vista de la ingeniería, la atención se concentrará en aplicar los conocimientos de los sismos y no estudiar como se originan, del mismo modo al ingeniero le concierne determinar los efectos que estos provocan a las estructuras.

Para registro de los sismos se usan acelerogramas, que es la representación gráfica de las aceleraciones del terreno durante la duración de un temblor, en un punto determinado. Se miden las aceleraciones porque es lo más fácil de medir en el momento en que ocurre un sismo, mediante oscilaciones muy sensibles de un péndulo simple. Es prácticamente imposible medir los desplazamientos porque durante el sismo no hay un punto de referencia fijo.

En el acelerograma se mide la historia de las aceleraciones en intervalos dados de tiempo, en sentido Norte-Sur, Este-Oeste y Vertical, siendo este último el menos intenso. La forma de los acelerogramas es sumamente irregular debido a la complejidad de su propagación, dado que en su trayecto chocan con diversas formaciones geológicas que originan reflexiones y refracciones de un cambio de estrato a otro, por las diversas propiedades mecánicas de los distintos suelos y se complican aún más por las dispersiones debidas a la que dependen.

Una vez que se tienen varios registros de acelerogramas se construye el espectro de un sismo, que es la gráfica de la frecuencia de las aceleraciones en el terreno. En un espectro sísmico se resumen tres tipos de espectros, correspondientes al desplazamiento, la

velocidad, y la aceleración. Los desplazamientos y la velocidad se calculan a partir de los registros de las envolventes de las aceleraciones obtenidos en los acelerogramas.

Todas las estructuras dependiendo de su rigidez tienen un periodo de vibración natural, una variable en un sismo es conocer el periodo natural del mismo en el terreno. Cuando se cuentan con suficientes datos sobre el terreno es posible construir su espectro de diseño que puede ser aplicado en otros sitios de características sísmicas y geológicas similares.

Una vez que es conocido el espectro en un sitio, el análisis sísmico consiste en determinar la respuesta de la estructura ante el efecto de un posible sismo basados en los datos del espectro. La respuesta para fines de diseñar la estructura se hace equivalente a fuerzas laterales equivalentes. Cabe mencionar que los espectros se construyen bajo simplificaciones muy notorias que en algunos espectros simples proporcionan datos fuera de la realidad.

3.3 Parámetros que definen las fuerzas sísmicas.

El carácter netamente accidental de la acción sísmica junto con el elevado costo que implica hacer que, ante un sismo de gran intensidad, la estructura se mantenga dentro de niveles de comportamiento que no implique daño de consideración. Con este criterio se trata de aprovechar el comportamiento de la estructura para deformaciones que sobrepasen el intervalo elástico; por ello las propiedades inelásticas de los materiales y elementos estructurales, y en particular la ductilidad, adquieren una importancia fundamental en el diseño sísmico.

El reglamento que se utilizará es Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, así como sus Normas Técnicas complementarias para Diseño por Sismo, en su edición de 1987, dicho reglamento será identificado por sus siglas RCDF-87.

En este punto es necesario tomar los conceptos que marcan las Normas para diseño por sismo, los cuales se especifican los más importantes que juegan un papel trascendente en el valor de las fuerzas sísmicas.

1.- Uso de la construcción

Para fines de diseño sísmico las estructuras se clasifican por su uso en dos grupos:

Grupo A.- Son aquellas construcciones cuya falla estructural :

- Provocaría pérdidas considerables de vidas humanas.
- Generaría pérdidas económicas o culturales excepcionalmente altas.
- Significarían riesgo a materias peligrosas como sustancias tóxicas o explosivas.
- Dañarían construcciones que en caso de emergencia sean esenciales como Hospitales, escuelas, estadios, templos, salones, hoteles, gasolineras, terminales de comunicación y transporte, estaciones eléctricas, museos, monumentos, archivos y registros, entre otros.

Grupo B.- Son las construcciones comunes cuya falla no originaría pérdidas tan graves como las del grupo A o que no sean prioritarias en caso de emergencia.

Estas construcciones se dividen en dos subgrupos:

Subgrupo B1.- En las zonas I y II se incluyen las construcciones de más de 30 m de altura o más de 6,000 m² de área total construida. En la zona III las

construcciones de más de 15 m de altura o más de 3,000 m² de área total construida.

Subgrupo B2.- Todas las demás del grupo B que no se consideran como del subgrupo 1.

Se incluyen a las construcciones destinadas a la vivienda, oficinas, comercios, hoteles, industrias, y otras que no se consideran del Grupo A. El Reglamento para el Municipio de Puebla la clasificación con fines prácticos es la misma.

2.- Tipo del suelo.

Para fines de diseño por sismo en el RCDF-87 se definen 3 grandes zonas por su tipo de suelo.

Zona I.- LOMAS.- Formada por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados en un ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o incrustados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. La profundidad del estrato firme se encuentra a menos de tres metros.

Zona II.- TRANSICIÓN.- Está constituida por depósitos que se encuentran a menos de 20 m de profundidad, dichos depósitos están constituidos predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre. Su espesor es muy variable. La profundidad del estrato firme se encuentra a más de tres metros pero menor a 20 metros.

Zona III.- LACUSTRE.- Esta zona está formada por fuertes depósitos de arcilla altamente compresible separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas son de consistencia firme a muy dura y de espesor muy variable. La alta compresibilidad de la arcilla origina grandes asentamientos y el comportamiento mecánico del suelo en esta zona es muy vulnerable. La profundidad del estrato firme se encuentra a más de 20 metros.

Cuando un predio se ubique a menos de 200 m de la zonificación geotécnica, se tomará en cuenta la zona más desfavorable. La intención de zonificar el suelo es de proporcionar valores de espectro de diseño apropiados a las características del suelo, además de que si en un predio no se cuenta con registros sísmicos, por un estudio de mecánica de suelos se puede utilizar un espectro para un tipo de zona sísmica de características similares. En el Reglamento de la Ciudad de Puebla se hace una clasificación similar definiendo los tipos I, II y III como terrenos firmes, medianamente blandos y blandos respectivamente.

3.- Condiciones de Regularidad del edificio.

Para que una estructura pueda considerarse como regular, las Normas Técnicas Complementarias, en la Sección de Diseño por Sismo, establece las siguientes condiciones de regularidad que a continuación se describen.

1.- Su planta es sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes.

2.- La relación de su altura a la dimensión menor de su base es menor a 2.5

3.- La relación de su largo a ancho de la base no excede 2.5

- 4.- En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20% de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente
- 5.- En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.
- 6.- No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20% de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de abertura no excede de ningún nivel de 20% del área de la planta.
- 7.- El peso de cada nivel, incluyendo carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70% de dicho peso.
- 8.- Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70% de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.
- 9.- Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas.
- 10.- La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100% a la del entrepiso inmediatamente inferior.
- 11.- En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente excede del 10% de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

En el diseño sísmico de las estructuras que no cumplan con las condiciones de regularidad que se han fijado, se multiplicará por 0.8 el valor de Q' .

Cabe aclarar que las condiciones de regularidad en forma general limitan que la estructura sea lo más rectangular y uniforme posible. El construir estructuras perfectamente rectangulares y regulares no es un concepto que arquitectónicamente sea del agrado de todos, porque su geometría no pasa de ser una simple caja. Inclusive se puede pensar que las estructuras más irregulares son más llamativas por la creatividad al formarlas. Sin embargo, hay que manejar la irregularidad con mucha cautela, la condición de que las estructuras deben ser lo más rectangular y uniforme posible se debe a que dichas estructuras son las más fáciles de modelar para su análisis sísmico y son el tipo de estructuras más estudiadas. El reducir el factor de ductilidad en un 20% no garantiza de ningún modo que el comportamiento de una estructura irregular sea el adecuado.

4.- Factor de comportamiento sísmico.

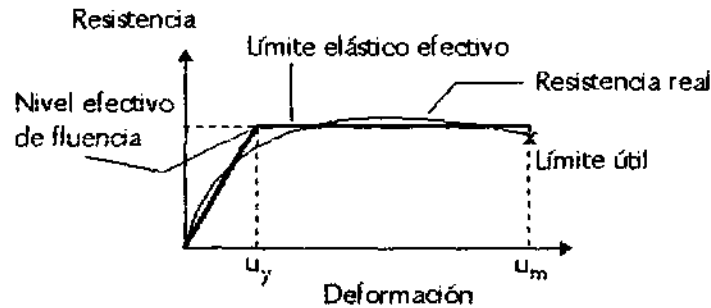
Este factor es una constante que se utiliza para reducir las fuerzas sísmicas en base a la ductilidad de la estructura. Una estructura muy rígida con las aceleraciones del terreno genera fuerzas muy grandes. En cambio una estructura dúctil origina fuerzas menores pero los desplazamientos pueden ser lo suficientemente excesivos para originar inestabilidad .

La forma de determinar la ductilidad de un miembro es a partir de su gráfica resistencia-deformación, en la cual el cociente de dividir la deformación útil del miembro

entre la deformación efectiva de fluencia, se le denomina como coeficiente de ductilidad, cuyo valor es:

$$\mu = \frac{U_m}{U_y} \quad (3.1)$$

Dichos valores se obtienen de suponer que el comportamiento real de la resistencia del miembro puede idealizarse como elastoplástico. De este modo se observa que la fluencia real del miembro se sustituye por una fluencia efectiva, para evitar discrepancias muy grandes con el comportamiento del miembro.



Puede deducirse que mientras más grande sea el coeficiente de ductilidad hay mayor capacidad del miembro de disipar energía, pero hay que tomar en cuenta que las deformaciones excesivas pueden ocasionar daños irreversibles a las estructuras aún cuando no se alcance su falla.

Para el factor de comportamiento sísmico Q , se adoptarán los siguientes valores a que se refieren la sección 4 de las NTC y el artículo 207 del RCDF-87, los cuales se enuncian:

Se utilizará $Q=4$ cuando:

- 1.- La resistencia en todos los entrepisos es suministrada exclusivamente por marcos no contraventeados de acero o concreto reforzado, o bien por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado en los que cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, cuando menos el 50% de la fuerza sísmica actuante.
- 2.- Si hay muros ligados a la estructura en forma especificada en el caso I del artículo 204 del Reglamento, éstos se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante fuerzas laterales sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, y los marcos, sean o no contraventeados y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80% de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería.
- 3.- El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 35% del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del Reglamento.

4.- Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen con los requisitos que fijan las normas complementarias para marcos y muros dúctiles.

5.- Los muros rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas complementarias correspondientes.

Se utilizará $Q=3$ cuando:

1.- Se adoptará $Q=3$ cuando se satisfacen las condiciones 2,4 y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejan de satisfacerse las condiciones 1 o 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas, por marcos rígidos de acero, por marcos de concreto reforzado, por muros de este material, por combinaciones de estos y marcos o por diafragmas de madera contrachapada. Las estructuras con losas planas deberán además satisfacer los requisitos que sobre particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

Se utilizará $Q=2$ cuando

La resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero o concreto reforzado, contraventeados o no, o muros o columnas de concreto reforzado, que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dadas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o diafragmas contruidos con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará $Q=2$ cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado, con las excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

Se utilizará $Q=1.5$ cuando

Se usará $Q=1.5$ cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y II, o por marcos y armaduras de madera.

Se utilizará $Q=1$ cuando

Se usará $Q=1$ en estructuras cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales diferentes de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre, a satisfacción del Departamento del Distrito Federal, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de Q que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección.

El Reglamento para el municipio de Puebla establece prácticamente los mismos criterios para la determinación del factor de comportamiento sísmico Q .

5.- Coeficiente sísmico.

El coeficiente sísmico c , definido en el artículo 206 del RCDF-87, es el cociente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse en la base de la construcción por efecto del sismo, entre el peso de ésta que actúa sobre dicho nivel, dada por la expresión.

$$c = \frac{V_o}{W_o} \quad (3.2)$$

Donde :

c = Coeficiente sísmico

V_o = Cortante actuante en la base de la construcción.

W_o = Peso total de la construcción.

Se aclara que el peso total de la estructura corresponde al de las cargas muertas y las cargas vivas, según los valores que dispone el propio Reglamento. En otras palabras el coeficiente sísmico significa que una fracción del peso total de la estructura origina un cortante de forma lateral a la estructura.

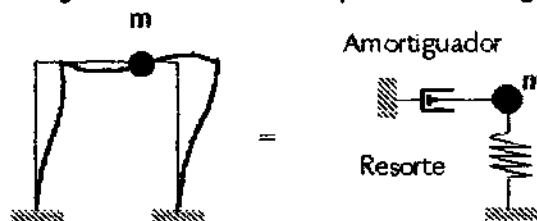
El coeficiente sísmico depende desde luego del comportamiento sísmico del lugar donde se ubicará la construcción. Un coeficiente sísmico se calcula a partir de numerosas experimentaciones y registros de acelerogramas, cuando no es posible realizar un estudio específico sobre un tipo de suelo, el RCDF-87 establece los valores de dicho coeficiente que deben tomarse como valores de diseño. El coeficiente sísmico es tan solo un dato de los muchos que definen a un espectro de diseño, este último se discute en la siguiente sección.

3.4 Espectro de diseño.

Un espectro es la representación de una función en el dominio de frecuencias, que se construyen a partir de las envolventes de varios acelerogramas superpuestos. Un espectro sísmico parte de las aceleraciones, pero se pueden calcular las velocidades y desplazamientos por medio de derivadas.

El espectro de diseño también se denomina como espectro de respuesta, el cual es la respuesta máxima esperada de un sistema elástico de un solo grado de libertad con amortiguamiento a fuerzas o movimientos dinámicos.

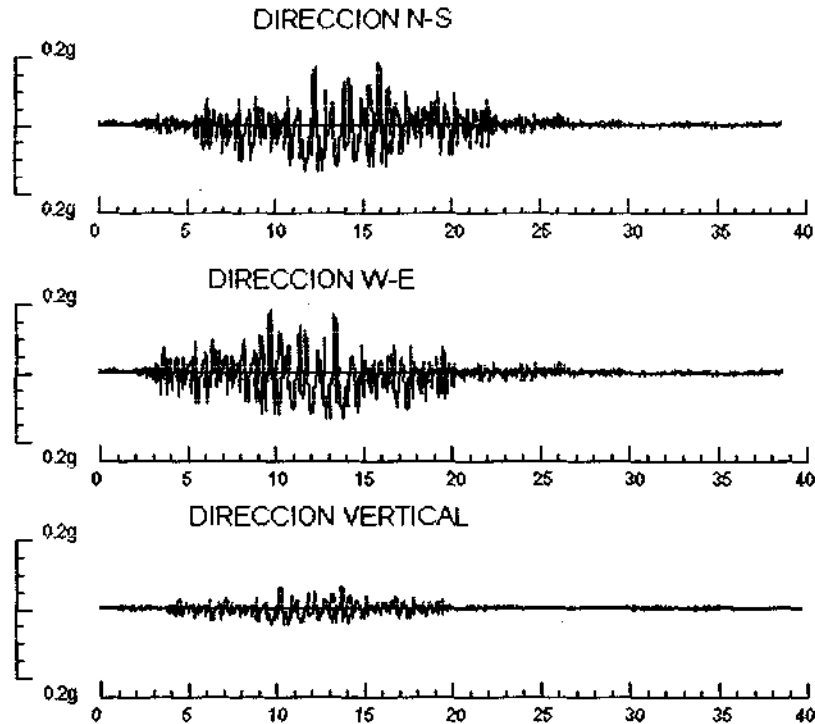
Un sistema de un solo grado de libertad es parecido al siguiente modelo:



En el cual se aprecia que solo se trata de calcular el desplazamiento horizontal provocado por un movimiento armónico simple de los apoyos. La idealización consiste en considerar la rigidez global del marco mediante un resorte, y además, que el movimiento esté restringido por un amortiguador. Este modelo sirve para simular las aceleraciones de sismos reales registrados y poder construir el espectro de diseño.

El primer paso para definir un espectro es contar con múltiples registros de aceleraciones en un sitio dado. En las siguientes figuras se muestran registros típicos de un

acelerógrafo que midieron las aceleraciones en la dirección Norte-Sur, Este-Oeste y vertical en un sitio dado.



Se podrá notar que las ondas sísmicas generan aceleraciones sensiblemente menores en la dirección vertical. Una vez obtenidos los datos de los acelerogramas, los principales factores que determinan los valores de un espectro de diseño para un sitio en particular son:

1.- Las características geológicas del lugar.

La rigidez del suelo determina en gran parte la forma como este oscila en un fenómeno muy complejo. Cabe mencionar que los parámetros que definen el comportamiento del suelo son muchos y distintos entre sí, por lo que es sumamente complicado definir su comportamiento. El suelo contribuye al amortiguamiento de las ondas sísmicas dependiendo del grado de compactación, su resistencia al esfuerzo cortante, grado de saturación, entre otros.

El suelo modifica la respuesta sísmica de la estructura principalmente por:

- a) La amplificación local, que consiste en la modificación de las ondas sísmicas al transmitirse de la roca subyacente a los estratos del suelo intermedio entre la roca en movimiento y la cimentación.
- b) La alteración del movimiento del terreno por la presencia misma de la estructura, debida a su peso propio.
- c) La interacción entre la vibración de la estructura y la del suelo que ocasiona que una fracción significativa de la energía cinética introducida por el sismo se vuelva a transmitir al suelo y se disipe por el amortiguamiento proporcionado por este.

2.- El amortiguamiento.

El amortiguamiento es básicamente la capacidad que tiene un cuerpo de restablecer su equilibrio a partir de su estado de movimiento o vibración. Todos los materiales tienen distintos grados de amortiguamiento, pues las fuerzas aplicadas en ellos no quedan oscilando para siempre. El amortiguamiento representa en sí la disipación de energía que la estructura realiza principalmente debido a la fricción interna de los materiales y al rozamiento entre los elementos constructivos.

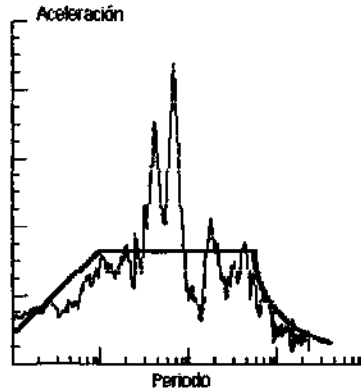
En una vibración libre, se define como *amortiguamiento crítico* aquel para el cual el sistema estructural después de ser desplazado, volvería a su posición de reposo de manera inmediata sin oscilar. Para fines de análisis es mejor expresar el amortiguamiento del sistema como una fracción del amortiguamiento crítico.

