



**UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE PUEBLA**

MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS

*MODELACIÓN CON ELEMENTO FINITO
DE SISTEMAS EMBALSE – CORTINA
USANDO FRONTERAS DE RADIACIÓN*

**Trabajo de investigación
que para obtener el grado de**

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

Presenta:

CÉSAR VERA MENDOZA

Puebla, Pue.

Junio de 1999



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyła**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Noviembre 18, 1998

Mtro. Gerardo de Jesús López Arciga
Coordinador de la Maestría en Estructuras
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
Presente

Estimado Mtro. López Arciga:

Por este conducto le informo que el **Ing. Cesar Vera Mendoza** concluyó satisfactoriamente la realización de su tesis *Modelación con elemento finito de sistemas embalse-cortina usando fronteras de radiación*. Los objetivos y alcances de dicha tesis fueron cubiertos plenamente, cumpliendo con los estándares de calidad requeridos para la obtención del grado de maestro en estructuras.

Sin otro particular me despido de Usted afectuosamente y estoy a sus órdenes para cualquier información adicional.

Atentamente



Dr. Javier Avilés López
Investigador Nacional

A mi familia

A mis profesores

A Javier A. L.

*Agradezco sinceramente al
Dr. Javier Avilés López, su
bondadosa y valiosa asesoría*

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	ii
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO II	
RESUMEN DE ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA. CONDICIONES DE FRONTERA	9
II.1 Simbología.	10
II.2 Ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica.	10
II.3 Condiciones de frontera.	15
CAPÍTULO III	
ANÁLISIS DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN	19
III.1 Fronteras de radiación.	20
CAPÍTULO IV	
DESARROLLO TEÓRICO DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN	27
IV.1 Desarrollo de la frontera de radiación que considera el oleaje.	28
IV.2 Desarrollo de la frontera de radiación que considera la flexibilidad del fondo.	42
IV.3 Desarrollo de la frontera de radiación que considera el oleaje y la flexibilidad del fondo.	54
CAPÍTULO V	
FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	68
CONCLUSIONES	75
REFERENCIAS	76

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	ii
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO II	
RESUMEN DE ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA. CONDICIONES DE FRONTERA	9
II. 1 Simbología.	10
11.2 Ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica.	10
11.3 Condiciones de frontera.	15
CAPÍTULO III	
ANÁLISIS DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN	19
III. 1 Fronteras de radiación.	20
CAPÍTULO IV	
DESARROLLO TEÓRICO DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN	27
IV. 1 Desarrollo de la frontera de radiación que considera el oleaje.	28
IV.2 Desarrollo de la frontera de radiación que considera la flexibilidad del fondo.	42
IV.3 Desarrollo de la frontera de radiación que considera el oleaje y la flexibilidad del fondo.	54
CAPÍTULO V	
FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	68
CONCLUSIONES	75
REFERENCIAS	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. I.1	Coeficiente de presión en líquidos incompresibles en $x / H = 0, 0.5, 1$ y 2	3
Fig. I.2	Coeficiente de presión en líquidos compresibles en $x / H = 0$ para $\Omega = 1, 3$ y 6	5
Fig. I.3	Coeficiente de presión en líquidos compresibles en $y / H = 0.5$ para $\Omega = 1, 3$ y 6	5
Fig. III.1	Efecto de la ubicación de la frontera de radiación y de la frecuencia excitadora en el parámetro α en $L / H = 0.5$ y 1 para $\Omega = 1, 3$ y 6	23
Fig. III.2	Efecto de la localización de la frontera de radiación y de la frecuencia excitadora en el parámetro β en $L / H = 0.5$ y 2 para $\Omega = 1, 3$ y 6	24
Fig. III.3	Efecto de la ubicación de la frontera de radiación en los parámetros α y β en $y / H = 0.5$ para $\Omega = 1, 3$ y 6	24
Fig. IV.1	Condiciones de frontera que consideran el oleaje	29
Fig. IV.2	Gráfica de la ecuación trascendente	35
Fig. IV.3	Comparación entre los coeficientes de presión que consideran la compresibilidad del agua y los que consideran además el oleaje en $L / H = 0$ y 1 para $\Omega = 1$	37
Fig. IV.4	Efecto del oleaje en los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β en $L / H = 0.5$ y 1 para $\Omega = 3$ y 6	40
Fig. IV.5	Comportamiento de los parámetros a) α y b) β que consideran el oleaje en función de la ubicación de la frontera de radiación en $y / H = 0.5$ para $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5$ y 6	41
Fig. IV.6	Condiciones de frontera que consideran la flexibilidad del fondo	43
Fig. IV.7	Comparación entre los coeficientes de presión que consideran el oleaje con los que consideran la flexibilidad del fondo en $L / H = 0$ y 1 para $\Omega = 1$ y $\alpha_r = 0.75$	50
Fig. IV.8	Comparación entre los coeficientes de presión que consideran el oleaje y los que consideran la flexibilidad del fondo en $L / H = 0$ para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3, 6$	50

- Fig. IV.9 Parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran el oleaje y la flexibilidad para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3$ y 6 en $L/H = 0.5$ y 1 52
- Fig. IV.10 Comportamiento de los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran la flexibilidad en función de la ubicación de la frontera de radiación para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5$ y 6 en $y/H = 0.5$ 53
- Fig. IV.11 Condiciones de frontera que consideran el oleaje y la flexibilidad del fondo 55
- Fig. IV.12 Comparación entre los coeficientes de presión que consideran oleaje y flexibilidad con los que consideran solo flexibilidad para $\Omega = 1$ y $\alpha_r = 0.75$ en $L/H = 0$ y 1 62
- Fig. IV.13 Comportamiento del coeficiente de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo en función de la ubicación de la frontera de radiación en $y/H = 0.5$ para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 1, 3, 5$ y 6 62
- Fig. IV.14 Comparación entre los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran la flexibilidad y el oleaje con flexibilidad en $L/H = 0.5$ y 1 para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3$ y 6 64
- Fig. IV.15 Comportamiento de los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran el oleaje y flexibilidad en función de la ubicación de la frontera de radiación para $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5$ y 6 y $\alpha_r = 0.75$ en $y/H = 0.5$ 65
- Fig. IV.16 Gráficas para determinar el coeficiente de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo en $L/H = 0$ para $\alpha_r = 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.9
a) $\Omega = 1$ b) $\Omega = 2$ c) $\Omega = 3$ 66
- Fig. IV.17 Gráficas para determinar el coeficiente de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo en $L/H = 0$ para $\alpha_r = 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.9
a) $\Omega = 4$ b) $\Omega = 5$ c) $\Omega = 6$ 67
- Fig. V.1 Condiciones de frontera que consideran el oleaje y la flexibilidad del fondo 70

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

A principios de siglo se inició la construcción de presas relativamente grandes en zonas de alta sismicidad. Esto planteó nuevos problemas a los ingenieros diseñadores para garantizar su seguridad ante la acción de cargas sísmicas importantes.