A continuación se muestra en la tabla, algunos porcentajes de amortiguamiento crítico en los sistemas estructurales más comunes:

Tabla 3.1 Porcentajes de amortiguamiento crítico para diversos materiales

<i>Nivel de esfuerzo de estructura</i>	<i>Tipo y condición</i>	<i>Porcentaje de amortiguamiento</i>
Menor a la mitad de la fluencia	a) Tuberías o equipo importante	1 a 2
	b) Acero soldado, concreto reforzado y presforzado con grietas ligeras	2 a 3
	c) Concreto reforzado agrietado considerablemente	3 a 5
	d) Acero remachado o atornillado. Estructuras de Madera	5 a 7
Justo o ligeramente abajo del nivel de fluencia	a) Tuberías o equipo importante	2 a 3
	b) Acero soldado, concreto presforzado sin pérdida completa del presfuerzo	5 a 7
	c) Concreto presforzado con pérdida del presfuerzo	7 a 10
	d) Concreto reforzado	7 a 10
	e) Acero remachado o atornillado. Estructuras de madera con juntas atornilladas	10 a 15
	f) Estructuras de madera con juntas clavadas	15 a 20

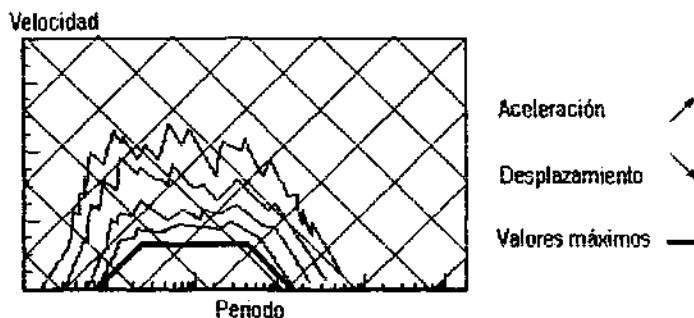
Una vez que se han definido o calculado los parámetros correspondientes al suelo que puedan presentarse en el espectro, se define o se calcula un valor de amortiguamiento crítico, con lo que se tienen los elementos necesarios para definir un espectro de respuesta de aceleraciones similar al que se muestra en la figura:



Se nota que en el espectro de aceleraciones existen unas aceleraciones pico o máximas en ciertos periodos del terreno. Este es un punto clave, ya que para dichos periodos se genera un efecto de resonancia, en el cual, el periodo de la estructura es similar al del espectro, con lo que al sumar un valle con otro de una onda sísmica, la amplitud de la onda se amplifica, generando mayores aceleraciones, y por lo tanto mayores fuerzas sísmicas. La línea gruesa en el espectro de respuesta anterior indica la forma de simplificar la forma tan compleja del espectro. Dicha aproximación es válida siempre y cuando los valores de amortiguamiento elegidos sean los correctos y el periodo natural de la estructura no sea el de resonancia.

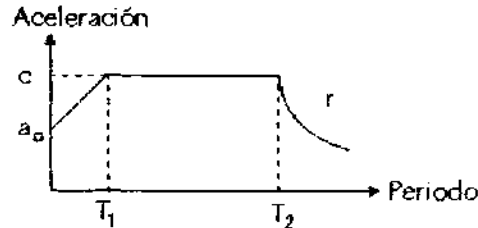
Cuando el amortiguamiento es nulo, el efecto de la resonancia es sumamente grave, y contrariamente, un valor de amortiguamiento muy grande disminuye el valor de las aceleraciones y los "brincos" en la gráfica de la respuesta se vuelven más suave. Volviendo a la tabla 3.1 la razón de comparar los porcentajes de amortiguamiento crítico, es que los espectros de diseño del RCDF-87 suponen un amortiguamiento del 5%, aspecto que no se especifica claramente. Cuando un sistema estructural posee un amortiguamiento inferior, como ya se mencionó, incrementa de manera notoria la respuesta.

De manera similar, se pueden construir espectros que incluyan la aceleración, velocidad, y desplazamientos del terreno, también con diversos valores de amortiguamiento, como el que se muestra en la figura:



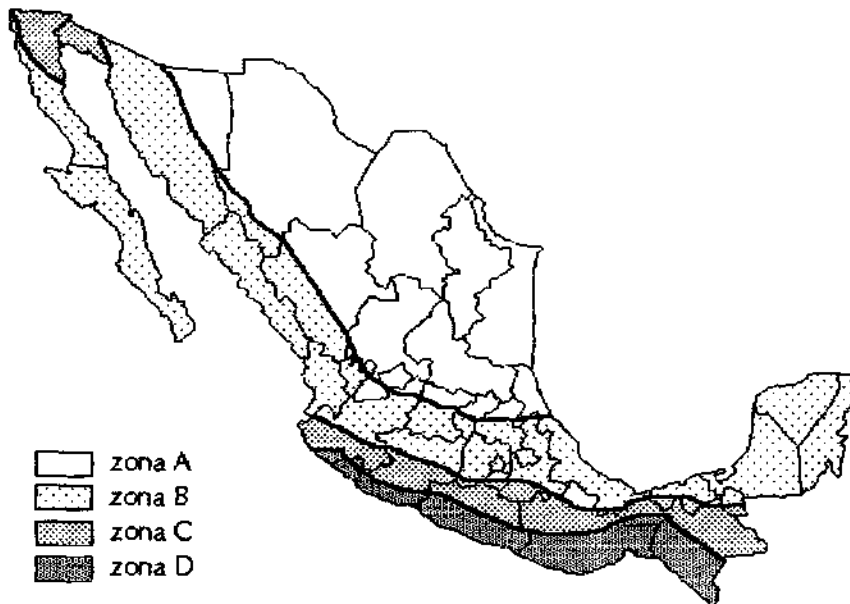
En la figura se muestra que mientras mayor es el amortiguamiento, las gráficas tienden a disminuir. La línea gruesa muestra el espectro correspondiente al valor del amortiguamiento del suelo, los cuales son los máximos para ese tipo de suelo.

El espectro de respuesta es simplificado para fines de diseño y calcular la respuesta de la estructura, dicho espectro es de la forma:



El espectro queda definido en tres partes. La primera sigue una relación lineal, la segunda es constante e igual al valor del coeficiente sísmico y la tercera es una función exponencial en términos de r .

Los valores que definen las coordenadas de dicho espectro se resumen dependiendo del tipo de suelo y de la zona sísmica de la República Mexicana, la cual es la siguiente:



Los valores del espectro que se dan en el RCDF-87 son específicamente para el Distrito Federal, para otras partes de la República el Manual de Obras Civiles de Comisión Federal de Electricidad también los proporciona. Asimismo, existen otros reglamentos en otras ciudades que disponen sus propios valores de espectro.

Los valores del espectro para el municipio de Puebla como lo marca su Reglamento se muestran en la tabla 3.2. Para estructuras clasificadas en el Grupo A, los valores del espectro se multiplican por 1.3

Zona	c	T1	T2	r
I	0.20	0	0.6	1/2
II	0.32	0	1.0	2/3
III	0.36	0	1.5	2/3

Tabla 3.2 Valores de espectro para el municipio de Puebla

El RCDF-87 establece los valores de los Espectros para el Distrito Federal. Para el caso de estructuras del grupo A, los valores del espectro se deberán multiplicar por 1.5.

Zona c	T1	T2	r	
I	0.16	0.2	0.6	1/2
II	0.32	0.3	1.0	2/3
III	0.40	0.6	1.5	1

Tabla 3.2 Valores de espectro para el Distrito Federal

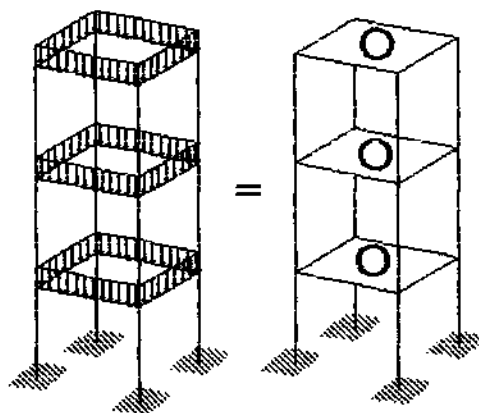
Para otros lugares de la República Mexicana los datos de los espectros pueden encontrarse en otras referencias, como el Manual de Obras Civiles de Comisión Federal de Electricidad.

3.5 Hipótesis relativas al análisis sísmico.

La cuantificación de fuerzas sísmicas es un problema complejo, dado que el sistema estructural tiene variados y múltiples modos de comportamiento. Existen muchos métodos para realizar el análisis, pero en este trabajo se contemplan los modelos estático y dinámico más sencillos, que de alguna forma son los métodos más utilizados y existen recomendaciones sobre ellos en el RCDF-87. Dichos métodos suponen inevitablemente algunas simplificaciones que a continuación se enuncian:

1.- Masas concentradas.

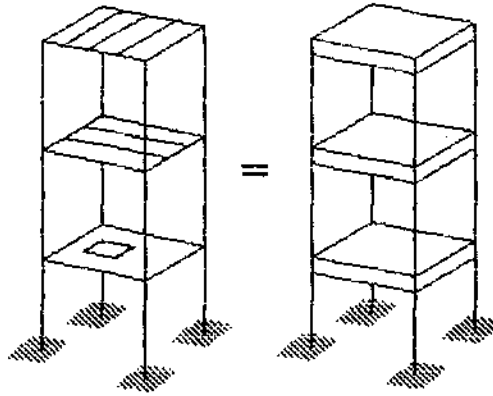
Todas las cargas actuantes en un entrepiso de una estructura se consideran por simplificación que actúan en un solo punto. Dado que se tienen en los espectros las aceleraciones horizontales, es necesario eliminar de las cargas la aceleración de la gravedad para convertirlas en masas, las cuales al ser aceleradas horizontalmente generan las fuerzas laterales equivalentes a la acción del sismo. El punto donde se concentra toda la masa del entrepiso se denomina el centro de masas. La simplificación se hace para cualquier tipo de carga, la cual se muestra en la figura:



2.- Diafragmas rígidos.

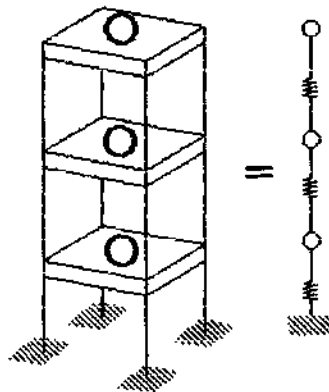
Una simplificación notoria es el suponer que las losas que unen las columnas y trabes de un entrepiso trabajan como un solo cuerpo, el conjunto de losas en dicho entrepiso trabajan como diafragmas rígidos, por los cuales se transmiten las fuerzas sísmicas sin deformación alguna. Este criterio es válido hasta cierto punto, cuando la

losa existente del entrepiso no contenga muchos claros y discontinuidades (véase las condiciones de regularidad). En muchos casos existen losas apoyadas en dos direcciones y con grandes aberturas o existen cuerpos de losas aislados, para lo cual, el concepto de diafragma rígido es simplemente inaceptable. Cualquier tipo de losa, indistintamente de la dirección donde se apoye y de las posibles aberturas, para el análisis sísmico se considera un cuerpo rígido como se muestra en la figura :



3.- Las rigideces en la estructura tienen comportamiento lineal.

Las rigideces de las trabes, columnas y otros elementos resistentes se consideran como constantes, de este modo todas las rigideces de un entrepiso simplemente se suman para formar un solo gran resorte elástico equivalente. De esta forma el análisis global de la estructura es un análisis lineal. Cabe aclarar que la suma de rigideces debe incluir sólo las rigideces de los elementos que participan en la dirección donde se considera al sismo. La simplificación global de la estructura se muestra en la figura:

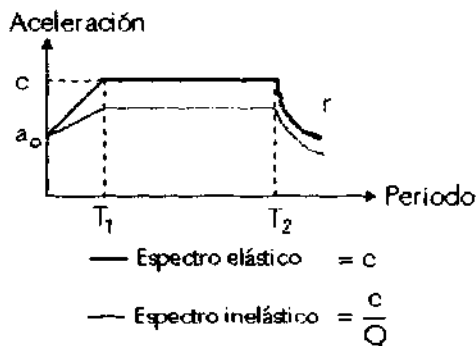


4.- Espectro elástico y espectro inelástico por reducción.

Los espectros proporcionados por el RCDF-87 son elásticos, dado que los coeficientes del espectro generan fuerzas sísmicas de diseño que obligan a la estructura a permanecer dentro de su comportamiento elástico.

La desventaja del espectro elástico es que se generan fuerzas sísmicas muy altas y son irreales en base al comportamiento de la estructura. Una simplificación para tener un espectro inelástico que contemple la reducción por la ductilidad de la estructura es simplemente dividir el espectro elástico por los factores de comportamiento sísmico. En la figura se muestra el espectro elástico típico del RCDF-87 y la simplificación para

espectro inelástico, que al dividirse por el factor de comportamiento sísmico correspondiente a la estructura, se reduce el valor de las aceleraciones.



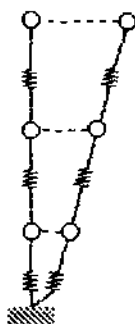
5.- Se considera solo la traslación de las masas.

Para la deducción de los métodos de análisis sísmico estático y dinámico se supone que las masas solo pueden desplazarse en la dirección que actúan las fuerzas sísmicas. Como se considera que el sismo puede actuar en dos direcciones ortogonales, se tienen dos posibles desplazamientos.

Esta suposición implica que no se considera el movimiento de rotación de las masas, el cual genera torsión en el entrepiso. Pero su efecto es real por lo que no debe ignorarse, en el análisis dinámico debería agregarse el grado de libertad correspondiente a la torsión pero el modelo resulta ser complicado.

Para considerar los efectos de torsión, estos se calculan de forma independiente a partir de las fuerzas sísmicas proporcionadas por el método estático o dinámico y suponiendo un valor de una excentricidad máxima probable, que multiplicada por la fuerza sísmica genera un momento torsionante de diseño. Esta limitante implica que no se toma en cuenta la interacción entre la rotación de las masas y su traslación.

En la figura se muestra el desplazamiento de las masas en la única dirección posible donde actúa el sismo, dichos desplazamientos pueden desde luego ser positivos o negativos.



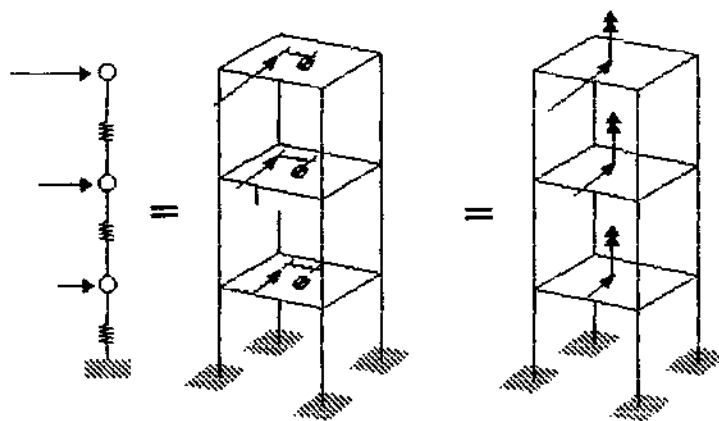
6.- Las fuerzas sísmicas se pueden expresar como estáticas equivalentes.

Los métodos estático y dinámico proporcionan un sistema de fuerzas laterales cuyo efecto estático es equivalente al de la acción sísmica. Para fines de diseño este precepto es el que realmente interesa, pues se requiere el valor de la respuesta máxima posible de la estructura ante una acción sísmica y no lo que sucede a lo largo de la historia del sismo. El método estático también se le conoce como método de

fuerzas laterales equivalentes, porque proporciona un sistema de fuerzas estáticas único, para una aceleración única del terreno.

Un método dinámico completo proporciona la historia de la respuesta de una estructura en cualquier instante de la historia específica de la aceleración del terreno. Dicha historia difícilmente se requiere para el diseño, ya que el método dinámico contempla que la estructura puede vibrar en varios modos, para el diseño se requiere la combinación de todos los modos de vibrar. En sí el método dinámico estrictamente no es un método que proporcione fuerzas estáticas, más bien dichas fuerzas son la respuesta de la estructura para una aceleración y tiempo dado. Al combinar las posibles respuestas máximas de cada modo de vibrar, no significa que todos los modos de vibrar actúan simultáneamente, más bien se trata de superponer las respuestas máximas de cada modo para generar un sistema de fuerzas máximas posibles, que al fin de cuentas para fines de diseño, se les da tratamiento como fuerzas estáticas. Al método dinámico no debe denominarse como un método de fuerzas estáticas equivalentes, aunque las fuerzas generadas por el método se utilicen como tal, una denominación más correcta del método es conocida como método de superposición modal.

Una vez que se han calculado las fuerzas sísmicas por cualquier método, estas se reincorporan en forma estática a la estructura en sus centros de masa, para poder utilizar el método de rigidez en la evaluación de los elementos mecánicos internos. Se reitera que dicha posición de las fuerzas sísmicas generan momentos torsionantes en cada uno de los diafragmas, cuyos efectos se calculan por separado, como se muestra en la figura:



Con estas suposiciones se tienen los conceptos y parámetros necesarios para definir los métodos de análisis sísmico estático y dinámico para evaluar las fuerzas sísmicas.

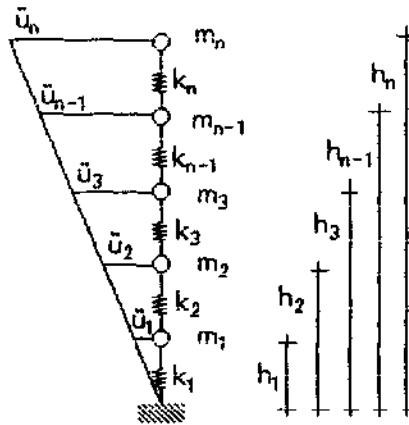
3.6 Análisis estático.