Durante un sismo se incrementan notablemente los esfuerzos en el material que forma el cuerpo de la cortina. Este incremento tiene dos causas: la primera son las fuerzas de inercia debidas a las aceleraciones de la propia cortina y la segunda es la presión hidrodinámica, adicional a la presión hidrostática, que aparece como respuesta del agua almacenada a la acción del sismo. En el presente trabajo se estudiará precisamente este efecto.

El estudio más simple de la presión hidrodinámica se hizo sobre la base de las siguientes hipótesis: el flujo es irrotacional e invíscido; la cortina es rígida y su paramento mojado es vertical; la base de la cortina es rígida y horizontal, la longitud del embalse es infinita y la excitación es armónica, horizontal y de pequeña amplitud [2]. Bajo estas hipótesis y resolviendo la ecuación de Laplace, ecuación (II.10), se puede deducir la siguiente expresión para calcular la presión hidrodinámica

$$p = 2\ddot{x}_0 \rho H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n \frac{x}{H}} \cos(\lambda_n \frac{y}{H}) \quad (I.1)$$

donde:

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (I.2)$$

En esta expresión, x y y son las coordenadas cartesianas, H es la profundidad del agua en el embalse, ρ es la densidad del agua, \ddot{x}_0 es la aceleración del terreno y p es la presión hidrodinámica.

Por facilidad, se acostumbra calcular la presión hidrodinámica con la siguiente expresión:

$$p = \gamma H \frac{\ddot{x}_0}{g} C_p = \gamma H C_s C_p$$

donde γ es el peso específico del agua, C_s es el coeficiente sísmico y C_p es el coeficiente de presión.

El coeficiente de presión se puede interpretar como la relación entre la presión hidrodinámica y la presión hidrostática en la base afectada por el coeficiente sísmico, y es igual a

$$C_p = \frac{p}{\gamma H C_s} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n \frac{x}{H}} \cos \lambda_n \frac{y}{H} \quad (I.3)$$

En la figura I.1 se muestra el comportamiento del coeficiente de presión C_p . En ella se observa que la presión hidrodinámica máxima se encuentra en el fondo del paramento de la cortina y es igual a $p_{max} = 0.743 \gamma H C_s$. El empuje hidrodinámico que

actúa sobre cada metro de ancho del paramento vertical de la cortina se encuentra fácilmente integrando la ecuación (I.1) y es igual a $0.543 \gamma H^2 C_s$.

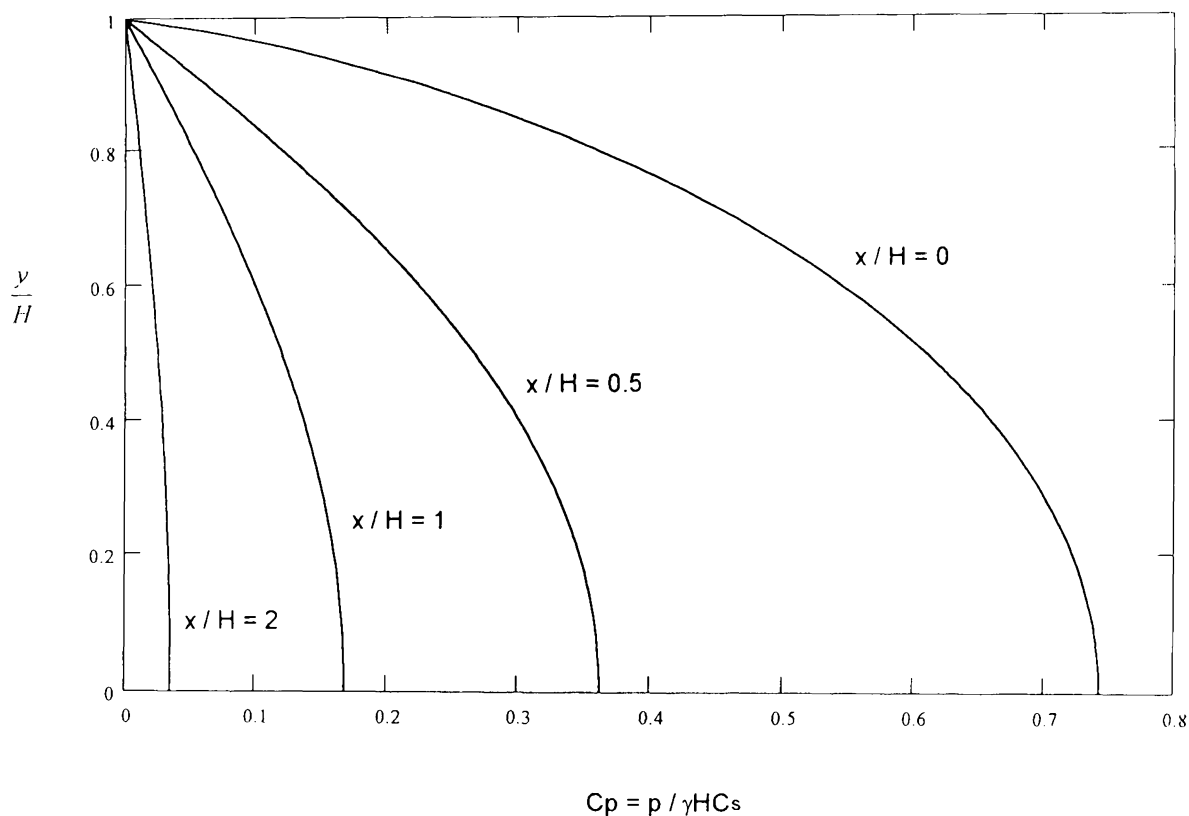


Fig. I.1 Coeficiente de presión en líquidos incompresibles en $x/H = 0, 0.5, 1$ y 2

En la misma figura I.1 se observa también que la presión hidrodinámica disminuye rápidamente al alejarse de la cortina, y a una distancia del orden de tres veces la profundidad del embalse, la presión prácticamente desaparece.

En el año de 1933 Westergaard [1] publicó el primer trabajo científico que tuvo importancia práctica y que representa la piedra angular en las investigaciones en esta área. Westergaard presentó una expresión para calcular la presión hidrodinámica considerando la compresibilidad del agua.