Las NTC para Diseño por sismo, proponen este método relativamente simple para cuantificar las fuerzas laterales que un sismo de diseño ocasiona a una estructura cuya altura no exceda los 60 m. Sin embargo, no se debe utilizar en estructuras que quebranten notoriamente las condiciones de regularidad.

Además de las hipótesis planteadas en la sección anterior, el método estático, para su deducción matemática supone básicamente que:

- 1.- El sistema estructural puede sustituirse por un sistema de un solo grado de libertad.
- 2.- Se considera que la estructura solo puede vibrar en su primer modo natural.
- 2.- La variación de la aceleración respecto a la altura es lineal.

Bajo estas hipótesis se tiene que para el sistema estático, una distribución de aceleraciones como se muestra:



Donde en el entrepiso i:

m_i = Masa.

k_i = Rigidez.

\ddot{u}_i = Aceleración.

n = Número de entrepisos.

3.6.1 Cálculo de las fuerzas sísmicas.

La fuerza sísmica correspondiente a cada entrepiso deberá ser:

$$F_i = m_i \ddot{u}_i \quad (3.3)$$

Como se considera solo un grado de libertad, se tendrá conocida la aceleración en el último nivel. Para los demás entrepisos, la aceleración se deduce por triángulos semejantes:

$$\ddot{u}_i = \frac{h_i}{h_n} \ddot{u}_n$$

Al sustituir este resultado en la ecuación de fuerza se tiene que:

$$F_i = m_i \frac{h_i}{h_n} \ddot{u}_n$$

Expresando las masas en términos de sus pesos, dividiendo entre la aceleración de la gravedad:

$$m_i = \frac{w_i}{g} \quad (3.4)$$

La ecuación de fuerza sísmica se puede expresar como:

$$F_i = w_i h_i \frac{\ddot{u}_n}{g h_n}$$

El cortante basal corresponde a la suma de todas las fuerzas sísmicas, el cual al sustituir la ecuación anterior se tiene que:

$$V_o = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n w_i h_i \frac{\ddot{u}_n}{g h_n} \quad (3.5)$$

Y al excluir de la sumatoria los términos constantes se tiene que:

$$V_o = \frac{\ddot{u}_n}{g h_n} \sum_{i=1}^n w_i h_i$$

De la definición de coeficiente sísmico se tiene que:

$$c = \frac{V_o}{w_o} = \frac{\frac{\ddot{u}_n}{g h_n} \sum_{i=1}^n w_i h_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Despejando las constantes, excepto el coeficiente sísmico se tiene:

$$\frac{\ddot{u}_n}{g h_n} = c \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i h_i}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación de fuerza sísmica se tiene que:

$$F_i = w_i h_i \frac{\ddot{u}_n}{g h_n} = c \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} w_i h_i$$

Esta ecuación corresponde al valor de la fuerza en un espectro elástico, para utilizar el espectro inelástico se divide la fuerza sísmica entre el factor de comportamiento sísmico Q de la estructura, con lo que finalmente se tiene que las fuerzas sísmicas por el método estático son :

$$F_i = \frac{c}{Q} \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} w_i h_i \quad (3.6)$$

Podrá observarse que el valor de las fuerzas sísmicas no depende en absoluto de la rigidez, pero se calculan con el valor máximo del espectro. En cambio el RCDF-87 permite reducir las fuerzas estáticas siempre y cuando se calcule el periodo de vibración de la estructura y obtener aceleraciones menores del espectro.

3.6.2 Estimación del periodo de vibración de la estructura.

Para valuar el periodo de vibración, es necesario calcular los desplazamientos. Los datos de partida que se requieren para cada entrepiso son su rigidez y su peso.

Para cada entrepiso le corresponde :

$$\text{a) Una fuerza cortante : } V_i = \sum_{k=1}^i F_k \quad (3.7)$$

$$\text{b) Un desplazamiento relativo: } \Delta u_i = \frac{V_i}{k_i} \quad (3.8)$$

$$\text{c) Un desplazamiento absoluto: } u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \quad (3.9)$$

La aceleración corresponde a las del movimiento armónico simple en que asociadas a la aceleración angular es:

$$\ddot{u}_i = u_i \omega^2$$

Las fuerzas armónicas son las que producen la aceleración angular las cuales se pueden expresar como:

$$F_i = m_i \ddot{u}_i = \frac{w_i u_i \omega^2}{g}$$

A continuación se calcula el trabajo provocado por las fuerzas armónicas y el trabajo provocado por los desplazamientos, los cuales respectivamente son:

$$T_{\text{am}} = \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^n w_i u_i^2 \quad \text{y} \quad T_{\text{desp}} = \sum_{i=1}^n F_i u_i$$

Como se trata del mismo fenómeno los trabajos mencionados deben ser iguales. Al igualar y al despejar la aceleración angular, se tiene que:

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^n F_i u_i}{\sum_{i=1}^n w_i u_i^2}$$

Tomando en cuenta que en el movimiento armónico simple el periodo en función de la frecuencia es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.10)$$

Sustituyendo la aceleración angular en la fórmula del periodo, finalmente se tiene una expresión para calcular el periodo de vibración de la estructura, la cual se le conoce como la "Fórmula de Schwartz", dicha fórmula es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i u_i^2}{g \sum_{i=1}^n F_i u_i}} \quad (3.11)$$

Se podrá observar que para calcular el periodo natural de vibración, es necesario calcular previamente las fuerzas sísmicas y los desplazamientos.

3.6.3 Reducción de fuerzas sísmicas obtenidas del método estático.

El RCDF-87 permite que las fuerzas estáticas puedan ser reducidas dependiendo si el periodo fundamental de vibración de la estructura define un valor de aceleración en el espectro. El periodo se calcula con la Fórmula de Schwartz y se tienen tres casos posibles en el espectro, el cual posee tres funciones distintas limitadas en las ordenas por los periodos del espectro T_1 y T_2 .

El nuevo valor del coeficiente sísmico a se calcula dependiendo según los datos del espectro, cuyas expresiones son:

1.- Si $T < T_1$

$$a = \frac{1}{4} \left(1 + 3 \frac{T}{T_a} \right) c$$

2.- Si $T_1 < T < T_2$

$$a = c$$

3.- Si $T > T_2$

$$a = \left(\frac{T_2}{T} \right)^r c$$

(3.12)

La forma de calcular las fuerzas reducidas depende de dos casos:

Caso 1.- Si $T \leq T_2$ ó $T \leq T_1$ entonces las fuerzas sísmicas se calculan con la misma expresión, salvo que el valor de c , se sustituye por el valor de a .

Caso 2.- Si $T > T_2$ entonces las fuerzas sísmicas se calculan con una expresión diferente:

$$F_i = a w_i (k_1 h_i + k_2 h_i^2)$$

Donde:

$$k_1 = q \left[1 - r(1-q) \right] \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} \quad k_2 = 15 r q (1-q) \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} \quad q = \left(\frac{T_2}{T} \right)^r$$

(3.13)

La constante r es un dato del espectro el cual representa el coeficiente de la función exponencial de la parte decreciente del espectro, que permite reducir las fuerzas.

Con las reducciones hechas en caso de aplicarse, se tienen definidas las fuerzas sísmicas definitivas de cada entrepiso.

3.7 Método dinámico

EL RCDF-87 permite que cualquier estructura sea analizada mediante un análisis dinámico. Existen varios tipos de análisis dinámico los cuales realizan integración paso a paso, de los cuales se pueden mencionar que los más utilizados son:

- 1.- Directo o de superposición modal.
- 2.- Método de Newmark.
- 3.- De integración paso a paso de respuesta a sismos específicos.

La diferencia entre los métodos consiste en los conceptos que toman en cuenta. El más simple es el de superposición modal que es el que se desarrolla en el presente trabajo.

La ecuación diferencial general para un sistema de varios grados de libertad de los modelos estructurales lineales, es de la forma:

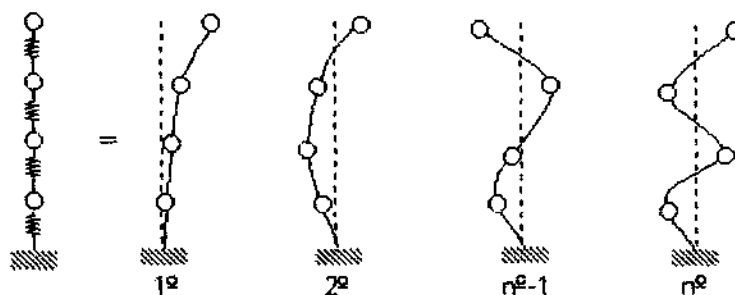
$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \bar{C} \frac{d}{dt} u(t) + \bar{K} u(t) = \bar{F}(t) \quad (3.14)$$

Donde:

\bar{M} =	Matriz de masas.	$\bar{F}(t)$ =	Vector de cargas.
\bar{C} =	Matriz de amortiguamientos	$u(t)$ =	Vector de desplazamientos.
\bar{K} =	Matriz de rigideces.	$\frac{d}{dt} u(t)$ =	Vector de velocidades
$\frac{d^2}{dt^2} u(t)$ =	Vector de aceleraciones.		

Esta ecuación diferencial resulta compleja por la cantidad de datos que vienen implícitos. El método de superposición modal es el primer paso de la solución más básica, la cual consiste en resolver el caso de la vibración libre con amortiguamiento nulo que permite determinar con buena aproximación los periodos de vibración y formas modales.

Cualquier método dinámico, a diferencia del estático permite el análisis de varios grados de libertad y no solo uno. De esta forma se cuenta que cada entrepiso puede desplazarse en forma independiente de los otros. Bajo esta consideración, si existen n entrepisos, existirán n modos diferentes de vibrar de la estructura, como se muestra en la figura:



Modos de vibrar

Al considerar el amortiguamiento como nulo, y como condición inicial de frontera que el vector de cargas también vale cero, la ecuación diferencial se reduce a:

$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \bar{K} u(t) = 0$$

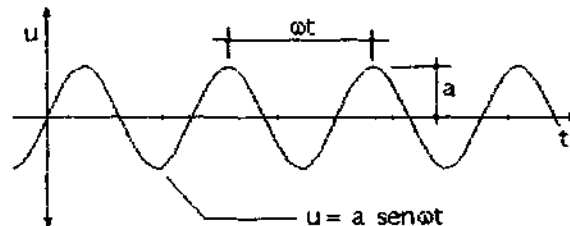
Que por simplicidad también puede expresarse como:

$$\bar{M} \ddot{u} + \bar{K} u = 0 \quad (3.15)$$

Donde solo se necesitan definir las matrices de rigidez y de masas. En vibración libre en movimiento armónico simple implica que las aceleraciones son de tipo sinusoidal, y como la función seno es una función par, la segunda derivada también es una función sinusoidal, que es la que representa los desplazamientos. Una solución para la ecuación diferencial mostrada es que los desplazamientos sean una función seno, para lo cual la función de los desplazamientos se pueden expresar como:

$$u = a \operatorname{sen} \omega t$$

Cuya gráfica se muestra en la figura:



Se observa que la longitud de la onda viene expresada por ωt y la amplitud de la misma por a . Esta función al derivarla dos veces para obtener la función aceleraciones se tiene que:

$$\ddot{u} = -\omega^2 a \operatorname{sen} \omega t$$

Al sustituir este resultado en la ecuación diferencial se tiene que :

$$\bar{K} a - \omega^2 \bar{M} a = 0 \quad (3.16)$$

Para que la amplitud de la onda sea diferente de cero es necesario que:

$$\det |\bar{K} - \omega^2 \bar{M}| = 0 \quad (3.17)$$

Para la matriz resultante se debe cumplir la condicionante que el determinante debe ser forzosamente cero. Las soluciones de u , que no sean la solución homogénea (vector cero) se conocen como vectores característicos, donde el parámetro característico es la aceleración angular.

Entonces el problema consiste en calcular los n valores y vectores característicos que satisfagan la ecuación diferencial. Existen numerosos métodos para resolver valores característicos. Dos métodos muy utilizados son :

- El de Jacobi
- El de la iteración del sub-espacio

En este caso como se necesitan conocer todos, existe un método matricial directo para encontrar el polinomio característico, el cual se usa en el presente trabajo, dicho método es el Método de Krylov.

Para resolver el problema de los valores característicos, las matrices y masas deberán tener el siguiente formato, en base a las masas y rigideces individuales de cada entrepiso como se muestra:

$$\bar{M} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{K} = \begin{vmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

Posteriormente se debe formar la matriz que definirá los valores característicos. Dicha matriz es de la forma de Jacobi, que con la consideración de que es simétrica, la matriz característica será:

$$\bar{E} = \bar{M}^{-1}\bar{K} \quad (3.19)$$

3.7.1 Método de Krylov para valores característicos

El método de Krylov en sí parte de la matriz característica, para lo cual, el método de Krylov resuelve un sistema lineal de ecuaciones cuya solución son los coeficientes del polinomio característico. El sistema de ecuaciones mencionado es de la forma:

$$\bar{A}x = D$$

En donde la incógnita es el vector x , que contiene los coeficientes del polinomio característico. La matriz \bar{A} , se calcula mediante productos sucesivos de un vector x_0 con la matriz característica \bar{E} . El vector inicial está formado por la unidad en el renglón uno, y ceros en el resto del vector:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La matriz \bar{A} del sistema queda conformada por varios vectores intrínsecos en la propia matriz, se aclara que los vectores se intercalan para formar la matriz, la expresión siguiente no es matemáticamente correcta porque no se puede decir nada al mostrar vectores juntos y pretender formar una matriz, más bien se indica que cada vector contiene los valores correspondientes de toda una columna en la matriz, así por ejemplo como se muestra en la expresión, el vector b_1 contiene los valores de la columna uno de la matriz, y así sucesivamente.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c} [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \\ \dots \\ [b_{n-1}] \\ [b_n] \end{array} \right] \quad (3.21)$$

Los vectores que se agrupan para formar la matriz, se calculan mediante productos sucesivos de cada vector de derecha a izquierda con la matriz característica \bar{E} , comenzando con el vector inicial x_0 , de modo que la matriz queda definida con los valores de los vectores calculados como se muestra:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c} [\bar{E}b_1] \\ [\bar{E}b_2] \\ \dots \\ [\bar{E}b_{n-1}] \\ [\bar{E}b_n] \end{array} \right] [x_0] \quad (3.22)$$

Posteriormente, la última multiplicación corresponde al vector de constantes, que se multiplica por -1, ya que se encuentra en el lado derecho del sistema de ecuaciones y se calculo del lado izquierdo, lo que se puede expresar como:

$$D = -\bar{E}b_1$$

Finalmente el sistema de ecuaciones propuesto por Krylov puede expresarse como:

$$\left[\begin{array}{c} [\bar{E}b_1] \\ [\bar{E}b_2] \\ \dots \\ [\bar{E}b_{n-1}] \\ [\bar{E}b_n] \end{array} \right] x = -\bar{E}b_1 \quad (3.23)$$

Cuya incógnita es el vector x , cuyos valores contienen los coeficientes del polinomio característico, dichos coeficientes se obtiene en la forma:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ c_1x \\ c_2x^2 \\ \dots \\ c_{n-2}x^{n-2} \\ c_{n-1}x^{n-1} \\ c_nx^n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Donde el coeficiente c del vector se multiplica por la variable del polinomio elevado a la n -ésima potencia, dependiendo de la posición en el vector.

El siguiente paso consiste en encontrar todas las raíces del polinomio característico, la primera raíz se puede obtener fácilmente por el Método de Newton-Raphson, el cual expresa que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3.25)$$

Donde la raíz valor buscada es x . Una vez encontrada la primera raíz, como la función que se trabaja es un polinomio, la derivada también es un polinomio, no existe problema en encontrar las demás raíces por división sintética. La división sintética requiere como dato que una raíz sea conocida, como ya se tiene una, se reduce en un grado el polinomio, y para el polinomio reducido, se vuelve a encontrar una raíz con el Método de Newton-Raphson. De este modo se prosigue hasta encontrar la última raíz deseada.

Las raíces encontradas corresponden al cuadrado de la aceleración angular. Si se ordenan las raíces en un vector de resultados en el mismo orden como las raíces se fueron obteniendo, en los primeros renglones se obtienen las aceleraciones angulares más reducidas y en los últimos renglones las aceleraciones más grandes.

$$x_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \dots \\ \omega_{n-1}^2 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

En el mismo orden, los modos fundamentales se encuentran en los primeros renglones y los modos más altos en los últimos renglones, que para el caso del método dinámico, los primeros son los más significativos.

El siguiente paso consiste en calcular las formas de vibrar, que en forma matemática son los vectores característicos. Como todas las raíces del polinomio característico son conocidas, el siguiente paso consiste en sustituir cada raíz en la ecuación diferencial original para obtener una matriz, posteriormente se crea un sistema lineal de ecuaciones cuya incógnita es un vector z , que contiene la forma de vibrar de cada modo y para este sistema de ecuaciones se define un vector de constantes con el valor de la unidad en el primer renglón y ceros en los demás renglones. El sistema de ecuaciones queda expresado como:

$$(\bar{K} - \omega_j^2 \bar{M})z_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Al resolver este sistema, se tiene que la solución contiene la forma de vibrar de cada modo contenida en el vector z . Se tienen que resolver n sistemas como el anterior para encontrar los vectores de las formas de vibrar de cada modo.

3.7.2 Valuación de las fuerzas sísmicas dinámicas.

Una vez que se conocen todas las formas y modos de vibrar, el siguiente paso consiste en determinar la respuesta espectral. Dicha respuesta necesita como primer dato calcular la aceleración del modo. La aceleración se calcula en base a los datos del espectro, para lo cual se requiere conocer el periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Una vez definido el periodo, la aceleración depende de la posición que tenga el periodo en el espectro, de manera similar que en método estático. Además de la ordenada en el espectro, también se necesita conocer el factor de comportamiento sísmico efectivo

Q' , que en el intervalo lineal del espectro debe ser reducido. Dichos parámetros se calculan como a continuación se especifican:

1.- Si $T < T_1$

$$a = \frac{1}{4} \left(1 + 3 \frac{T}{T_a} \right) c \qquad Q' = 1 + (Q - 1) \frac{T}{T_1}$$

2.- Si $T_1 < T < T_2$

$$a = c \qquad Q' = Q$$

3.- Si $T > T_2$

$$a = \left(\frac{T_2}{T} \right)^r c \qquad Q' = Q$$

Una vez obtenida la ordenada y el factor de comportamiento sísmico efectivo, se calcula la aceleración máxima o aceleración de diseño propiamente dicha, la cual se evalúa con la expresión:

$$a_d = g \frac{a}{Q'} \qquad (3.28)$$

Donde

a_d = Aceleración de diseño

g = Aceleración de la gravedad.