En su forma actual, la expresión para calcular la presión dinámica considerando la compresibilidad del agua se deduce al resolver la ecuación de Helmholtz, ecuación (II.9) tomando en cuenta las mismas hipótesis mencionadas anteriormente pero considerando adicionalmente la compresibilidad del líquido. Esta expresión se escribe como [2]

$$p = 2\ddot{x}_0 \rho H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n \lambda_n} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos(\lambda_n \frac{y}{H}) \quad (I.4)$$

donde:

$$\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2} \quad (I.5)$$

y

$$\Omega = \frac{\omega H}{c} \quad (I.6)$$

En esta última expresión ω es la frecuencia circular de la excitación, c es la velocidad de las ondas de compresión en el agua, $c = 1438 \text{ m/s}$, Ω es la frecuencia excitadora normalizada y λ_n se calcula con la fórmula (I.2).

Análogamente al caso anterior, la ecuación (I.4) se puede expresar en la siguiente forma

$$p = \gamma H C_s C_p \quad (I.7)$$

donde ahora el coeficiente de presión C_p se determina por la siguiente ecuación:

$$C_p = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n \lambda_n} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos(\lambda_n \frac{y}{H}) \quad (I.8)$$

De las ecuaciones anteriores resulta evidente que el coeficiente de presión depende de la frecuencia de la excitación Ω , y que en general es una cantidad compleja. En las figuras I.2 y I.3 se muestra el comportamiento de este coeficiente para distintos valores de Ω .

En la figura I.2 se observa que para frecuencias excitadoras mayores que la frecuencia fundamental del embalse ($\Omega > \pi/2$) los valores del coeficientes de presión son mucho menores que los correspondientes a frecuencias más pequeñas que la fundamental del embalse ($\Omega < \pi/2$). De aquí se puede concluir que los modos superiores de vibración tienen poca importancia, como era de esperarse.

Por otro lado en la figura I.3 se ve claramente que para frecuencias excitadoras $\Omega < \pi/2$ el coeficiente de presión tiende a disminuir rápidamente al aumentar la distancia x . Así, para una distancia $x = 3H$ el coeficiente de presión es prácticamente igual a cero, es decir a esta distancia la presión hidrodinámica se desvanece como consecuencia de la radiación de las ondas de presión.

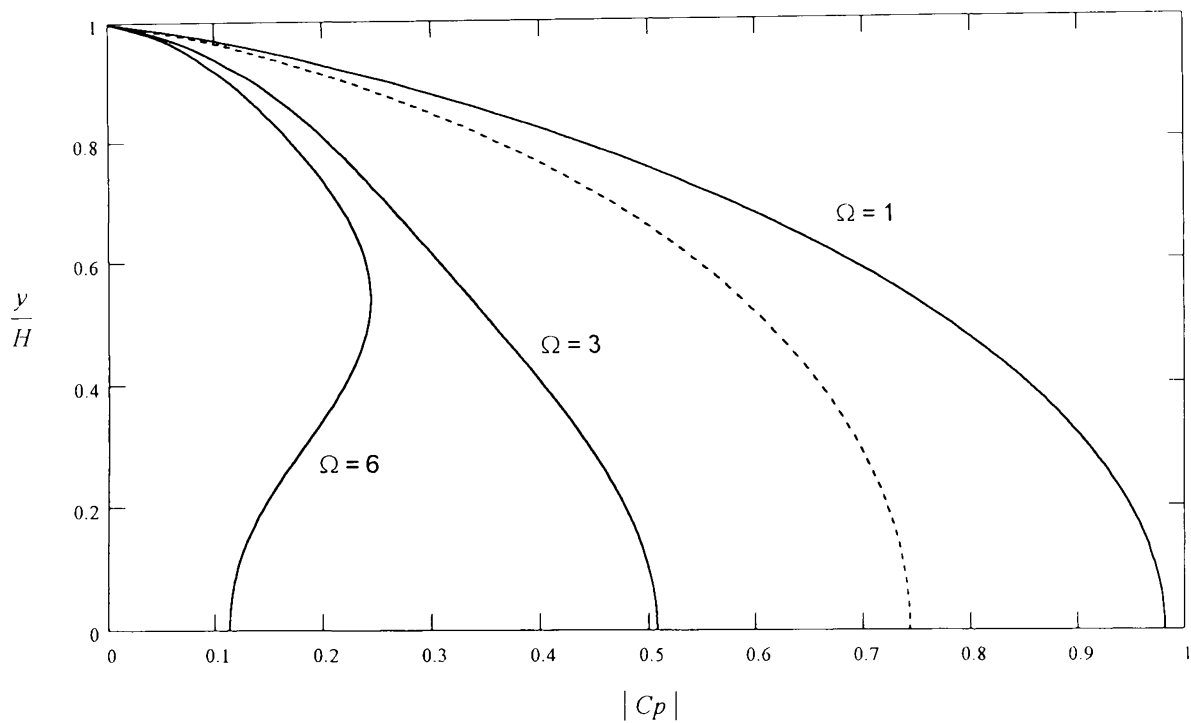


Fig. 1.2 Coeficiente de presión en líquidos compresibles en $x/H = 0$ para $\Omega = 1, 3$ y 6
 coeficiente de presión para líquidos incompresibles