Q' = Factor de comportamiento sísmico efectivo.

a = Ordenada en el espectro.

Ahora es necesario transformar las formas de vibrar en desplazamientos reales. Para este paso, se necesita calcular la respuesta máxima de la estructura a ese modo de vibrar, dicha respuesta se evalúa con la expresión:

$$y_{\max} = \frac{a_d C_p}{\omega^2} \qquad (3.29)$$

Donde el término nuevo es C_p , o coeficiente de participación sísmica. Dicho coeficiente se calcula con la expresión:

$$C_p = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i z_i^2} \qquad (3.30)$$

Donde para el entrepiso i :

m_i = Masa .

z_i = Valor de la forma de vibrar.

Una vez que se tiene definida la respuesta máxima se puede calcular el desplazamiento real para cada entrepiso. Los vector de desplazamientos se calcula multiplicando el valor de la respuesta con el vector de la forma de vibrar:

$$\bar{U} = y_{\max} \bar{Z} \quad (3.31)$$

Con el vector de desplazamientos reales obtenido, ahora se calculan los desplazamientos correspondientes a cada entrepiso, que pueden agruparse también en un vector $\Delta \bar{U}$. Posteriormente basta multiplicar para cada entrepiso su desplazamiento relativo con el valor de su rigidez correspondiente para obtener el cortante de dicho entrepiso:

$$V_i = \Delta u_i k_i \quad (3.32)$$

Finalmente las fuerzas sísmicas del modo analizado se obtienen desaccumulando el valor de los cortantes en entrepisos consecutivos:

$$F_i = V_i - V_{i-1} \quad (3.33)$$

Todo este procedimiento debe repetirse desde el inicio con un nuevo valor del modo de vibrar para obtener las fuerzas correspondientes a cada modo. Una vez calculadas las fuerzas para cada modo de vibrar, se tienen un conjunto de fuerzas que están aisladas. La respuesta total de la estructura deberá incluir el efecto de las fuerzas de todos los modos. El RCDF-87 advierte que deben incluirse por lo menos tres modos de vibrar, dado que los modos superiores no contribuyen en gran medida.

Como las formas de vibrar no actúan simultáneamente, no pueden superponerse sus fuerzas para obtener la respuesta total. Dado que es difícil estimar el efecto máximo de todas, se tiene que recurrir a una aproximación para evaluar la respuesta total. Dicha expresión es una media geométrica la cual es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada fuerza. De este manera, la fuerza total máxima en la estructura para el entrepiso considerado es:

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^n F_i^2} \quad (3.34)$$

Dicha aproximación es válida siempre y cuando los periodos de los modos de vibrar no se encuentren muy próximos entre sí, cuando esto último sucede, se tiene que recurrir a otras fórmulas complejas que requieren como dato los porcentajes de amortiguamiento crítico.

Una revisión adicional consiste en calcular el cortante basal provocado por las fuerzas sísmicas dinámicas. Dicho cortante basal deberá cumplir la condición:

$$V_o > V_b = \frac{0.8 c W_o}{Q'} \quad (3.35)$$

Donde V_b es el cortante basal mínimo exigido por el RCDF-87 y V_o es el cortante basal calculado con fuerzas dinámicas, de no cumplirse la condición anterior, todos los cortantes en todos los entrepisos se deben aumentar multiplicándolos con el factor:

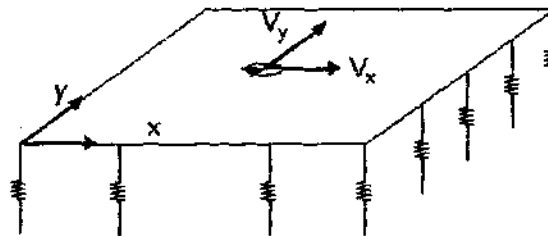
$$\frac{V_b}{V_o} \quad (3.36)$$

3.8 Efectos de torsión.

Las fuerzas sísmicas obtenidas, ya sea por el método estático o dinámico descritos tienen la inconveniencia de que se aplican en un solo punto donde se ignoraron los efectos de torsión que en la estructura su pueden presentar de forma real, ahora es necesario calcular dichos efectos de forma separada. El efecto de torsión se basa en unas hipótesis simplificadoras, las cuales se enuncian:

- a) Se considera el equilibrio en un solo diafragma rígido en donde la carga que actúa es la fuerza cortante en el entrepiso correspondiente, localizada en su centro de masas.
- b) Las fuerzas que resisten a la fuerza cortante las proporcionan las rigideces del entrepiso cuyo resistencia general puede localizarse en un punto denominado como *centro de torsión*.
- c) Las rigideces de entrepiso las forman marcos planos, sensiblemente paralelos en dos direcciones ortogonales.
- d) Para calcular el momento torsionante se suponen las excentricidades en la base como máximas probables.
- e) El edificio tiene una distribución de rigideces regular en elevación, es decir, que las columnas de un diafragma únicamente están unidas con niveles consecutivos.
- f) El momento torsionante de diseño es el máximo correspondiente generado en cualquiera de las dos direcciones ortogonales.

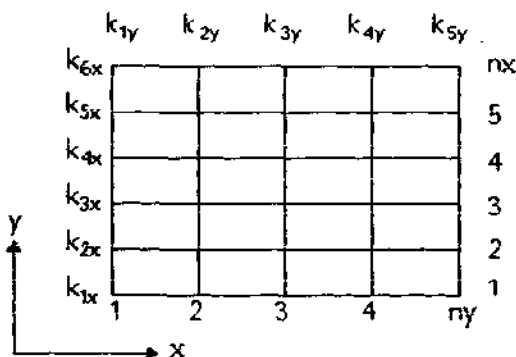
Como primera hipótesis, las rigideces de cada marco se pueden idealizar mediante resortes ubicados en la posición de cada marco para las dos direcciones, y las fuerzas sísmicas actúan en el centro de masas, como se muestra en la figura:



Se menciona que los resortes equivalen a la rigidez del marco en ese punto. Se aclara que los resortes no representan solo a las columnas, sino que representan las rigideces de todas las columnas, traveses y otros elementos resistentes que se encuentran en dicho marco en la dirección del mismo.

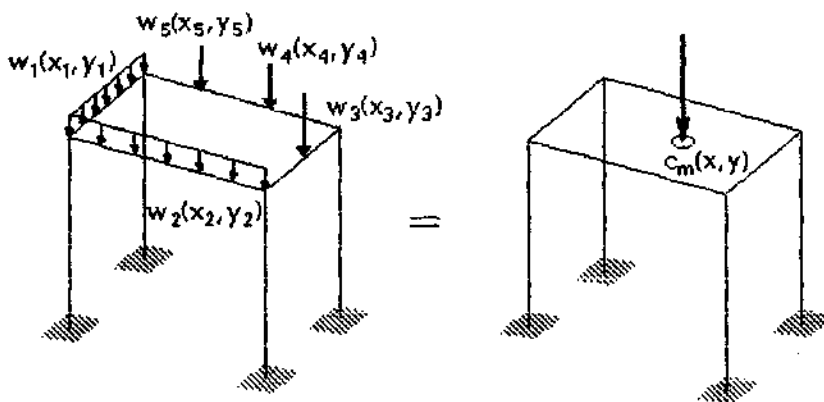
Bajo esta suposición es necesario calcular los siguientes cinco pasos para definir los efectos de torsión, los cuales se calculan como fuerzas laterales aplicadas en cada uno de los marcos y en cada entrepiso. La nomenclatura en las fórmulas que se expresarán, parten

de que se consideran a los marcos como paralelos a los ejes, de este modo, se tienen en el eje y, los marcos paralelos a x y viceversa. En la figura se muestra dicha distribución:



1.- Coordenadas del centro de masas.

Se deben tener por conocidos en el entrepiso por analizar, el valor y las coordenadas de las cargas verticales que actúan. Cuando las cargas no son puntuales, estas se deben sustituir por unas fuerzas concentradas equivalentes. Una configuración de cargas con sus coordenadas se reemplaza por una resultante cuyas coordenadas son el centro de masas como se muestra:



Las coordenadas del centro de masa son:

$$c_{m_x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \text{y} \quad c_{m_y} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} \quad (3.37)$$

Donde:

c_m = Coordenadas del centro de masas.

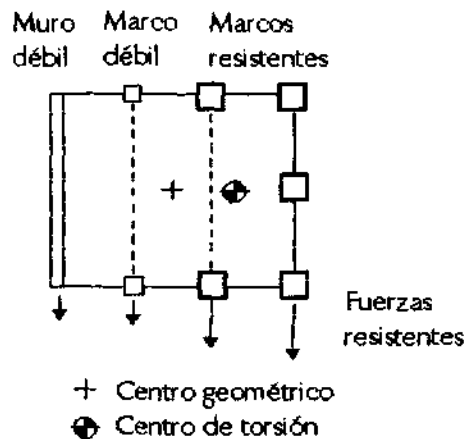
w_i = Fuerza concentrada

x_i = Coordenada en x de la fuerza.

y_i = Coordenada en y de la fuerza.

2.- Coordenadas del centro de torsión.

Se presentan algunos casos en que unos marcos son más rígidos que otros, y la distribución de la rigidez no es simétrica en uno o ambos sentidos. El centro de torsión significa el punto en cuyas coordenadas se aplica la resultante de las fuerzas resistentes. Para ejemplificar se muestra una distribución de rigideces asimétrica :



En la figura se muestra que los elementos más rígidos y resistentes están cargados hacia la parte derecha y los débiles hacia la izquierda. Cada elemento tendría una fuerza resistente en la dirección mostrada, que depende del valor de su rigidez. La resultante de las fuerzas resistentes se coloca en el centro de torsión. Por lo anterior el centro de torsión también se le conoce como centro de rigideces. Para fines de análisis, en vez de usar las fuerzas resistentes, es suficiente el considerar solo las rigideces. Bajo este precepto, el centro de torsión se calcula con las expresiones siguientes:

$$ct_x = \frac{\sum_{i=1}^{ny} k_{iy} x_i}{\sum_{i=1}^{ny} k_{iy}} \quad y \quad ct_y = \frac{\sum_{i=1}^{nx} k_{ix} y_i}{\sum_{i=1}^{nx} k_{ix}} \quad (3.38)$$

Donde

ct_x = Coordenadas del centro de torsión.

k_{ix} = Rigidez del marco paralelo a x .

k_{iy} = Rigidez del marco paralelo a y .

x_i = Posición en x , del marco paralelo a y .

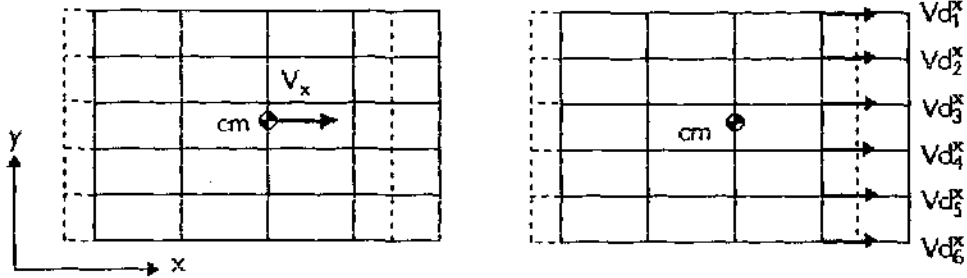
y_i = Posición en y , del marco paralelo a x .

nx = Número de marcos paralelos a x .

ny = Número de marcos paralelos a y .

3.- Fuerzas debidas al cortante directo

Esta etapa consiste en repartir el cortante total en cada marco proporcionalmente a cada una de las rigideces de los mismos, bajo la suposición que la fuerza sísmica genera un solo desplazamiento en la dirección que se considera.



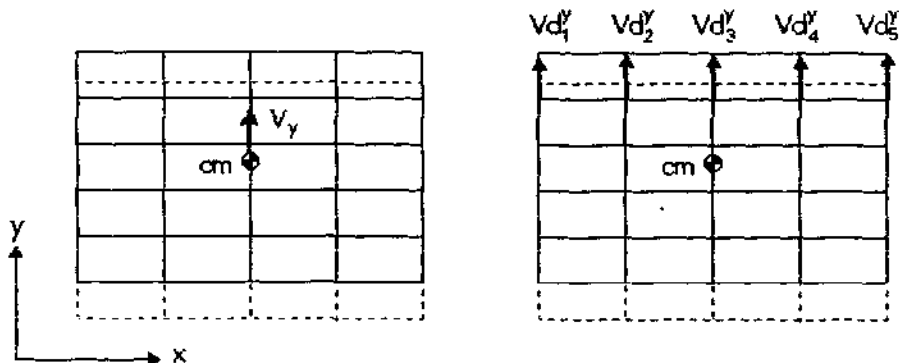
----- Original
 ——— Deformado

En la figura se muestra en un entrepiso como se reemplaza la fuerza cortante total en x , por un conjunto de fuerzas aplicadas en cada marco, estas últimas se denominan fuerzas cortantes directas, las cuales se evalúan con la expresión:

$$Vd_i^x = \frac{k_{ix} V_x}{\sum_{i=1}^{nx} k_{ix}}$$

(3.39)

Para el caso del cortante directo en y , se muestra en la figura, el mismo procedimiento.



----- Original
 ——— Deformado

La expresión para calcular el cortante directo en y , es:

$$Vd_i^y = \frac{k_{iy} V_y}{\sum_{i=1}^{ny} k_{iy}}$$

(3.40)

Donde:

V_x = Cortante total que actúa en x .

V_y = Cortante total que actúa en y .

Vd_i^x = Cortante directo en el marco paralelo a x .

Vd_i^y = Cortante directo en el marco paralelo a y .

4.- Excentricidades calculadas y de diseño.

La excentricidad es la distancia existente entre el centro de masas y el centro de torsión, a esta excentricidad se le denomina también como excentricidad calculada o estática. Dicha excentricidad se calcula para cada dirección, lo que se puede expresar como:

$$e_{sx} = |cm_x - ct_x| \quad \text{y} \quad e_{sy} = |cm_y - ct_y| \quad (3.41)$$

Debido al efecto dinámico de la vibración sísmica, el momento torsionante que actúa en el entrepiso puede verse amplificado, y por lo tanto, la excentricidad real puede ser mayor que la calculada estáticamente. Por otra parte, la aproximación por las simplificaciones en el cálculo del centro de torsión no puede ser exacta, porque la rigidez de los elementos tiende a ser degradada por agrietamientos conforme transcurre la historia del sismo, además de la posible contribución de elementos no estructurales. Para tomar en cuenta dichos efectos, el RCDF-87 contempla que deben usarse en el análisis una excentricidad de diseño para cada dirección que resulte la más desfavorable de estas dos:

$$e_d = 1.5 e_s + 0.1b \quad \text{y} \quad e_d = e_s - 0.1b \quad (3.42)$$

Donde

e_s = Excentricidad calculada.

b = Longitud del lado máximo del edificio perpendicular a la dirección donde actúa el sismo

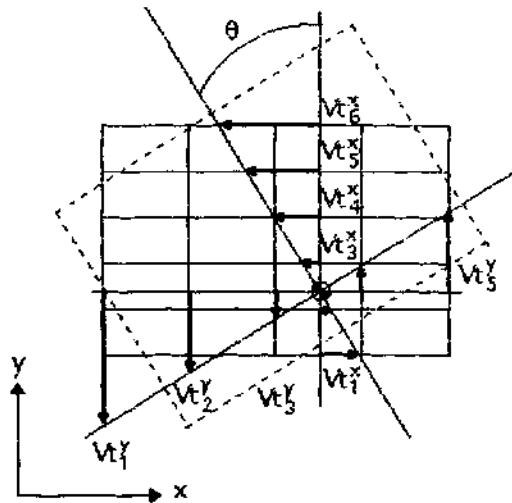
El factor de 1.5 considera la amplificación dinámica de la torsión y el 10% del lado máximo, significa el posible error al calcular el centro de torsión.

5.- Fuerzas cortantes debidas a la torsión.

Las fuerzas cortantes debidas a torsión se calculan a partir del momento torsionante ocasionado por la fuerza cortante total y la excentricidad de diseño. Por lo tanto el momento torsionante se expresa como:

$$Mt_x = e_{dx} V_x \quad \text{y} \quad Mt_y = e_{dy} V_y \quad (3.43)$$

Cualquiera de estos dos momentos, provocan un giro en el diafragma rígido, lo que al mismo tiempo, generan las fuerzas cortantes de torsión, provocadas por el momento torsionante aplicado en la posición que resulta del centro de masas más la excentricidad de diseño, definiendo un nuevo centro de torsión hipotético. Cabe aclarar que el centro de torsión calculado previamente no se modifica. Más bien el efecto accidental se refleja en el valor del momento torsionante y no en otros valores. La distribución de cortantes por torsión para un momento torsionante positivo es la que se indica en la figura:



Bajo estas suposiciones por condiciones de equilibrio se deducen que las fuerzas cortantes por torsión para las direcciones x y y respectivamente son:

$$V_t^x = \frac{k_{ix} \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{nx} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{i=1}^{ny} k_{iy} \bar{x}_i^2} M \quad y \quad V_t^y = \frac{k_{iy} \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{nx} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{i=1}^{ny} k_{iy} \bar{x}_i^2} M \quad (3.44)$$

De los términos anteriores, M representa el momento torsionante más desfavorable, es decir, el momento máximo ocasionado por cualquiera de las excentricidad y cortantes en las dos direcciones. En la expresión es necesario definir la distancia existente entre la posición del marco y la del centro de torsión, la cual se expresa como:

$$\bar{x}_i = x_i - ct_x \quad y \quad \bar{y}_i = y_i - ct_y \quad (3.45)$$

Finalmente, una vez que se han calculado los cortantes directos y los de torsión, ambos se suman para definir el cortante de diseño para cada marco, dicho cortante se expresa como:

$$V_{ix}^T = Vd_i^x + Vt_i^x \quad y \quad V_{iy}^T = Vd_i^y + Vt_i^y \quad (3.46)$$

Este cortante de diseño se desacumula para transformarlo en fuerzas de diseño. Todo este procedimiento debe repetirse para cada uno de los niveles analizados. Este es el último paso

3.9 Conclusiones.

El cálculo de la respuesta sísmica de un edificio es un proceso complejo que deja muchos resultados inciertos. Puede afirmarse que la ingeniería sísmica es una disciplina joven, pues sus inicios data de principios de este siglo, dado que muchos sismos ocasionaron daños en estructuras de altura importante. Aunque la investigación sísmica es muy amplia y variada, todavía queda mucho camino por recorrer, pues todo lo que se conoce en materia sísmica se ha desarrollado en menos de nueve décadas, lo cual es un tiempo corto si lo comparamos por ejemplo, con la teoría de la elasticidad lineal que formalmente se inició en el siglo XV, y muchos conceptos del análisis estructural actualmente utilizados se dedujeron también en esa época.