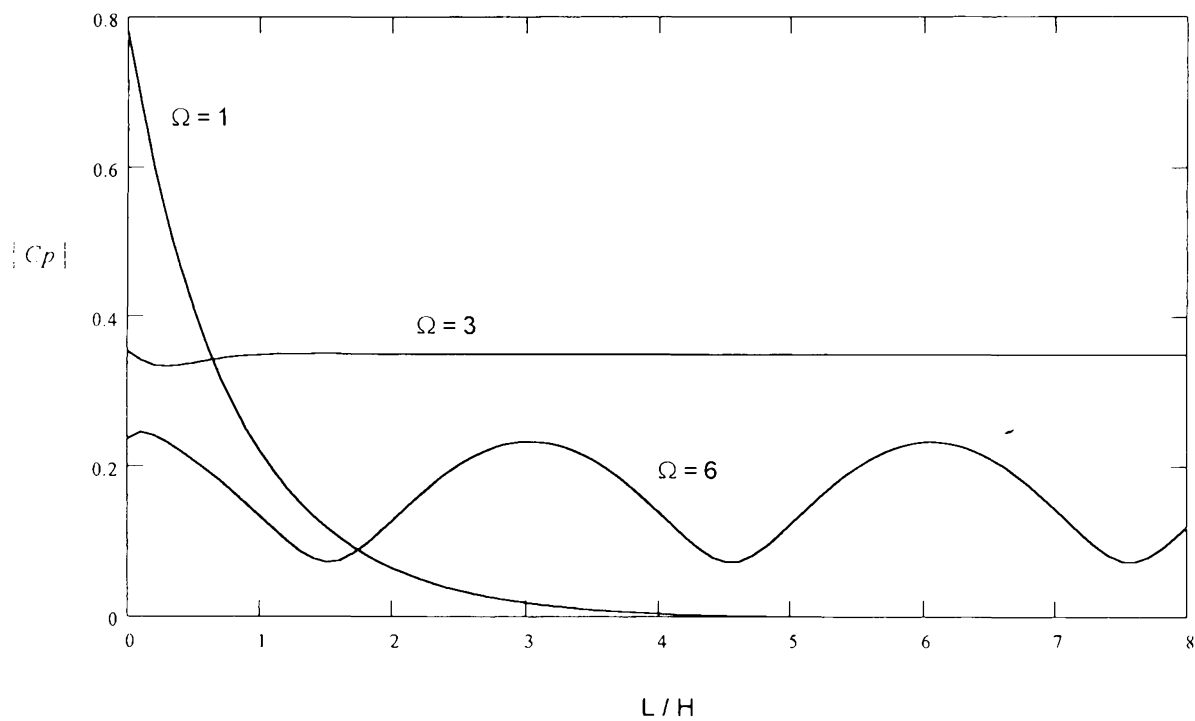


Fig. 1.3 Coeficiente de presión en líquidos compresibles en $y/H = 0.5$ para $\Omega = 1, 3$ y 6

De lo anterior se puede comprobar que la hipótesis de embalse infinito es correcta ya que por lo general la longitud del embalse es mucho mayor que $3H$. Cabe mencionar que este comportamiento es similar al caso anterior cuando no se consideraba la compresibilidad del agua.

Por el contrario, para frecuencias $\Omega > \pi/2$ el coeficiente de presión no tiene una tendencia definida aún para distancias muy grandes.

Muchos años más tarde Chopra [3] encontró que la expresión (I.4) es teóricamente correcta para frecuencias excitadoras menores que la frecuencia fundamental del embalse ($\Omega < \pi/2$), pero ya no es adecuada cuando $\Omega > \pi/2$ ya que no toma en cuenta la parte de la respuesta que no está en fase con la excitación.

Otra contribución de Westergaard que tiene gran importancia práctica es la idea de que la presión hidrodinámica tiene el mismo efecto sobre la cortina que el que causaría cierto cuerpo de agua adherido a ella y que se mueven en conjunto hacia adelante y hacia atrás, mientras que el resto del embalse permanece en reposo. Es decir, el efecto de la presión hidrodinámica es equivalente a un aumento de la masa de la presa. Una vez conocida la presión hidrodinámica es fácil calcular la masa adherida, sin embargo, Chopra [3] hace la observación de que para frecuencias excitadoras $\Omega > \pi/2$ la presión hidrodinámica puede no ser equivalente a los efectos de inercia de la masa adherida, excepto para pequeñas profundidades.

Otro paso importante en las investigaciones de la presión hidrodinámica fueron los trabajos experimentales realizados por Zangar [4] quien, aplicando un método de analogía eléctrica en un tanque electrolítico, determinó los valores del coeficiente de presión para diferentes formas del paramento mojado de la cortina.

En las últimas décadas han aparecido gran cantidad de trabajos en esta área de la ingeniería sísmica [5] realizados por notables investigadores, que han esclarecido la influencia de muchos factores en la presión hidrodinámica. Desde hace varios años se tiene forma de calcular la presión hidrodinámica considerando los efectos de la inclinación del paramento de la cortina, la aceleración vertical, el oleaje sísmico, de perturbaciones estocásticas, de la curvatura de la presa, de algunas formas geométricas simples del embalse, entre otros factores [3], [5], [6], [7], [8].

Hasta finales de la década de los años sesentas, el análisis sísmico de las presas se hacía en dos fases independientes: (1) se obtenía la respuesta sísmica de la presa ignorando el embalse y (2) se calculaba la presión hidrodinámica considerando que la presa era rígida. Ya en esos años se había llegado a la concepción de que el problema

debía resolverse en forma integral, es decir, analizando el sistema completo presa-embalse y considerando los efectos de interacción entre ellos [8]. Para esa época ya se habían desarrollado aplicaciones importantes del método de los elementos finitos (MEF) a problemas de fluidos.

La aplicación del MEF constituyó un nuevo avance en el análisis sísmico de las presas. Este método en principio permite analizar el sistema presa-embalse en forma integral, tomando en cuenta los fenómenos de interacción entre las partes a través de las condiciones de frontera correspondientes.

Por otro lado, la aplicación del método de los elementos finitos permite considerar factores que con las técnicas anteriores era prácticamente imposible hacerlo. Entre estos factores se pueden mencionar: la forma de la cortina, la topografía del embalse, la composición de la cortina con materiales de distintas propiedades, el comportamiento no lineal de la estructura, la flexibilidad del fondo del embalse y otros factores de gran importancia.

Para la aplicación del MEF es necesario discretizar la cortina y el embalse. Para esto, el embalse que se considera infinito se debe truncar a cierta distancia de la cortina. A la sección donde se trunca el embalse se le llama ***frontera de radiación***.

El hecho de truncar el embalse introduce una frontera artificial en la cual se debe cumplir cierta condición que de alguna manera sea equivalente al efecto que causaría la parte del embalse que se eliminó. Es evidente que la introducción en el análisis por elementos finitos de la frontera de radiación adecuada es muy importante, ya que de ella depende en cierta medida el grado de exactitud de los resultados.

En las últimas tres décadas gran parte de las investigaciones se han orientado hacia la búsqueda de la frontera de radiación adecuada y a la aplicación del método de los elementos finitos en forma eficiente [8], [9], [11],[12], [13], [14]. Precisamente este trabajo se enmarca dentro de este contexto.

Algunos investigadores han aplicado con buenos resultados algunas variantes del análisis por elementos finitos. Chakrabarti y Chopra [15] proponen considerar el sistema cortina-embalse como si estuviera compuesto por dos subestructuras: la cortina representada por un sistema discreto y el embalse considerado como un continuo de longitud infinita. Saini, y col. [16] considerando el sistema cortina-embalse compuesto por dos subestructuras y con la variante de que el embalse se modela en parte por elementos finitos estándar acoplados a elementos infinitos.

Una herramienta alterna muy efectiva para el análisis de presiones hidrodinámicas es el método de los elementos de frontera [17]. Este método puede ser más eficiente que el MEF en el caso del análisis tridimensional del embalse.

A la fecha se ha avanzado notablemente en este campo de la investigación, pero aún quedan varios problemas complejos por resolver, y es por esta razón que continúa creciendo el interés por esta área de investigación.

El objetivo de este trabajo es desarrollar las expresiones que caracterizan las condiciones que se deben cumplir en la frontera de radiación para los tres casos siguientes: (1) considerando la formación de oleaje en la superficie del embalse, (2) tomando en cuenta la flexibilidad del material del fondo del embalse y (3) considerando tanto el oleaje como la flexibilidad del fondo. Las condiciones de frontera obtenidas se analizarán y se compararán con los resultados reportados en otros trabajos.