A pesar de todo, los criterios actuales presentan un grado de aproximación muy alto cuando son utilizados correctamente. En el transcurso de este capítulo se desarrollaron los métodos de análisis de respuesta sísmica de mayor uso, precisando las simplificaciones y los casos que contempla y cuales son sus limitantes.

La confiabilidad de la respuesta sísmica dependerá básicamente:

1.- Si las condiciones locales del suelo corresponden de manera cercana a las condiciones expresadas en el espectro de diseño utilizado. Es muy recomendable utilizar los valores de espectro proporcionados por los reglamentos porque resumen los conocimientos y experiencias más actualizados, sin embargo los espectros son muy generales. El afirmar que cuatro zonas sísmicas y tres tipos de suelo son suficientes para determinar doce espectros para todo un país es una medida incompleta si se toma en cuenta que el comportamiento del suelo es único para cada caso. Hay que tomar seriamente en cuenta una incertidumbre en los valores del espectro cuando las condiciones sísmicas locales sugieran otra actividad sísmica, por ejemplo, si existen sismos registrados en fallas geológicas locales, o cuando el tipo de suelo no pueda ser clasificado en los descritos por el reglamento. En estos casos cuando no existan reglamentos o estudios, se debe utilizar un espectro disponible más desfavorable al que supuestamente se utilizaría.

2.- En cuanto a la estructuración, los métodos desarrollados en este capítulo se aplican a estructuras que sean lo más regular posible. La regularidad en la estructuración general debe plantearse como un precepto básico por dos razones principalmente:

En primer lugar porque las estructuras regulares son las más estudiadas y analizadas en la experimentación, por lo que la mayoría de la investigación y métodos de análisis están basados principalmente en dichas estructuras, que de no hacerlo de este modo, la complejidad de estudiar estructuras irregulares manejaría una cantidad de variables tal, que haría muy complicado el proceso de evaluación y confiabilidad de resultados.

La segunda razón es que la irregularidad en los edificios es la causa principal del mal comportamiento sísmico. Han sido innumerables los casos que las irregularidades provocan mecanismos de fallas locales que debilitan sensiblemente la resistencia de la estructura. Esto se debe principalmente porque el efecto del sismo se concentra sólo en algunos puntos y no se distribuye uniformemente en la estructura. Dos ejemplos son muy claros.

a) Una planta baja débil con grandes claros que provocan que la rigidez de la planta baja sea desproporcionadamente menor que la de los pisos superiores. Este cambio brusco de rigidez hace que la estructura se comporte como un péndulo invertido donde la zona de falla más vulnerable es la planta baja.

b) Se han presentado casos en que los muros estructurales no tienen la misma altura que el entrepiso con el fin de colocar ventanas. Bajo la acción de un sismo, los muros generan un empotramiento artificial en el punto de choque del muro con la columna creando el efecto que se conoce como columna corta. Esta restricción del muro provoca que la columna no pueda disipar energía ante un sismo y en cambio, se concentra toda la energía del entrepiso en la unión de la columna con el borde superior del muro, concentrando los esfuerzos en una región de la columna que seguramente no se tomó en cuenta dichos efectos. Para evitar ese problema es necesario separar físicamente los muros de la estructura.

3.- Pueden existir muchas estructuras que no cumplen en absoluto con las simplificaciones e hipótesis planteadas para el desarrollo de los métodos de análisis sísmico presentados. En este caso, los métodos presentados son inaceptables, para superar ese problema se deben recurrir a otros métodos más refinados como el método de Newmark, método de elemento finito.

4.- La ductilidad supone que los materiales entren a un esfuerzo superior a su estado de fluencia, lo que equivale a que la estructura sufre deformaciones irreversibles, en los cuales el costo de reparación de daños no puede considerarse como despreciable.

5.- La rigidez genera fuerzas sísmicas mayores. El hecho de rigidizar indiscriminadamente una estructura de ningún modo garantiza que la respuesta sísmica sea la más adecuada, hay que repasar los parámetros de los métodos donde una estructura más rígida genera aumentos en la fuerzas sísmica que en dado caso, por agregarse elementos más robustos pudiera librar el estado límite de falla, pero la ductilidad puede ser fácilmente limitada.

6.- En base a los dos puntos previos existe un punto medio entre modelar estructuras donde sean lo suficientemente rígidas para evitar deformaciones ocasionadas por sismo, pero al mismo tiempo el modo de falla de la estructura debe tener comportamiento dúctil.

Capítulo IV.

EVALUACIÓN Y DISEÑO

4.1 Introducción.

Una vez que se han definido y cuantificado las cargas que actuarán sobre el edificio, es necesario determinar mediante el método de rigidez descrito, los elementos mecánicos de diseño. El proceso de evaluación se entenderá para este caso como la generación y revisión de la respuesta máxima probable del edificio a lo largo de su vida útil, ocasionada por las distintas formas posibles de aplicación de las cargas. Dicha respuesta máxima probable se entenderá a la respuesta que genera los valores de diseño para cada elemento.

Esta etapa de evaluación es en términos estrictos parte del proceso de análisis. Consistirá básicamente en determinar la forma en como deben formarse un estado de las carga y la forma como deben combinarse. Dichas combinaciones de cargas se generan tomando en cuenta los factores de carga apropiados para cada caso, según lo previene el RCDF-87.

Una combinación de carga representa un posible estado de carga del edificio probable máximo al que puede estar sujeto durante su vida útil. Se deben generar por lo tanto, los estados de carga que sean los más desfavorables para el edificio. Las combinaciones por lo tanto, generan una serie de valores posibles máximos, que al contener una amplificación por los factores de carga, esos valores se toman como valores de diseño.

Asimismo, se explica de manera breve cómo y cuando debe aplicarse un análisis de segundo orden. Cuando una estructura bajo la acción de una carga es deformada, la posición del punto de aplicación de las cargas cambia ligeramente debido a los desplazamientos, este corrimiento implica que las cargas realmente actuarían en una posición distinta a la original provocando elementos mecánicos adicionales, aspecto que no toma en cuenta el método de rigidez. Este análisis de segundo orden puede evitarse según el propio Reglamento siempre y cuando se tengan ciertas restricciones en el valor de los desplazamientos.

Con la evaluación de la respuesta máxima, sea con un análisis de primer o segundo orden, se tienen definidos los valores de diseño para los elementos de concreto. En el diseño de elementos de concreto es una etapa que la ayuda de un programa no es tan trascendente, porque requiere más del criterio y selección del armado por parte del proyectista. Sin embargo existen ciertos aspectos que pueden ser mecanizados, básicamente, la cuantificación del refuerzo. En otras palabras la etapa concerniente al diseño solo se limita en este trabajo a determinar la cantidad de refuerzo para los casos de flexión y flexocompresión, que son los dos tipos de acción más importantes en el diseño de concreto reforzado.

4.2 Combinaciones de cargas.

Un estado de carga se entenderá como aquel conjunto de cargas que tienen como característica en común el agente que las provocan. Bajo este concepto se pueden definir para un edificio los siguientes estados de carga:

1.- Carga muerta.

Dicha cuantificación depende básicamente en multiplicar los volúmenes de materiales de la estructura multiplicándolos por los pesos volumétricos. Además los Reglamentos previenen posibles errores en la estimación de la carga muerta agregando correcciones, por lo regular de 20kg/m^2 dependiendo del caso.

2.- Carga viva

Su cuantificación depende del uso de la estructura, que en la práctica puede expresarse como una fracción de la carga muerta. Dichos valores de carga viva también vienen especificados en los Reglamentos. Se distinguen tres tipos de carga viva, la máxima, la instantánea y la media. El artículo 199 del RCDF-87 establece que se utiliza la carga viva máxima cuando se combina con las cargas muertas para determinar el cálculo de acciones permanentes. La carga instantánea se utiliza cuando se combinan con acciones accidentales. La carga media se utiliza en el cálculo de asentamientos y flechas diferidas. Cuando la carga viva sea favorable al comportamiento de la estructura deberá considerarse como nula.

3.- Cargas accidentales.

En este caso, la carga accidental definida corresponde a la sísmica. En el caso de análisis tridimensional es necesario definir un estado de carga para cada una de las direcciones del sismo.

Se tienen por lo tanto tres estados de carga básicos. Los resultados que el análisis proporcione sobre los estados de carga, son elementos mecánicos nominales, es decir, no incluyen los requisitos de seguridad, dichos requisitos se plasman en factorizar las cargas.

Ya que se tienen definidos los estados de carga es necesario crear las combinaciones, las cuales son la suma de los elementos mecánicos de cada estado de carga multiplicados por el factor de carga correspondiente.

Un concepto fundamental para el análisis es el de factorizar las cargas. Un factor de carga es una constante mayor a uno que amplifica las cargas de diseño. Este abudamiento se justifica porque existe incertidumbre en la estimación de las cargas, las limitaciones e hipótesis de los métodos numéricos empleados y la precisión con que los datos se manejen.

Los factores de carga dispuestos por el RCDF-87 en su artículo 194 son los que se enuncian. Se utilizará un factor de carga igual a:

- 1.4: Cuando se consideren combinaciones que incluyan carga muerta más carga viva máxima.
- 1.1: Cuando se consideren combinaciones que incluyan carga muerta más carga viva instantánea y una acción accidental.
- 1.0: Cuando se considera combinaciones para revisión de estado límite de servicio.
- 0.9: Cuando una combinación genera comportamiento favorable a la estructura.

En el Reglamento del Municipio de Puebla los factores son idénticos a los del RCDF-87, salvo que el Reglamento de Puebla en su artículo 285, dispone que estructuras

catalogadas como del Grupo A, el factor para cargas permanentes en vez de ser 1.4, lo dispone como 1.5.

El factor de carga es una constante de seguridad que incrementa los resultados proporcionados por el análisis en sus distintas combinaciones. El valor del factor de carga estima según los siguientes motivos:

- La importancia y el riesgo del uso de la estructura.
- Las posibles discrepancias en la estimación de las cargas de diseño y las reales.
- Las simplificaciones, limitaciones y precisión de los métodos usados en el análisis.
- Los errores constructivos que pudiesen incrementar las cargas.

Bajo los criterios mencionados se pueden generar tantas combinaciones como se requieran. Para la formación de dichas combinaciones se hacen las siguientes observaciones:

- 1.- Se debe generar un estado de acción permanente con cargas muertas y vivas máximas.
- 2.- Las Normas por Diseño por sismo establecen que se debe considerar los efectos sísmicos en una dirección más el 30% de los efectos de la dirección perpendicular.
- 3.- El sismo de una sola dirección puede actuar indistintamente para cualquier sentido.
- 4.- Los efectos de torsión en el sismo pueden calcularse con un momento torsionante positivo y otro negativo.

Si por el momento la revisión del estado límite de servicio no es tan prioritario, las observaciones anteriores contemplan varios estados de carga por el momento sin factorizar que por ejemplo serían.

C_m = Carga muerta

C_{vm} = Carga viva máxima

C_{vi} = Carga viva instantánea.

$SIX1$ = Sismo en x , con torsión positiva.

$SIX2$ = Sismo en x , con torsión negativa.

$SIY1$ = Sismo en y , con torsión positiva.

$SIY2$ = Sismo en y , con torsión negativa.

Todos los sismos pueden actuar de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Si suponemos que las cargas vivas máximas ya están incluidas en la carga muerta, y que las cargas vivas instantáneas se pueden expresar como fracción de la carga muerta, entonces se tendrían cinco estados de carga básicos. Que al considerar el 30% de la aportación del sismo perpendicular, el número de combinaciones resultaría de 33.

Por ejemplo si se supone que en el análisis el análisis sísmico participa el 80% de la carga muerta, entonces algunas de las 33 combinaciones serían.:

$$cb1 = 1.4C_m$$

$$cb2 = 0.88C_m + 1.1 SIX1 + 0.33SIY1$$

$$cb3 = 0.88C_m - 1.1SIX2 + 0.33SIY2$$

.....

En casos de estructuras muy bien definidas como regulares, este número de combinaciones es excesiva, ya que muchas combinaciones por la regularidad son simétricas. Por ejemplo, los elementos mecánicos de un sismo son los mismos si se aplica de derecha a izquierda o viceversa, o los efectos de torsión son los mismos con momentos

torsionantes positivos o negativos. Más bien se debe dejar a elección del proyectista el determinar que combinaciones son las que participan en la respuesta máxima de la estructura.

Si se disponen con los medios, es preferible generar combinaciones que sobren y no que falten. Una combinación que no genere valores máximos se puede eliminar para etapas posteriores de refinamiento. El generar tantas combinaciones se hace con la intención de tomar en cuenta los casos de estructuras irregulares donde dichas combinaciones se harían necesarias.

Los edificios básicamente se diseñan sus trabes y sus columnas. El diseño de trabes está determinado por la flexión y el de las columnas por flexocompresión. De esta manera, de todos los valores proporcionados por el análisis con las combinaciones respectivas, para el diseño propiamente dicho, se requieren los valores máximos de flexión y carga axial. Los demás elementos mecánicos se utilizan únicamente para revisión, de los cuales en orden de importancia la fuerza cortante puede tener efectos considerables más que la torsión.

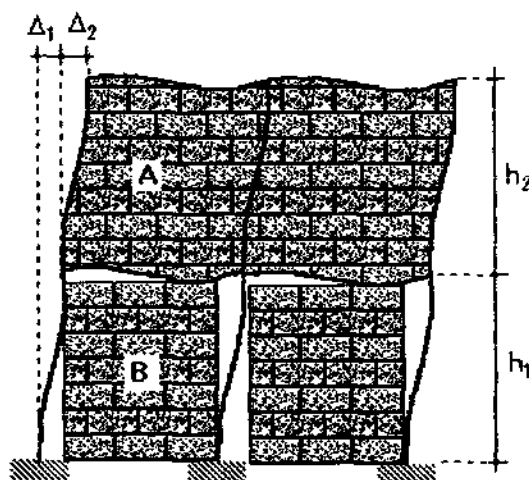
4.3 Deformaciones permisibles.

Una parte no menos importante es el calcular las deformaciones para satisfacer los requisitos de estado límite de servicio. En forma general, no deben ignorarse estas deformaciones para satisfacer los requisitos de seguridad completos y además, hay casos donde es necesario aplicar un análisis de segundo orden, el cual, a pesar de estar determinado por desplazamientos, genera amplificación de los elementos mecánicos originales. A continuación se detalla los aspectos más importantes de cada uno.

1.- Distorsión angular.

La distorsión angular se entiende como la relación del desplazamiento relativo entre dos entrepisos, dividido entre la altura de los mismos. Esta medida es muy importante para evaluar los posibles daños ocasionados por el sismo. Se debe buscar que la distorsión angular sea lo más pequeña posible, dado que una distorsión angular grande significa grandes desplazamientos horizontales de la estructura en caso de sismo.

Para el cálculo de la distorsión angular se necesitan el desplazamiento relativo y la altura del entrepiso como se muestra:



La distorsión angular para cada entrepiso se calcula como:

$$\gamma_i = \frac{\Delta_i}{h_i} \quad (4.1)$$

Donde

Δ_i = Desplazamiento relativo.

h_i = Altura del entrepiso

Se puede notar en la figura que existen dos posibles formas de unión entre otros elementos, por ejemplo muros, con la estructura. En el caso A se presentan elementos unidos a la estructura, que incluso pueden participar en su resistencia, el problema consiste en que dichos elementos son muy frágiles en comparación con la ductilidad de la estructura en sí, y esas deformaciones pueden provocarles una falla. En el caso B se muestra que no existe un vínculo de unión, por lo que el desplazamiento de la estructura es prácticamente independiente, que de alguna manera, la holgura existente entre los elementos no estructurales y la estructura no genera esfuerzos adicionales en los elementos frágiles.

El RCDF-87 en el artículo 209 establece las distorsiones angulares máximas posibles.

Para el caso A: $\gamma_i < 0.006$

Para el caso B: $\gamma_i < 0.012$

El Reglamento para el municipio de Puebla establece para ambos casos la distorsión angular permisible como:

Para el caso A: $\gamma_i < 0.008$

Para el caso B: $\gamma_i < 0.016$

2.- Deflexiones.

El cálculo de deflexiones también es otro punto importante en la revisión de estado límite de servicio en el cual se establecen valores máximos para evitar daños a elementos no estructurales.

Las deflexiones permisibles son básicamente aplicables a trabes o losas sujetas a flexión, es decir, se calculan las deflexiones verticales, ya que las deformaciones horizontales están restringidas por la distorsión angular.

Una de las dudas más grandes es el calcular la inercia de una sección de concreto reforzado, no únicamente para el cálculo de deflexiones sino también para introducir dichas inercias como dato en el método de rigidez.

Dado que una sección de concreto reforzado está formada por dos tipos de materiales distintos, estrictamente hablando es una sección compuesta. Para valorar dicha sección pueden seguirse varios criterios:

1.- Sección bruta de concreto.



2.- Sección transformada. 3.- Sección agrietada transformada.