En el segundo capítulo se dará un breve resumen de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica que se emplearán más adelante en los desarrollos teóricos. También, se presentarán y comentarán algunas de las condiciones de frontera relevantes para este trabajo.

En el tercer capítulo se presentarán y discutirán las condiciones en la frontera de radiación más comunes.

El cuarto capítulo constituye la parte central de esta tesis y ahí se presentarán los desarrollos teóricos de las fronteras de radiación propuestas y se comentarán los resultados obtenidos.

En el quinto capítulo se hará la formulación del análisis del embalse por elementos finitos incorporando las condiciones en la frontera de radiación obtenidas en el capítulo anterior.

Por último se presentarán las conclusiones de este trabajo.

CAPÍTULO II

RESUMEN DE ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA. CONDICIONES DE FRONTERA

Las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica tienen gran importancia en el desarrollo del presente trabajo. Por esta razón se considera conveniente dar un breve resumen de las ecuaciones más importantes .

Por otra parte, las ecuaciones de la hidrodinámica se resuelven junto con las condiciones de frontera que particularizan al fenómeno estudiado, por ello también se analizarán algunas de las condiciones de frontera de mayor interés para esta tesis.

II.1 Simbología

En las expresiones que a continuación se presentan se adoptarán los siguientes símbolos:

x, y, z	Coordenadas Cartesianas
t	Tiempo
$p = p(x, y, z, t)$	Presión hidrodinámica
$V = V(x, y, z, t)$	Vector velocidad de las partículas del flujo
$u = u(x, y, z, t)$ ó u_x	Componentes cartesianas del vector velocidad
$v = v(x, y, z, t)$ ó u_y	
$w = w(x, y, z, t)$ ó u_z	
F	Aceleración de las fuerzas de cuerpo
F_x, F_y, F_z	Componentes de la aceleración de las fuerzas de cuerpo
g	Aceleración de la fuerza de gravedad
ρ	Densidad
\bar{p}	Amplitud de la presión hidrodinámica
$\phi = \phi(x, y, z)$	Potencial de velocidad
γ	Peso volumétrico

II.2 Ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica

Entre los conceptos y las ecuaciones más importantes de la hidrodinámica se encuentran los siguientes:

Teorema de Cauchy-Helmholtz

En el caso más general, el movimiento de las partículas de un líquido se compone de tres tipos de movimiento independientes: traslación, rotación y deformación.

Componentes del movimiento rotacional

El movimiento de rotación de una partícula tiene tres componentes en relación con los tres ejes cartesianos, que se expresan como sigue

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (II.1)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Flujo irrotacional. Potencial de velocidad

Si la partícula no tiene movimiento de rotación, es decir solo tiene movimiento de traslación y de deformación, entonces se dice que el flujo es **irrotacional**. En este caso, las componentes del movimiento de rotación son igual a cero, esto es

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

y por lo tanto, para que el flujo sea irrotacional, de acuerdo con las expresiones (II.1), se debe cumplir

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (II.2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Las condiciones anteriores determinan la existencia de cierta función que sólo depende de las coordenadas y el tiempo, llamada **potencial de velocidad**. Del cumplimiento de las condiciones del flujo irrotacional, se deduce que

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\u_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{aligned}\tag{II.3}$$

donde $\phi = \phi(x, y, z)$ es el potencial de velocidad. El flujo irrotacional es un flujo con potencial.

Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler o ecuaciones de la hidrodinámica se obtienen aplicando la segunda ley de Newton a un volumen diferencial con forma de paralelepípedo contenido en un líquido no viscoso e incompresible, en movimiento. La presión hidrodinámica es normal a cada cara del paralelepípedo. Estas ecuaciones comúnmente se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\tag{II.4}$$

donde F_x, F_y, F_z son las componentes de la aceleración de las fuerzas de cuerpo.

En forma vectorial estas ecuaciones se expresan como sigue

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)V = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (II.4')$$

Si no se consideran las fuerzas de cuerpo entonces las ecuaciones de Euler se escriben como

$$a_x = \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (II.5)$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

donde a_x, a_y, a_z son las componentes de la aceleración de la partícula. Sustituyendo las expresiones para el potencial de velocidad en estas últimas expresiones se encuentra fácilmente que

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (II.6)$$

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad representa la ley física de la conservación de la materia. En el caso de un líquido compresible esta ecuación puede comprenderse en la siguiente forma: las variaciones temporales de masa que ocurren en un volumen diferencial de dimensiones constantes se deben a las variaciones de la densidad del flujo. Para el caso de flujo estacionario esta ecuación se escribe en la siguiente forma

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (II.7)$$

o en forma vectorial

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (II.7')$$

En el caso particular de líquidos incompresibles, la ecuación de continuidad expresa que independientemente de las deformaciones que experimente el flujo la cantidad de masa es constante. En este caso la densidad es constante y la ecuación de continuidad se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (II.8)$$

o

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (II.8')$$

Ecuación de onda o Helmholtz

La ecuación de onda es la ecuación gobernante de los fenómenos dinámicos en los fluidos compresibles. En el caso bidimensional esta ecuación se expresa, en términos de la presión hidrodinámica, como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (II.9)$$

o en términos del potencial de velocidad se escribe como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (II.9')$$

donde c es la velocidad de las ondas de compresión. Para el agua $c = 1438 \text{ m/s}$.

Ecuación de Laplace

En el caso particular de fluidos incompresibles, las ondas de presión viajan con velocidad infinita ($c = \infty$) y según la fórmula (II.8'), la ecuación que gobierna el movimiento de estos líquidos es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (II.10)$$

o

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (II.10')$$

II.3 Condiciones de frontera

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de los líquidos se resuelven acompañadas de las condiciones de frontera propias de cada problema en particular.

A continuación se presentan algunas de las condiciones de frontera de uso más frecuente.

Condición en la superficie de los cuerpos rígidos

Las partículas del líquido no pueden penetrar la superficie de los cuerpos rígidos con los que tienen contacto. Es por esto que en el contacto con las fronteras sólidas las velocidades del líquido están dirigidas conforme a la normal exterior. Es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n \quad (II.11)$$

o en términos de la presión hidrodinámica y considerando las ecuaciones (II.5)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{du_n}{dt} = -\rho a_n \quad (II.11')$$

donde n es la normal exterior y a_n es la componente normal de la aceleración de las partículas.

Condición en la superficie libre del líquido

Si se considera que las partículas del líquido que se encuentran en la superficie libre no tienen movimiento vertical, entonces se debe cumplir que en dicha superficie la presión es igual a cero,

$$p_s = 0 \quad (II.12)$$

donde p_s es la presión en la superficie libre del líquido.

Condición de oleaje en la superficie del líquido

Debido al movimiento de la cortina, en la superficie del embalse se desarrolla cierto oleaje sísmico. El efecto de este oleaje se puede considerar a través de la ecuación de Poisson, que se expresa como

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (II.13)$$

Esta condición de frontera se obtiene de la siguiente manera. Supóngase que la superficie libre del líquido se mueve verticalmente con respecto a cierto nivel estático. Entonces, la velocidad de movimiento de la superficie libre en la dirección vertical es igual a

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (a)$$

y la presión hidrostática sobre el nivel estático es

$$p = \rho g y \quad (b)$$

Derivando la ecuación (b) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial y}{\partial t}$$

Derivando una vez más y despejando, se encuentra

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (c)$$

Relacionando las ecuaciones de Euler (II.5) con la ecuación (c) se llega a

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

que es la ecuación (II.13). Se ha encontrado que esta ecuación da resultados satisfactorios [5].

Condición de fondo flexible

Hall y Chopra [10] propusieron una condición de frontera para considerar el efecto de la flexibilidad del material del fondo del embalse.

Para deducir esta ecuación se parte de la hipótesis de que en la interfase entre el líquido y la cimentación flexible son válidas las expresiones (II.5) que establece la proporcionalidad entre el gradiente normal de presión y la componente normal de la aceleración. Sin embargo, esta aceleración debe considerar el efecto de la interacción fluido-cimentación. Esto es, la aceleración real debe estar compuesta por una parte de la aceleración de campo libre y por otra parte de la aceleración causada por el efecto de interacción.

Además, debido al efecto de interacción fluido-cimentación, se cumple que en esta frontera la presión hidrodinámica en el fluido es igual al esfuerzo de compresión en la roca de la cimentación.

La condición de flexibilidad del fondo es

$$\left. \frac{d\bar{p}}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{\gamma}{g} a_y + i\omega q \bar{p} \Big|_{y=0} \quad (II.14)$$

donde γ es el peso específico del agua, a_y es la componente normal de la aceleración, \bar{p} es la amplitud de la onda de presión, ω es la frecuencia excitadora y q es el coeficiente de amortiguamiento, que se calcula por la siguiente fórmula

$$q = \frac{1 - \alpha_r}{c(1 + \alpha_r)}$$

y

$$\alpha_r = \frac{1 - \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}}{1 + \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}}$$

donde en estas últimas expresiones α_r es el coeficiente de reflexión, γ_r es el peso volumétrico de la roca y c_r es la velocidad de las ondas de compresión en la roca.

Una onda de presión que viaja horizontalmente en el fluido y que choca contra una cimentación flexible e inmóvil produce aceleraciones en la frontera pero solo por interacción ya que la aceleración de campo libre a_y es igual a cero. En este caso la condición de frontera se escribe de la siguiente manera

$$\left. \frac{d\bar{p}}{dy} \right|_{y=0} = i\omega q \bar{p} \Big|_{y=0} \quad (II.14')$$

Condición de frontera en el infinito

La energía de la onda de presión se pierde rápidamente por radiación. Por lo tanto, es lógico suponer que a una distancia muy grande de la cortina ya no hay presión hidrodinámica, es decir

$$p \Big|_{x=\infty} = 0 \quad (II.15)$$

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN

El análisis dinámico de una presa es un problema muy complejo en el que intervienen indudablemente la naturaleza del movimiento del terreno y las características propias de la presa, sin olvidar que los fenómenos de interacción presa-embalse, suelo-estructura y suelo-embalse tienen gran importancia.

Actualmente, el análisis dinámico del sistema presa-embalse se realiza aplicando el método de los elementos finitos. Este método requiere de la discretización de la cortina y del embalse, pero ya que este último se considera infinito entonces se debe truncar a cierta distancia de la cortina. Esto introduce una frontera artificial en el sistema presa-embalse a la que se le dió el nombre de **frontera de radiación**. Es evidente que en la frontera de radiación se debe cumplir alguna condición que sea equivalente al efecto que causaría la parte del embalse que se elimina. En primer lugar, la condición que se debe cumplir en la frontera de radiación tiene que considerar las pérdidas de energía que experimenta la onda de presión.

En este capítulo se analizarán las condiciones en la frontera de radiación que se han empleado con mayor frecuencia hasta la fecha.

III.1 Fronteras de radiación

Sommerfeld [18] al aplicar la ecuación de onda a un dominio de longitud infinita propuso truncar el dominio a una distancia suficientemente grande donde la onda se pueda considerar plana. Bajo esta hipótesis dedujo que en la frontera de radiación se debe cumplir la siguiente condición:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (III.1)$$

donde c es la velocidad de la onda, L es la distancia a la que se trunca el dominio y n es la normal a la frontera de radiación. Para el caso de fluidos incompresibles $c = \infty$ y la condición de Sommerfeld se convierte a

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = 0 \quad (III.2)$$

La ubicación espacial de la frontera de radiación es un aspecto importante ya que de ella depende en gran medida la exactitud de los resultados y la eficiencia del método de los elementos finitos. Por esta razón es importante encontrar una condición de frontera que permita truncar el embalse lo más cerca posible de la cortina para reducir el dominio de discretización del embalse y entonces aplicar el método de los elementos finitos de manera eficiente.

Años más tarde, Zienkiewics y Newton [19] deducen la condición de la frontera de radiación en líquidos compresibles de la siguiente forma. La ecuación de onda plana de presión en dirección x se puede escribir como

$$p = F(x - ct) \quad (a)$$

Si se hace $z = x - ct$, entonces $p = F(z)$. Derivando esta última expresión con respecto a z se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} = F'(z) \quad (b)$$

Como $\partial z/\partial t = -c$, entonces

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -c F'(z) \quad (c)$$

Sustituyendo la ecuación (b) en (c) y considerando que $\partial z/\partial x = 1$ se obtiene, aplicando la ley de la cadena

$$\frac{\partial p}{\partial n} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (d)$$

que es la misma condición de Sommerfeld. Esta condición es equivalente a colocar un elemento de amortiguamiento en la frontera de radiación.

Humar y Roufaiel [9] comprobaron que esta condición no da resultados aceptables para frecuencias excitadoras mayores que la primera frecuencia natural del embalse ($\omega > \omega_1$). Estos mismos investigadores proponen otra condición de frontera de radiación, deducida a partir de la hipótesis de que a distancias suficientemente grandes, la componente de la respuesta de la presión hidrodinámica que está fuera de fase con la excitación se puede despreciar para frecuencias excitadoras mayores que la primera frecuencia natural del embalse. Esta condición de frontera se escribe en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{para } \omega < \omega_1 \quad (III.3)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} \quad \text{para } \omega > \omega_1 \quad (III.3')$$

donde ω es la frecuencia excitadora, ω_1 la frecuencia natural del embalse y L la distancia a la que se ubica la frontera de radiación.