Para fines de análisis por el método de rigidez se considera la sección bruta de concreto. Para efectos de revisión de deformaciones se considera la sección agrietada transformada. Además del valor de la inercia, el RCDF-87 establece los valores del módulo de elasticidad para concreto simple los cuales se calculan con las siguientes expresiones:

$$E_c = 14,000\sqrt{f'_c} \quad \text{Para concretos clase 2}$$

$$E_c = 8,000\sqrt{f'_c} \quad \text{Para concretos clase 1.}$$

Los concretos clase 2 son los que tienen $f'_c > 250 \text{ kg/cm}^2$. Los de clase 1 tienen resistencia menor a 250 kg/cm^2

Los casos A y B de la distorsión angular también son aplicables para deflexiones verticales. El RCDF-87 en su artículo 184 establece que la deflexión vertical en ningún caso deberá ser mayor

$$\text{Para el caso A:} \quad \delta < \frac{L}{480} + 0.3 \text{ cm}$$

$$\text{Para el caso B:} \quad \delta < \frac{L}{240} + 0.5 \text{ cm}$$

Cuando se analizan elementos en voladizo, las deflexiones permisibles se duplican, con lo cual hay menos restricción de deflexiones en elementos en voladizo. El Reglamento del municipio de Puebla en su artículo 269 establece los mismos valores y criterios que el RCDF-87

4.4 Efectos de segundo orden.

Uno de los problemas cuando ocurre la deformación de un estructura, es que la posición de las cargas cambia ligeramente de su posición original debido a los desplazamientos. Este corrimiento de las cargas provocan elementos mecánicos adicionales a los proporcionados por el método de rigidez, que por sí solo no considera los efectos de segundo orden.

El problema no sólo consiste en cambiar las posiciones de las cargas, sino que la configuración inicial en un análisis de segundo orden es que la estructurada está deformada, lo cual es desfavorable. Un análisis de segundo orden completo significa la cuantificación de los elementos mecánicos y la degradación de rigidez. Para el caso de estudio de este proyecto, no se considera la degradación de rigidez, en otras palabras, se supone que la estructura deformada conserva su resistencia y propiedades iniciales.

Los efectos de segundo orden son de gran importancia por los problemas de esbeltez de las columnas, dado que la resistencia de una columna deformada sufre ampliificaciones notorias por los efectos de esbeltez.

El procedimiento más empleado en el análisis de segundo orden es el P-Delta iterado.

Dicho procedimiento consiste básicamente en aumentar gradualmente las cargas laterales con una corrección que son unas fuerzas laterales ficticias hasta que dicha corrección tienda a ser cero. Este proceso es iterativo hasta que se logra la estabilidad de la estructura

Las expresión correspondiente a la corrección de fuerzas se expresa en términos del cortante ficticio:

$$V_i = FC \frac{\sum_{k=n}^i w_k}{h_i} \Delta_i \quad (4.2)$$

Donde para cada entrepiso:

$\sum_{k=n}^i w_k$ Es la suma de los pesos acumulados por encima del entrepiso.

h_i = Altura.

Δ_i = Desplazamiento relativo

FC= Factor de carga.

El factor de carga se agrega a la expresión únicamente para acelerar el proceso de convergencia. Una vez obtenido el cortante en todos los entrepisos se obtienen las fuerzas, las cuales son las correcciones a las fuerzas originales. De este modo, la nueva fuerza lateral que debe introducirse como dato en el análisis será:

$$F_{ia} = F_{io} + F_{if} \quad (4.3)$$

Donde para cada entrepiso:

F_{ia} = Fuerza corregida total a capturar.

F_{io} = Fuerza lateral original.

F_{if} = Corrección a partir de los cortantes.

El proceso es iterativo y se tienen que hacer varias corridas hasta que la corrección no sea significativa. En los casos más comunes, sobretodo en estructuras regulares, en menos de cinco iteraciones se llega al resultado final con buena aproximación, si se tiene un número grande de iteraciones sin llegar al resultado, por ejemplo 15 o más iteraciones, significa que la estructura es inestable.

Si el problema de que se aumentan los elementos mecánicos reside básicamente en los desplazamientos excesivos, el RCDF-87 permite ciertas tolerancias de desplazamientos, para los cuales el análisis de segundo orden puede ser ignorado.

El análisis de segundo orden puede ser ignorado siempre y cuando se cumpla la condición de que la distorsión angular del entrepiso no exceda el límite mostrado:

$$\gamma_i < 0.08 \frac{V_i}{\sum_{k=n}^i w_k} \quad (4.4)$$

Los términos que intervienen ya han sido definidos con anterioridad. Aún cuando la distorsión angular del entepiso no exceda el límite y pueda ignorarse el análisis de segundo orden, al realizar este último de cualquier manera incrementa un poco los elementos mecánicos, aunque hay que afirmar que estos últimos no son muy significativos.

4.5 Conceptos básicos en el diseño de elementos de concreto reforzado

El concreto es un material pétreo artificial formado por cemento, agua y agregados. El concreto por la reacción química pasa de un estado fluido, viscoso y plástico a uno sólido, rígido y plástico. Aún en estado endurecido el concreto presenta comportamiento notoriamente plástico y ligeramente viscoso.

El concreto simple resiste básicamente esfuerzos de compresión; a tensión es un elemento muy vulnerable, apenas su resistencia a tensión fluctúa del 10% al 15% de su resistencia nominal a compresión. Por otro lado el acero resiste grandes esfuerzos de tensión, pero presenta problemas a compresión, sobretudo el pandeo ocasionado por la esbeltez muy marcada de las barras de acero. Ambos materiales se conjuntan para formar el concreto reforzado aprovechando las bondades del concreto simple y del acero, que actuando juntos mejoraran su resistencia y comportamiento.

El concreto simple presenta algunos problemas con el paso del tiempo, este sufre contracción gradual por pérdida de agua generando deformaciones que se reflejan en ciertos agrietamientos. También presenta un escurrimiento plástico por efecto de la acción permanente de una carga, lo cual provoca un reacomodo de partículas causantes de que el concreto pierda su forma original, como cualquier material de tipo plástico.

Otro problema es que el concreto tiene un modo de falla frágil, esto es, su falla se presenta de manera repentina sin que existan algún indicio previo para advertir dicha falla. Esta inconveniencia se supera con el acero de refuerzo, el cual tiene un modo de falla dúctil, esto es, que se presentan indicios previos que pueden alertar su falla, con un esfuerzo inferior menor al de su ruptura, lo suficiente para prevenir un colapso. Específicamente el indicio previo es la fluencia de los materiales.

Un material frágil generalmente alcanza su ruptura a deformaciones muy pequeñas, aspecto que en los materiales dúctiles es lo contrario, su resistencia puede incluso ser menor a un material frágil pero su falla ocurre a deformaciones muy grandes, lo que para la ingeniería representa un comportamiento más deseable.

Basado en los conceptos anteriores, el diseño actual de miembros de concreto reforzado requiere que su comportamiento sea de tipo dúctil por razones de seguridad. El caso de flexión es donde mejor se puede diseñar un elemento dúctil, en caso de flexocompresión es un tanto más difícil, aunque este comportamiento indeseable por razones de seguridad se ve disminuido en los factores de resistencia.

En la etapa relativo al diseño, el cálculo de los elementos mecánicos resistentes de un miembro será el suponer una configuración de deformaciones máxima tal, que equivalen a la acción de una carga hipotética que conduce a dicho miembro a un estado límite de falla. Dicha carga hipotética será la resistencia del miembro.

La conjunción del análisis y el diseño consistirá que los elementos mecánicos máximos proporcionados por el análisis sean menores o iguales que la resistencia del miembro. Esto es con el fin de lograr que la resistencia sea justamente el valor máximo de sollicitación por parte del análisis y evitar elementos sobrediseñados.

Dicha comparación deberá hacerse por requisitos de seguridad con los factores de carga mencionados anteriormente para los elementos mecánicos del análisis y con los factores de resistencia para los elementos mecánicos resistentes. Dicha comparación se expresará en la forma:

$$FC (I) \leq FR (R) \quad (4.5)$$

En donde el lado izquierdo de la inequación ya se ha discutido. El lado derecho corresponde al producto del elemento resistente nominal por un factor reductivo de resistencia. El valor de dicho factor de resistencia se cuantifica en base a los siguientes motivos:

- El modo de falla del elemento resistente.
- Los errores constructivos que pudiese afectar la resistencia (variabilidad en las dimensiones, colocación del refuerzo,).
- Las diferencias entre los valores de resistencia de los materiales de diseño y los usados en la construcción.
- Posibles defectos en el control de calidad y supervisión en el proceso constructivo.

4.6 Diseño de elementos sujetos a flexión.

Los elementos sujetos a flexión se encuentran prácticamente en todas las estructuras, de manera directa o indirecta, que puede ir acompañada por cortante o por fuerza axial. Para el caso particular de las trabes, el diseño de las mismas está determinado fundamentalmente por la flexión simple.

En esta sección se desarrollan los criterios y procedimientos generales que estipula el RCDF-87 en la parte correspondiente a las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño de Concreto, o por sus siglas NTCC. Existen desde luego otros reglamentos y códigos de construcción para diseño de elementos de concreto, no obstante muchas simplificaciones son similares. Desafortunadamente el reglamento de Puebla no posee aún Normas Técnicas Complementarias.

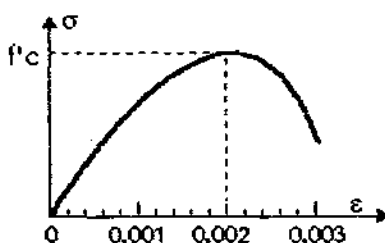
El diseño de una sección por flexión consistirá en la determinación de la cantidad de acero a tensión principalmente, esta cantidad de acero está limitada en ciertos rangos. Cuando la cantidad de acero es reducida y por lo tanto alcanza su fluencia antes de la falla total del miembro, se dice que la sección es subreforzada. Una sección es sobreforzada cuando la cantidad de acero es tal, que el concreto llega a su falla total y el acero no fluye. Este último caso es indeseable, ya que el suponer que una gran cantidad de acero proporciona grandes resistencias es desatinada, ya que el concreto falla por completo y sólo una parte del acero en exceso participa en la resistencia, el restante no sufre daño alguno y no tiene ningún caso colocar acero que no contribuya en nada.

Con lo anteriormente expuesto, se plantean unas hipótesis para calcular el momento resistente interno de la sección, tiene varias hipótesis:

- 1.- Que la distribución de las deformaciones unitarias de la sección transversal de un elemento es lineal. Es decir, que no existen efectos de alabeo por cortante; de acuerdo a la hipótesis de Navier la sección transversal permanece plana aún después de la deformación, que en la práctica es aceptable al tener deformaciones pequeñas.

- 2.- Que se conoce la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del elemento. La gráfica esfuerzo-deformación del concreto a pesar de ser una curva aparentemente simple, no se tiene una ecuación que se ajuste debidamente. Esta razón obliga a sustituir dicha curva por un rectángulo de esfuerzos, que es aceptada por casi todos los reglamentos.
- 3.- No existen desplazamientos relativos entre el concreto y el acero. Significa que el corrugado del acero proporciona adherencia suficiente para que el acero se deforme al mismo tiempo que el concreto.
- 4.- El concreto no resiste esfuerzos de tensión. A pesar de que el concreto tiene una resistencia mínima a tensión del orden del 10 al 15% de la resistencia a compresión, se desprecia su resistencia al ser mínima su aportación.
- 5.- El elemento alcanza su resistencia a cierta deformación unitaria del concreto. Se justifica en el hecho de que a dicha deformación, el concreto presenta su estado límite de falla.
- 6.- La configuración de esfuerzos en la sección se considera que corresponde a un comportamiento elastoplástico.

Una gráfica de esfuerzo deformación típica de un ensaye cilíndrico estandarizado de concreto (15 cm de diámetro y 30 cm de altura) es similar a la que se muestra:



La curva real de esfuerzo deformación muestra claramente el comportamiento plástico del concreto. El punto máximo del esfuerzo resistente a compresión se denomina como f'_c . En la mayoría de los concretos estructurales normalmente usados, cuya resistencia a compresión oscila entre 200 a 400 kg/cm² tienen su resistencia máxima en la deformación unitaria igual a 0.002, en cambio su deformación de falla varía de 0.003 en concretos muy resistentes a 0.004 en concretos más débiles. Como no se tienen disponibles siempre estos resultados, se considera por conveniencia que la deformación unitaria máxima es de 0.003.

No se cuenta con una buena aproximación de la curva real, por lo que muchos reglamentos aceptan como válido el sustituir dicha distribución con un bloque de esfuerzos equivalente.

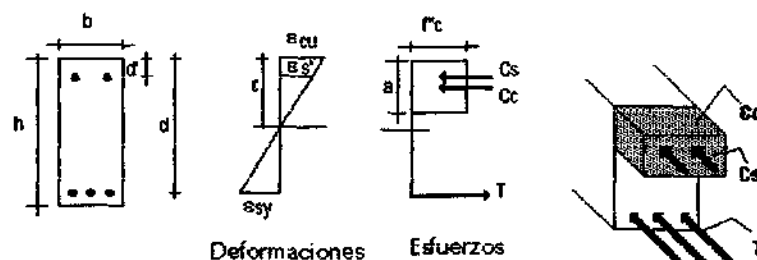
En cuanto al acero, existen en el mercado aceros muy dúctiles con fluencias de 2500 kg/cm² o menores y los llamados de alta resistencia, con fluencias de 4200 y 6000 kg/cm². Para casi todos los aceros, el módulo de elasticidad es el mismo cuyo valor aproximado es de 2,000,000 kg/cm². Los diámetros de varillas disponibles son los siguientes:

Barra Núm	Diámetro		Área cm ²
	Pulg	mm	
2	1/4	6.4	0.31
2.5	5/16	7.9	0.49
3	3/8	9.5	0.71
4	1/2	12.7	1.27
5	5/8	15.9	1.98
6	3/4	19	2.85
7	7/8	22.2	3.88
8	1	25.4	5.07
9	1-1/8	28.6	6.41
10	1-1/4	31.8	7.92
11	1-3/8	34.9	9.58
12	1-1/2	38.1	11.4

Tabla 4.1. Propiedades de las varillas comerciales en México

El varilla del #2 no es corrugada y no se usa para acero de refuerzo. De hecho, comercialmente sólo se pueden encontrar varillas de refuerzo de los números 3,4,5,6,8,10 y 12.

Una vez definidos los datos básicos del concreto y del acero, en la siguiente figura se resumen de manera gráfica las hipótesis planteadas ejemplificando con una sección rectangular doblemente armada:



En donde:

- c = Profundidad del eje neutro.
- a = Profundidad del bloque de esfuerzos del concreto.
- C_c = Fuerza de compresión del concreto.
- C_s = Fuerza del acero en compresión.
- T = Fuerza de tensión del acero.
- ϵ_{cu} = Deformación unitaria máxima del concreto.
- ϵ_{sy} = Deformación unitaria del acero de tensión.
- ϵ_s' = Deformación unitaria del acero en compresión.
- d = Peralte efectivo.

En la configuración de deformaciones se plantea una profundidad del eje neutro c y la deformación unitaria máxima del concreto ϵ_{cu} . Con estos dos valores se traza la configuración lineal mostrada. Dichas deformaciones estrictamente servirían para determinar su valor correspondiente de esfuerzo, pero se sustituye este procedimiento por un bloque de esfuerzos equivalente en el concreto y una configuración elastoplástica para el acero.

Las dimensiones del bloque de esfuerzos quedan definidas por:

a =La profundidad del bloque

f''_c =El esfuerzo equivalente de la resistencia a compresión del concreto

b =Base geométrica de la sección.

Las NTCC establecen el valor de la profundidad del bloque como $a=0.8c$. El valor f''_c corresponde al esfuerzo de compresión uniforme que equivale a la transformación de la resistencia nominal al bloque de esfuerzos, el cual se evalúa como:

$$f''_c = 0.85 f'_c \quad \text{si} \quad f'_c \leq 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$f''_c = \left(105 - \frac{f'_c}{1250} \right) f'_c \quad \text{si} \quad f'_c > 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

(4.6)

En donde $f'_c = 0.8 f'_c$. Esta reducción del 20% en el valor de la resistencia nominal obedece al control estadístico de los ensayos de los cilindros, los cuales muestran que la resistencia en los colados reales pueda disminuir en ese porcentaje respecto de los cilindros. Esto es obvio si se toma en cuenta que las condiciones de muestreo y curado de los cilindros, son diferentes a los del colado.

El peralte efectivo d , además de representar la posición del acero en tensión, significa que ese es el peralte útil de la sección, porque el recubrimiento de concreto debajo del acero de tensión se agrieta y no formaría parte de la sección.

El valor de dicho recubrimiento se determina básicamente:

- Para proteger al acero de agentes corrosivos externos.
- Para confinar el acero en todo su perímetro y hacer efectiva la hipótesis de que el acero se desplaza al mismo tiempo que el concreto.

Procedimiento de cálculo

Es necesario definir dos conceptos que relacionen algunas de las variables, dado que es más fácil trabajar con proporciones que con valores absolutos.

El porcentaje de acero para el caso de flexión se define como:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \text{y} \quad \rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (4.7)$$

Donde:

- ρ = Porcentaje de acero de tensión.
- ρ' = Porcentaje de acero de compresión.
- b = base de la sección.
- d = Peralte efectivo.
- A_s = Área de acero en tensión.
- A_s' = Área de acero en compresión.

Además otro parámetro de gran utilidad es el índice de refuerzo q , el cual se define como:

$$q = \rho \frac{f_y}{f'_c} \quad (4.8)$$

El programa únicamente contempla el diseño de secciones rectangulares por su sencillez geométrica y de cálculo, pero pueden desarrollarse fórmulas para otros tipos de secciones. De este modo se muestra el procedimiento de diseño de una sección rectangular cuyos datos conocidos son el momento último actuante, la geometría de la sección, la resistencia del concreto y la fluencia del acero. El problema entonces consistirá en determinar la cantidad de acero.

La cantidad de acero debe limitarse en un valor mínimo y máximo previstos por las NTCC como porcentajes de acero. Para determinar el acero en tensión, se establece que el refuerzo mínimo deberá ser:

$$\rho_{\min} = 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \quad (4.9)$$

Que es la condición mínima para generar que el momento resistente sea por lo menos 1.5 veces el momento de agrietamiento.

El acero máximo en tensión se fija para construcciones normales y construcciones en zonas sísmicas, cuyos valores respectivamente son:

$$\rho_{\max} = \rho_{\text{bal}} \quad \text{y} \quad \rho_{\max} = 0.75\rho_{\text{bal}} \quad (4.10)$$

En donde ρ_{bal} es la relación balanceada.

Se dice que una sección alcanza su estado de falla balanceada en aquella configuración de deformación donde se alcanza que simultáneamente la deformación máxima útil del concreto y la deformación de fluencia en el acero en tensión. El valor de la relación balanceada se determina como:

$$\rho_{\text{bal}} = \frac{f'_c}{f_y} \frac{0.8 \varepsilon_{cu} E_s}{(f_y + \varepsilon_{cu} E_s)} \quad (4.11)$$

En donde el término nuevo E_s es el módulo de elasticidad del acero. La relación balanceada impone un límite a la cantidad de acero para garantizar el comportamiento dúctil de la sección, por lo tanto, todo refuerzo deberá ser menor al de la relación balanceada para asegurar que la sección sea subreforzada.

Una vez que se tienen definidos los valores mínimos y máximos para el acero en tensión, el siguiente paso es ver si la sección pasa como simplemente armada, es decir, con refuerzo en tensión únicamente.

El momento resistente para una sección simplemente armada se calcula con la expresión:

$$M_R = \phi bd^2 f'_c q (1 - 0.5 q) \quad (4.12)$$

Donde ϕ es el factor de resistencia, que para el caso de flexión es de 0.9. De la expresión anterior se despeja el índice de refuerzo que es la única variable que contiene el valor del área de acero, con lo que se tiene:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{\phi b d^2 f'_c}} \quad (4.13)$$

Posteriormente se calcula el porcentaje de acero con la expresión:

$$\rho = \frac{q f'_c}{f_y} \quad (4.14)$$

Si dicho valor es menor al porcentaje mínimo, se debe dejar el valor mínimo. En caso de que exceda el valor máximo, la sección no pasa como simplemente armada, entonces es necesario colocar acero en compresión.

El cálculo del momento resistente para secciones doblemente armadas no es un proceso sencillo. Este requiere determinar una profundidad del eje neutro de modo que las fuerzas de compresión sean iguales a las de tensión para satisfacer el equilibrio.

En base a los parámetros que intervienen en una sección doblemente armada, se tiene que las fuerzas originadas por el bloque de esfuerzos del concreto, la del acero en compresión y el acero tensión respectivamente son:

$$C_c = 0.8 c f'_c b \quad C_s = \epsilon_s' A_s' E_s \quad T = \epsilon_s A_s E_s \quad (4.15)$$

Y el momento resistente de la sección doblemente armada se calcula como:

$$M_R = \phi \left[C_c \left(\frac{h}{2} - 0.4c \right) + C_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + T \left[\frac{h}{2} - r \right] \right] \quad (4.16)$$

Donde r es el recubrimiento del acero en tensión. Las deformaciones unitarias para los aceros en tensión y compresión respectivamente valen:

$$\epsilon_s = \left(\frac{d}{c} - 1 \right) \quad y \quad \epsilon_s' = \left(1 - \frac{d'}{c} \right)$$

$$\epsilon_s < \epsilon_y \quad \epsilon_s' < \epsilon_y \quad (4.17)$$

Para ambos casos, como el material es elastoplástico, ninguna deformación deberá ser mayor a la deformación de fluencia. En caso que alguna fuera mayor, dicha deformación se ignora y se sustituye la de fluencia. El problema se complica dado que las deformaciones unitarias del acero de tensión y compresión dependen del eje neutro, el cual se tiene que suponer y la condición a cumplir es que:

$$C_c + C_s = T \quad (4.18)$$

Esto impide que se tenga un método directo y se tenga que recurrir a procesos iterativos. Sin embargo, el autor desarrolló una expresión para cuantificar la profundidad del eje neutro que satisface dicho equilibrio, por lo que se puede obtener directamente el acero en compresión.

La expresión desarrollada es aplicable siempre y cuando el acero de tensión sea el máximo permitido por lo que debe fluir, y que para el valor del momento último existe una solución congruente, dicha expresión para calcular el eje neutro es:

$$c = \frac{d' + \sqrt{k}}{0.8} \quad (4.19)$$

Donde

$$k = (d')^2 + \frac{2}{f'_c b} \left(A_s f_y (h - d' - r) - \frac{M_u}{\phi} \right) \quad (4.20)$$

Se tiene una solución si :

$$k > 0 \quad \text{y} \quad c > d'$$

En dado caso de que se pudo encontrar una solución, el área de acero en compresión se obtiene directamente con la expresión:

$$A_s' = \frac{(A_s f_y - 0.8 c f'_c b)}{\epsilon_s' E_s} \quad (4.21)$$

Se puede juzgar si el valor del acero en compresión es adecuado. El acero en compresión debe ser menor al acero de tensión, si es el caso, la cuantificación es correcta y el momento resistente es el igual al momento último. Si no se encuentra una solución para el acero de compresión o el valor encontrado es superior a una fracción del acero en tensión, se dice entonces que la sección no pasa como doblemente armada. Este último caso refleja que las dimensiones de la sección o la resistencia de los materiales son insuficientes para tener la resistencia solicitada sin violar los requisitos de ductilidad, en este caso hay que redefinir una nueva sección, o aumentar la resistencia de los materiales.

La cuantificación de acero en compresión en miembros a flexión se utiliza por comodidad constructiva para poner estribos y para regular deflexiones y no tanto para aumentar la resistencia a flexión. Después de numerosos cálculos se deduce que la contribución es muy reducida.

4.7 Diseño de elementos sujetos a flexocompresión.

Las columnas son los elementos de los edificios que están sujetos a carga axial y flexión, que es lo mismo decir flexocompresión. El problema del diseño a flexocompresión es una extensión del caso de flexión que sin duda, origina complicaciones adicionales. Se explica primero la revisión de una columna sujeta a flexocompresión antes de proceder al diseño.

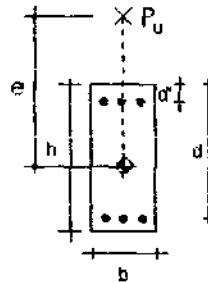
En el caso de flexión en secciones doblemente armadas, se determinó una profundidad del eje neutro de modo que las fuerzas de compresión fueran iguales a las de tensión. Para el caso de la flexocompresión axial, esto es, que actúa una carga con un solo momento flexionante, se tiene que encontrar una profundidad del eje neutro tal que las fuerzas de compresión menos las de tensión sean iguales a la carga axial nominal actuante, y además, que la suma de los momentos provocados por el concreto, el acero en compresión y tensión, sean iguales al momento actuante nominal.

Si se considera el caso más sencillo de flexocompresión axial, el cual posee acero en solo dos caras, se pueden utilizar las mismas fórmulas para flexión para secciones doblemente armadas. Para este caso se desarrolla el procedimiento de diseño.

El momento flexionante puede sustituirse con el concepto de que la carga axial no actúa en el centroide de la sección, sino a una excentricidad de diseño calculada como:

$$e = \frac{M_u}{P_u} \quad (4.22)$$

En la figura se muestra como se considera este concepto y la posición del refuerzo distribuido uniformemente en las dos caras.



Los conceptos de porcentaje de acero e índice de refuerzo para el caso de columnas cambian, ya que la carga axial puede estar en ambos lados del centroide, no se tiene especificado que el peralte efectivo determine el desprendimiento del recubrimiento. La única corrección que es necesaria, ocurre en la fórmula de porcentaje de acero, en vez del peralte efectivo se sustituye el peralte real de la columna, por lo que dicha fórmula para columnas se redefine como:

$$\rho = \frac{A_s}{bh} \quad (4.23)$$

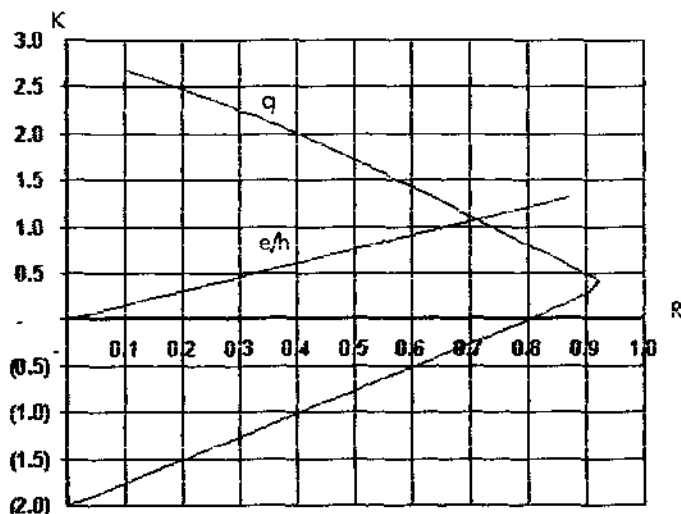
En donde A_s es el acero total de la columna, ignorando si se encuentra en tensión o compresión.

Si se calcularan todas las sumas de fuerzas y los momentos generados para todas las posibles posiciones del eje neutro, desde casi cero, que significa que la columna trabaja únicamente a carga axial, hasta valores superiores al peralte real de la viga, y posteriormente se graficaran en las ordenadas los momentos y en las abscisas las fuerzas, la curva resultante se le conoce como diagrama de interacción.

Los diagramas de interacción adimensionales son útiles para el diseño por gráficas de columnas. Para construir un diagrama de interacción adimensional es necesario dividir los valores de las coordenadas como se indica:

$$K = \frac{P_n}{bh^2f'_c} \quad R = \frac{M_n}{bh^2f'_c} \quad (4.24)$$

Un diagrama adimensional típico se construye para una relación peralte efectivo entre peralte total y para un tipo de colocación de refuerzo. Para el caso de refuerzo en dos caras un diagrama adimensional es similar al que se muestra:



El diagrama de interacción mostrado corresponde para la relación $d/h=0.9$ y un índice de refuerzo $q=2$. Se observa que el punto más alejado en las ordenadas corresponde al punto de falla balanceada, donde el momento resistente es máximo, con esto se advierte que momento resistente de la sección calculado en el caso de flexión corresponde a la raíz del diagrama que no es el momento nominal máximo. Para valores positivos de K se tienen la columna trabaja a flexocompresión y en valores negativos en flexotensión.

Para el problema del diseño se tienen como datos la geometría de la sección, la excentricidad y la carga axial última, entonces es necesario conocer la cantidad de acero que será repartido en las caras.

Las NTCC definen para este caso como porcentaje mínimo el 1% y como máximo el 6%. Además el factor de resistencia se establece en 0.7 para flexocompresión y 0.8 para flexotensión. Además pide como requisito que la excentricidad mínima de diseño sea $0.05h$ a 2 cm.

Para el diseño a flexocompresión es necesario definir una función en términos del eje neutro para un porcentaje dado de acero:

$$f(c) = \frac{\phi \left[C_c \left(\frac{h}{2} - 0.4c \right) + C_s \left(\frac{h}{2} - d' \right) + T \left[\frac{h}{2} - r \right] \right]}{C_c + C_s - T} - e \quad (4.25)$$

Para dicha función se encuentra su raíz mediante el método de Newton-Raphson, con lo que se tiene resuelto el eje neutro para la excentricidad dada. Con la profundidad del eje neutro encontrada, se calcula la suma de fuerzas de compresión, si esta última es mayor o igual que la carga axial de diseño, el valor supuesto del refuerzo es adecuado. Si la suma de compresiones es menor entonces es necesario incrementar el refuerzo, en caso contrario disminuirlo. Inicialmente se resuelve esta ecuación para los valores máximos y mínimos de refuerzo para conocer si la carga de diseño está en el límite posible de resistencia de la sección. Si con un refuerzo de 6% la sección no alcanza la resistencia suficiente, la sección no pasa. En caso de que la resistencia se encuentre dentro de los rangos permitidos, es preferible que las correcciones se hagan mediante interpolaciones sucesivas hasta encontrar la solución final.

Para el caso de flexión biaxial se generan complicaciones aún mayores, se tienen dos excentricidades en vez de una. Esto significa que además de que la suma de fuerzas de compresión sean mayor a la carga de diseño, los momentos se analizan por flexión asimétrica, lo cual implica que además de variar la profundidad del eje neutro, se debe encontrar una inclinación tal que las componentes de los momentos resistentes sean iguales a los de diseño. Si en la revisión este es un problema complejo, para el diseño lo es aún más.

Una forma de librar esta complejidad es usando una aproximación propuesta por Bressler, que establece que la trayectoria de los diagramas de interacción biaxiales pueden ser descritos mediante funciones inversas. La fórmula de Bressler es la que muestra:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} \quad (4.26)$$

Donde las fuerzas axiales involucradas son:

P_n = Fuerza resistente nominal global con excentricidades en x y en y

P_x = Fuerza resistente a una excentricidad en x.

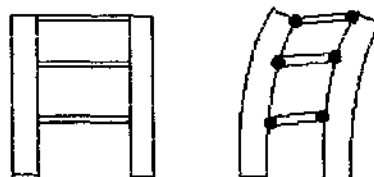
P_y = Fuerza resistente a una excentricidad en y.

P_o = Fuerza resistente a carga axial pura.

La gran ventaja consiste en un problema complejo de flexocompresión biaxial se reduce a dos más simples de flexocompresión axial. Entonces para el diseño en flexocompresión biaxial se requerirá diseñar el acero para las cuatro caras de la columna, tomando dos a la vez. Es válido hacer la suposición que el acero en una dirección no participa en la resistencia para la otra dirección.

4.6 Conclusiones.

Sólo se consideran en la revisión de deformaciones las deflexiones horizontales y verticales de los miembros, ambas consideradas en los reglamentos de Puebla y el D.F. En cuanto a los giros permisibles, que son las deformaciones permisibles por determinar, se debe recurrir a estudios específicos. Un caso claro de cuando revisar los giros permisibles es cuando se presenta una articulación plástica, fenómeno que ocurre en el concreto reforzado por su naturaleza plástica. Dicha articulación se genera porque la configuración de deformación en un punto crítico donde exista una carga concentrada, sobrepasa fácilmente el límite de fluencia y prácticamente el miembro se desliga de la estructura, que en forma literal, "se parte" el miembro en dicho punto. En la figura se muestra un caso en que generan articulaciones plásticas en las uniones de columnas sumamente rígidas con traveses de unión de dimensiones reducidas.



La distorsión angular es una buena medida para la revisión de un estado límite de servicio ante deformaciones laterales, sobre todo que ante la acción de un sismo, grandes desplazamientos en las oscilaciones en niveles altos provocan pánico a sus ocupantes. Por otra parte las deflexiones deben calcularse a largo plazo, dado que existe escurrimiento plástico del concreto.

Se menciona claramente que el análisis de segundo orden no contempla la falta de verticalidad por errores constructivos de la estructura. El efecto de un análisis de segundo orden es notorio cuando los desplazamientos exceden los límites dispuestos por los reglamentos y cuando se trata de estructuras con cierta irregularidad y en marcos de gran altura.

Después de numerosos diseños de secciones sometidas a flexión, la aportación del acero de compresión a la resistencia total de la sección es muy reducida, incluso se puede ignorar del diseño el acero de compresión y calcular la resistencia de la sección como simplemente armada con un resultado un poco conservador. Con esta observación, si el momento resistente de la sección simplemente armada con el acero máximo permitido es notoriamente inferior al momento último, se puede dar por hecho que la sección es insuficiente.

Para el caso de miembros a flexocompresión inevitablemente se recurrieron a simplificaciones, ya que si el proceso de revisión es complicado, el diseño agrega una incógnita más. La fórmula de Bressler propuesta como alternativa es válida para valores de P_n mayores que $0.1 P_o$. Los ensayos disponibles de flexocompresión verifican la bondad de la fórmula de Bressler con un error probable máximo del 20%.

Capítulo V.

Conclusiones y Recomendaciones.

A lo largo del presente trabajo se desarrollaron muchos aspectos de suma importancia al utilizar los métodos de análisis y diseño para edificios tridimensionales. Estos métodos son sin duda alguna de gran utilidad, unos más directos que otros, pero todos ellos desarrollados con el fin de proporcionar las herramientas mínimas suficientes para analizar y diseñar un edificio de concreto reforzado.

Lo que más preocupa a un proyectista es la confiabilidad de los resultados que cualquier método o programa proporcione. Dicha confiabilidad dependerá de la validez del método utilizado y de la capacidad misma del método plasmado en un programa. Si durante el desarrollo de los métodos se contaran las palabras "simplificación", tal vez sería una cantidad nada despreciable. La pregunta obligada entonces sería: ¿Que tan cercanos serán los resultados respecto a la realidad?, solamente se puede responder que es muy variable.

No hay que perder de vista que el diseño estructural es tan solo una parte en el complejo proceso de la construcción de un edificio donde el estructurista tiene que interactuar activamente con el diseñador arquitectónico y los constructores para lograr que los criterios que el estructurista utilizó para calcular la respuesta del edificio se hagan conforme a las especificaciones.

Incluso el mismo usuario puede participar en el mal comportamiento de un edificio con inminente riesgo. Son muchos los casos que se presentan en que el simple hecho de ver una edificación aparentemente resistente sugiere a los usuarios darle los usos que más le convengan sin meditar que el diseño de dicha edificación se realizó para un solo uso. Así pues se pueden encontrar bodegas improvisadas en edificios destinados a oficinas. Aunque el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal en su artículo 201 responsabiliza al propietario o poseedor del inmueble del riesgo generado por cargas adicionales debidas al cambio de uso. Esta medida aunque libera al estructurista de responsabilidad, el estructurista está en obligación moral de proporcionar los valores máximos de carga.

Aunque varios de las recomendaciones se han marcado expresamente en las conclusiones de cada capítulo, vale la pena sin embargo, retomar algunos conceptos muy importantes. Primero se comentarán las conclusiones sobre el método de rigidez. El método se basa en el comportamiento más simple de los cuerpos deformables, es decir, solo considera el análisis lineal. Dicho método se considera como "exacto" porque pese a sus simplificaciones e hipótesis proporciona un resultado directo. Para modelar un edificio tridimensional no hay mejor opción de recurrir a un método directo como es el método de rigidez tridimensional. La ventaja de recurrir a un método directo es que precisamente se tienen los valores deseados, aunque hay que buscar detenidamente entre un cúmulo de información.

Los tópicos adicionales del método de rigidez que no se cubren en el presente trabajo por razones de tiempo son:

- Barras con sección variable.
- Desplazamientos de los apoyos.