Los investigadores mencionados comprobaron que los resultados obtenidos empleando las condiciones (III,3) y (III.3') son mejores que los obtenidos empleando la condición de Sommerfeld cuando la frontera de radiación se ubica a una distancia de la cortina mayor o igual que dos veces la profundidad del embalse.

Sharan [11] ha propuesto una expresión para la frontera de radiación que se obtiene por simple derivación de la solución clásica de la presión hidrodinámica para líquidos incompresibles, ecuación (I.1). Además Sharan consideró que para distancias suficientemente grandes el segundo y todos los demás términos de la sumatoria se pueden despreciar, y la condición de radiación queda como sigue:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = -\frac{\pi}{2H} p \Big|_{x=L} \quad (III.4)$$

Se debe notar que a grandes distancias de la cortina (figura I.1) la presión hidrodinámica desaparece y la condición anterior se transforma en $\partial p / \partial n = 0$, que coincide con la condición de Sommerfeld.

Empleando la condición (III.4), se puede ubicar la frontera de radiación a una distancia $L = 0.1 H$ y obtener resultados satisfactorios. Sin embargo se puede comprobar fácilmente que para estas distancias no es conveniente despreciar los términos de la sumatoria de la ecuación (I.1).

Posteriormente, Sharan [12] propuso una nueva condición para la frontera de radiación que dedujo derivando directamente la solución clásica de la presión hidrodinámica en líquidos compresibles, ecuación (I.4). Esta condición se expresa en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Z \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x=L} \quad (III.5)$$

donde

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} q_n}{\Omega c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{f_n}} \quad (III.6)$$

y

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1} e^{-f_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)}{2n-1}$$

siendo $\lambda_n = (2n-1)\pi/2$, $f_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2}$ y $\Omega = \omega H/c$.

Es notorio que la ecuación (III.5) tiene la misma estructura que la condición de Sommerfeld. Esta misma condición puede expresarse en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\beta \omega}{c} p \Big|_{x=L} \quad (\text{III.7})$$

donde α y β son los **parámetros de amortiguamiento** que se determinan con la ayuda de la ecuación (III.6). Se puede comprobar que $\alpha \cong 0$ para $\omega < \omega_1$ y $\beta \cong 0$ para $\omega_1 < \omega < \omega_2$. De esto se deduce que no es correcto considerar $\partial p / \partial x = 0$ cuando $\omega < \omega_1$ como se propone en las ecuaciones (III.2) y (III.3). En las figuras III.1, III.2 y III.3 se muestra el comportamiento de los coeficientes α y β , para distintos valores de la frecuencia excitadora Ω y para diferentes posiciones de la frontera de radiación.

En la figura III.3 se nota claramente que para valores de Ω menores que los correspondientes a la segunda frecuencia natural de vibraciones del embalse, los parámetros de amortiguamiento α y β se estabilizan rápidamente.

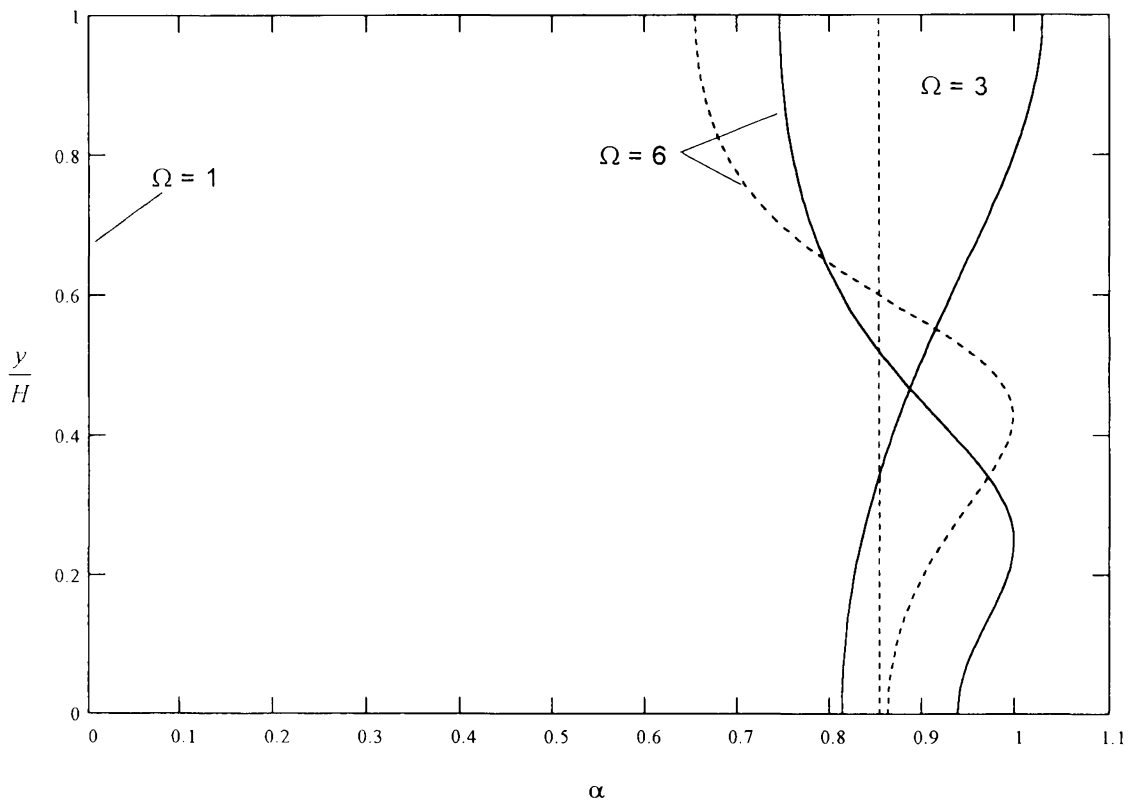


Fig. III.1 Efecto de la ubicación de la frontera de radiación y de la frecuencia excitadora en el parámetro α en $L/H = 0.5$ y 1 para $\Omega = 1, 3$ y 6