- Articulaciones en las barras.
- Apoyos elásticos.
- Conexión elásticas en los nodos de las barras.
- Deformaciones previas.
- Discontinuidades en las barras.
- Degradación de la rigidez por ciclos de carga.
- Interacción entre fuerza axial y flexión.

De los cuales algunos de ellos son de uso cotidiano en el proceso de análisis.

El método de rigideces puede adaptarse fácilmente para generar los estados de carga sísmica y realizar las combinaciones correspondientes. Asimismo mediante numerosas operaciones con vectores se puede incorporar el análisis de segundo orden o P-Delta.

En cuanto al uso del método de rigidez hay que tener siempre en mente que .

- 1.- El método considera solo el comportamiento lineal de los materiales.
- 2.- Solo es aplicable a estructuras reticulares.

Ahora continuando con el análisis sísmico es en este punto donde se tienen muchas incertidumbres las cuales hay que manejarlas con cautela. Un punto muy delicado es el correspondiente al amortiguamiento. Los espectros de diseño que proporciona el Reglamento del Distrito Federal no especifica de manera clara que el porcentaje de amortiguamiento corresponde al 5%. En dado caso que el amortiguamiento de la estructura fuese menor, entonces los datos del espectro no servirían, pues se amplifican de manera drástica la respuesta. Una manera intuitiva de conocer a priori el amortiguamiento de la estructura, es revisando que condiciones cumplen con el factor de comportamiento sísmico más alto. Aunque esto no signifique una garantía de comportamiento.

Los criterios básicos a seguir en la evaluación de la respuesta sísmica son .

- Conseguir la mayor regularidad posible. Es notorio que los cambios bruscos de rigideces o de masas aumentan sustancialmente la respuesta sísmica. El hecho de reducir en un 20% el factor de comportamiento sísmico, no asegura que los resultados proporcionados por el análisis sean los correctos. Esta es casi una regla de oro para lograr el comportamiento dúctil más adecuado.
- Asegurarse que las condiciones del suelo local correspondan en lo más cercano a las condiciones dispuestas en los espectros.
- Hacer que todos los elementos resistentes participen en la disipación de energía del sismo, hay que evitar a toda costa elementos o conjunto de elementos que sean punto de atracción del sismo.
- El efecto sísmico es mayor en el punto más débil.
- El criterio al diseñar bajo la acción del sismo consistirá en que la estructura sea rígida, pero que tenga un modo de falla frágil.

En la revisión de los estados límite de servicio sólo se considera los desplazamientos horizontales y verticales, cuando en realidad existen algunos problemas con rotaciones en exceso que provocan articulaciones plásticas principalmente. Para el análisis de segundo orden se deben verificar que el número de iteraciones no sea elevado, pues esto significa que la estructura tiene indicios de inestabilidad. Otro parámetro que puede servir para juzgar la inestabilidad de la estructura, es que la corrección de las fuerzas ficticias no sean significativamente mayores a las originales.

En la parte del diseño es donde los programas no juegan un papel determinante, pues se pueden desarrollar los diseños manualmente con procedimientos más sencillos sin

gran error en la aproximación, pero un programa puede simplificar bastante la labor de cálculo, sobretodo cuando existen muchas secciones.

Sólo se debe recordar que la contribución del acero en compresión a la resistencia total de un miembro sometido a flexión es muy escueta. Incluso se puede ignorar en su diseño, obteniéndose valores un poco más del lado de la seguridad.

El problema de diseño de elementos a flexocompresión es muy notoria, en estos casos si se requiere de la ayuda de un programa. Como una parte del proyecto es la determinación del refuerzo para un gran número de secciones, es también deseable recurrir a hipótesis simplificadoras, no por justificar que se desperdicia el potencial de un programa sino que aún en una computadora el diseño de miembros a flexocompresión por la compatibilidad de deformaciones es lento.

Un punto clave que algunas veces se puede llegar a cometer es que se debe evitar mezclar los criterios de distintos reglamentos, aunque supuestamente unos aspectos parezcan más desfavorables que otros, el mismo reglamento compensa sus propias deficiencias, en otras palabras, lo que sobra en un lado, lo quitan en otro.

Para finalizar se toman algunos aspectos sobre los programas de ayuda en el análisis y diseño. Un programa debe ser lo suficientemente flexible que le permita al usuario conocer qué es lo que está pasando en su interior, es muy arriesgado confiar en los resultados de un programa cuando estos, por la enorme automatización en los algoritmos aparecen casi por arte de magia. Si el usuario no conoce las limitaciones y alcances que intrínsecamente genera el programa, el proyectista no podrá juzgar si los resultados son los esperados. Un programa muy automatizado deja muchas dudas en cuanto si utilizó un método aproximado o uno directo.

Para finalizar la parte escrita de este trabajo, se deja una conclusión final a manera de reflexión, cualquier método o programa de computadora no puede ni podrá aun teniendo los algoritmos y métodos más actualizados, suplir el buen juicio y criterio que en condiciones anormales el ingeniero civil es capaz de discernir.

REFERENCIAS

a) BIBLIOGRAFÍA.

1. "Análisis de estructuras", Harry H. West, Ed. CECSA, 1ª Edición, México DF, 1984.
2. "Fundamentals of structural Analysis", Kenneth M. Leet, Ed. Prentice Hall, 1ª Edición, 1988.
3. "Structural Dynamics an introduction to computer methods", Roy R. Craig, Jr, Ed. John Wiley & sons. 1ª Edición.
4. "Estructuras de acero, comportamiento y diseño", Oscar de Buen Heredia, Ed. Limusa, 1ª edición, 1980, México.
5. "Aspectos fundamentales del Concreto Reforzado", Oscar González Cuevas, 3ra edición, Editorial Limusa, Mexico. 1992.
6. "Theory of Elasticity", Stephen Timoshenko, & J.N. Goodier; Third Edition; Ed. Mc. Graw Hill, Caíssic Textbook Reissue Series, 1970, New York NY
7. "Introducción a la Mecánica de Sólidos", Egor Popov; 1ra edición, Ed. Limusa, México, DF. 1976
8. "Strength of materials", Stephen Timoshenko, Dover Publicartions Inc. Nueva York, NY. 1983.
9. "Mecánica de materiales", Stephen Timoshenko & James Gere, Segunda Edición; Grupo Editorial Iberoamérica, México DF, 1986
10. "Manual de diseño sísmico de edificios", Enrique Bazán Zurita y Roberto Meli Piralla, Primera edición, Editorial Limusa, México DF, 1985.
11. "Configuración y diseño sísmico de edificios", Arnold Reitherman, Primera Edición, Editorial Limusa, Mexico DF, 1987.
12. "Análisis de Estructuras reticulares", James Gere y William Weaver", Primera Edición, Compañía editorial Continental, México DF. 1965.
13. "Diseño estructural", Roberto Meli Piralla, Primera Edición, Editorial Limusa, México DF, 1995.
14. "The theory of matrices in numerical Analysis ", Alston S. Householder, Blais Dell Publishing Co. 1ª edición, 1964.
15. "Métodos numéricos", E.A. Volkov, Ed. MIR, Moscú., 1987.
16. "Reglamento de Contrucciones para el Distrito Federal"; Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.
17. "Normas Técnicas Complementarias para Diseño de Concreto", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.

18. "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por sismo", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.
19. "Normas Técnicas Complementarias para Diseño por viento", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, 1987.
20. "Estructuras de concreto reforzado", Robert Park & T. Paulay, Ed. Limusa, 1ª edición, México.
21. "Diselo de estructuras resistentes a sismos", Emilio Rosenblueth, IMCYC, 1992, 1ª Edición, México.
22. "Reglamento de construcciones para el municipio de Puebla", Periódico Oficial del Estado, 2 de diciembre de 1994.

b) REVISTAS

1. "Journal of Structural Division", American Society of Civil Engineers, New York, Issue May 1968
2. "Journal of Structural Division", American Society of Civil Engineers, New York, Issue Apr 1970
3. "Journal of Structural Division", American Society of Civil Engineers, New York, Issue Jun 1972.
4. ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Detroit , MI, Issue May-Abr 1996.
5. ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Detroit , MI, Issue Ene-Feb 1995.
6. ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Detroit , MI, Issue Mar-Abr 1997.
7. Concrete International, American Concrete Institute, Detroit , MI, Issue May 1996.
8. Concrete International, American Concrete Institute, Detroit , MI, Issue Ene 1997.

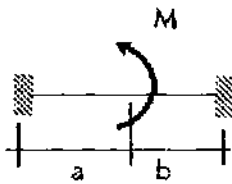
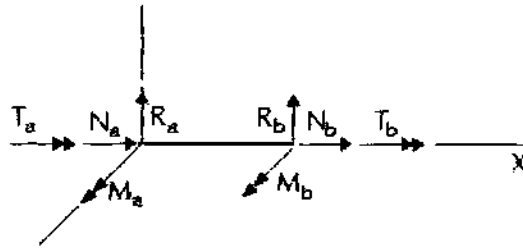
c) SOFTWARE

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. MAPgc, Versión de evaluación 1992, | Ing. Gerardo Corona Carlos. |
| 2. ECOgc, Versión Profesional, 1991, | Ing. Gerardo Corona Carlos. |
| 3. DIMA, Versión de evaluación, 1990, | Ing. Miguel Echeagaray Ladrón de Guevara. |
| 4. ASDIgc, versión profesional, 1990 | Ing. Gerardo Corona Carlos. |
| 5. AN16-Demo, 1997 | Ing. Frank Cuylaerts, Anwerp Bélgica. |

d) OTRAS REFERENCIAS.

1. Apuntes del "Curso internacional de ingeniería sísmica", Ing. Ramón Cervantes Beltrán. División de educación continua, Facultad de Ingeniería Civil de la UNAM.
2. Apuntes "Curso de Análisis Estructural", Ing. Jaime Juárez Botello.

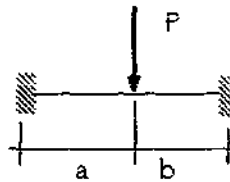
Apéndice A. Tabla de reacciones en los empotramientos



$$R_a = -R_b = \frac{6Mab}{L^3}$$

$$M_a = \frac{Mb}{L^2}(2a-b)$$

$$M_b = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$$

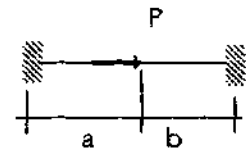


$$R_a = \frac{Pb^2}{L^3}(3a+b)$$

$$R_b = \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b)$$

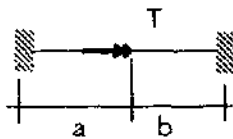
$$M_a = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$M_b = -\frac{Pba^2}{L^2}$$



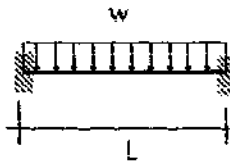
$$N_a = -\frac{Pb}{L}$$

$$N_b = -\frac{Pa}{L}$$



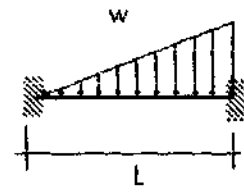
$$T_a = -\frac{Tb}{L}$$

$$T_b = -\frac{Ta}{L}$$



$$R_a = R_b = \frac{wL}{2}$$

$$M_a = -M_b = \frac{wL^2}{12}$$



$$R_a = \frac{3wL}{20}$$

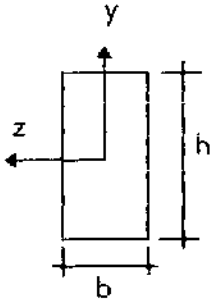
$$R_b = \frac{7wL}{20}$$

$$M_a = \frac{wL^2}{30}$$

$$M_b = -\frac{wL^2}{20}$$

Apéndice B. Propiedades de secciones transversales.

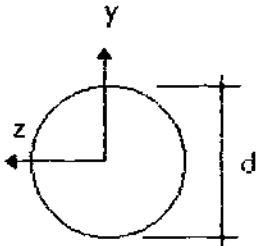
1.- Rectangular



$$A = bh \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad J = \beta hb^3$$

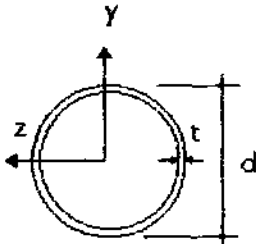
$$\beta \approx \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \quad f_y = f_z = 12$$

2.- Circular



$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad J = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad f_y = f_z = \frac{10}{9}$$

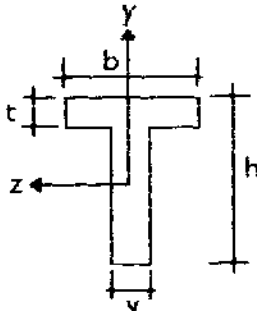
3.- Tubular.



$$A = \pi t(d-t) \quad I_y = I_z = \frac{\pi}{64} [d^4 - (d-t)^4]$$

$$J = \frac{\pi}{32} [d^4 - (d-t)^4] \quad f_y = f_z = 2$$

4.-Sección "T"



$$Q = bt(h - 0.5t) + \frac{v(h-t)^2}{2} \quad A = bt + v(h-t)$$

$$J \approx \frac{0.3hv^3}{1 + \left(\frac{v}{h}\right)^2} + \frac{0.3(b-v)t^3}{1 + \left(\frac{2t}{b-v}\right)^2} \quad I_y = \frac{tb^3 + (h-t)v^3}{12}$$

$$I_z = bt \left(h - \frac{Q}{A} - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{bt^3}{12} + v(h-t) \left(\frac{Q}{A} - \frac{h-t}{2} \right)^2 + \frac{v(h-t)^3}{12}$$



$$f_z = \frac{2A(s_1 + s_2)}{I_y^2}$$

Donde:

$$s_1 = \frac{t}{16} \left[\frac{b^5}{15} + \frac{1}{4} v \left(\frac{b^2 v^2}{3} - \frac{b^4}{2} - \frac{v^4}{10} \right) \right] \quad s_2 = \frac{1}{16} \left(\frac{h v^5}{15} + \frac{t v^3}{6} (b^2 - v^2) - \frac{v t^2}{8 h} (b^2 - v^2)^2 \right)$$

$$f_y = \frac{A(o_1 + o_2 + o_3)}{I_z^2}$$

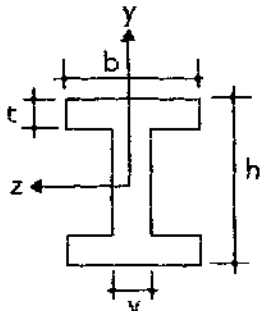
Donde:

$$o_1 = \frac{2v(Q)}{15} \left(\frac{Q}{A} \right)^5 \quad o_2 = d \left(\frac{c^2}{v} + c d^2 + \frac{v d^4}{4} \right) - d^3 \left(\frac{c}{3} + \frac{d^2 v}{6} \right) + \frac{v d^5}{20}$$

$$o_3 = \frac{2b e^5}{15} - \frac{b}{4} \left(e^4 d - \frac{2}{3} e^2 d^3 + \frac{d^5}{5} \right)$$

$$c = b t \left(h - \frac{Q}{A} - \frac{t}{2} \right) \quad d = \left(h - \frac{Q}{A} - t \right) \quad e = \left(h - \frac{Q}{A} \right)$$

5.- Sección "I"



$$A = 2bt + v(h - 2t)$$

$$I_z = \frac{bt^3}{6} + \frac{bt(h-t)^2}{2} + \frac{v(h-2t)^3}{12}$$

$$I_y = \frac{tb^3}{6} + \frac{(h-2t)v^3}{12}$$

$$J \approx \frac{0.3hv^3}{1 + \left(\frac{v}{h}\right)^2} + \frac{0.6(b-v)t^3}{1 + \left(\frac{2t}{b-v}\right)^2}$$

$$f_z = \frac{A(4s_1 + 2s_2)}{I_y^2}$$

Donde:

$$s_1 = \frac{t}{16} \left[\frac{b^5}{15} + \frac{1}{4} v \left(\frac{b^2 v^2}{3} - \frac{b^4}{2} - \frac{v^4}{10} \right) \right] \quad s_2 = \frac{1}{16} \left(h - \frac{v^5}{15} + \frac{t v^3}{6} (b^2 - v^2) - \frac{v t^2}{8 h} (b^2 - v^2)^2 \right)$$

$$f_y = \frac{2A(o_1 + o_2)}{I_z^2}$$

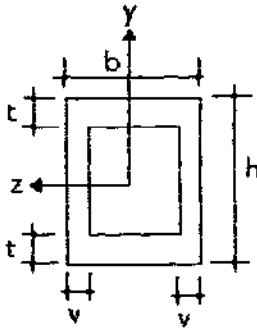
Donde:

$$o_1 = d \left(\frac{c^2}{v} + cd^2 + \frac{vd^4}{4} \right) - d^3 \left(\frac{c}{3} + \frac{d^2v}{6} \right) + \frac{vd^5}{20}$$

$$o_2 = \frac{2be^5}{15} - \frac{b}{4} \left(e^4d - \frac{2}{3}e^2d^3 + \frac{d^5}{5} \right)$$

$$c = bt \left(\frac{h-t}{2} \right) \quad d = \left(\frac{h}{2} - t \right) \quad e = \frac{h}{2}$$

6.- Cajón



$$A = 2bt + 2v(h-2t) \quad J \approx \frac{2b^2h^2tv}{bv+ht} \quad I_y = \frac{hb^3}{6} + \frac{hv(b-v)^2}{2} + \frac{t(b-2v)^3}{6}$$

$$I_z = \frac{bt^3}{6} + \frac{bt(h-t)^2}{2} + \frac{v(h-2t)^3}{6} \quad f_z = \frac{2A(s_1 + s_2)}{I_y^2}$$

Donde:

$$s_1 = d \left(\frac{c^2}{v} + cd^2 + \frac{vd^4}{4} \right) - d^3 \left(\frac{c}{3} + \frac{d^2v}{6} \right) + \frac{vd^5}{20}$$

$$s_2 = \frac{2be^5}{15} - \frac{h}{4} \left(e^4d - \frac{2}{3}e^2d^3 + \frac{d^5}{5} \right)$$

$$c = bt \left(\frac{h-t}{2} \right) \quad d = \left(\frac{h}{2} - t \right) \quad e = \frac{h}{2}$$