----- $L/H = 0.5$ $L/H = 1$

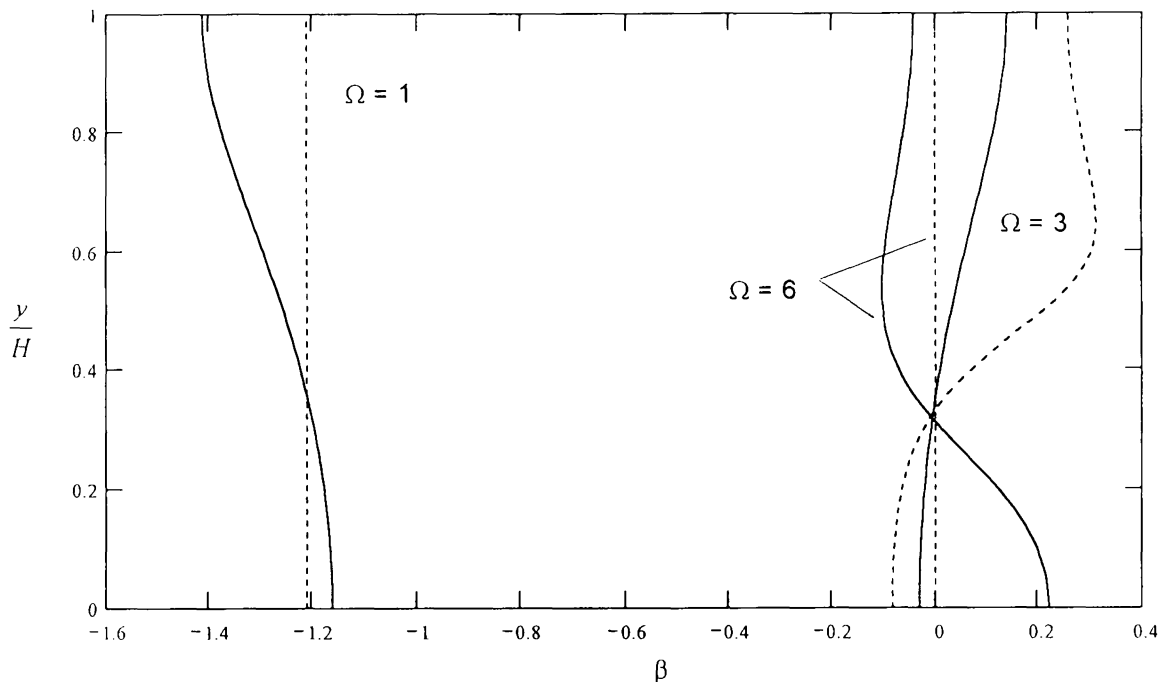


Fig.III.2 Efecto de la localización de la frontera de radiación y de la frecuencia excitadora en el parámetro β en $L/H=0.5$ y 2 para $\Omega = 1, 3$ y 6

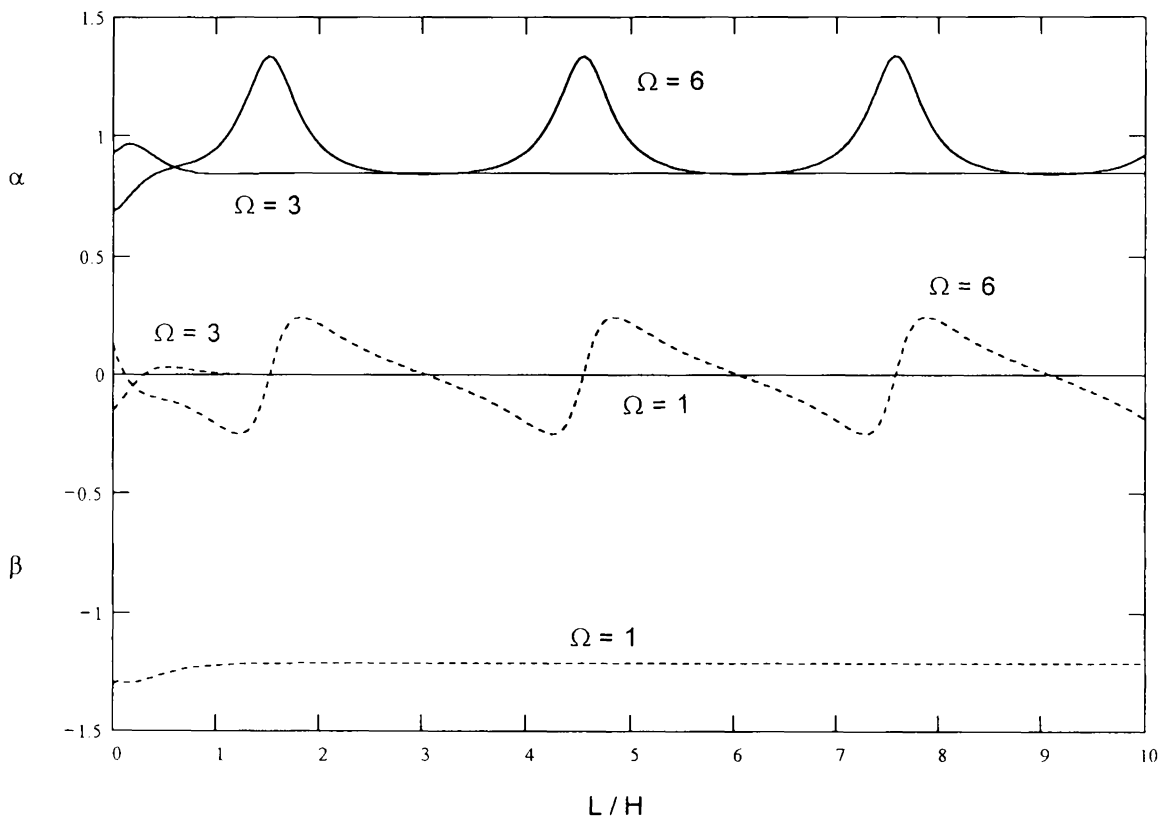


Fig.III.3 Efecto de la ubicación de la frontera de radiación en los parámetros α y β en $y/H = 0.5$ para $\Omega = 1, 3$ y 6 .

Recientemente, Sharan [13] propuso otra condición para la frontera de radiación que considera además la absorción de la energía de las ondas de presión por el material del fondo del embalse, con base en la condición de frontera propuesta por Hall y Chopra [10] para este fin.

La condición de radiación resultante se expresa en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\zeta}{H} p \Big|_{x=L} \quad (II.8)$$

donde $\zeta = \sqrt{\beta_1^2 - \Omega^2}$ y β_1 es la primera raíz de la siguiente ecuación

$$e^{2i\beta_n} = \frac{\omega q H - \beta_n}{\omega q H + \beta_n}$$

siendo q un coeficiente que depende de las propiedades del material del fondo del embalse como se explicó en la sección II.3.

La condición (III.8) posee la simplicidad de la ecuación de Sommerfeld y de la ecuación (III.4). Se comprobó además que usando esta condición de frontera se obtienen muy buenos resultados para $L = 0.1H$ y para un amplio rango de frecuencias excitadoras excepto en las cercanías de la segunda y tercera frecuencias naturales del embalse donde se observó un error relativamente pequeño.

Para que la mayoría de las condiciones de radiación conocidas arrojen buenos resultados es necesario que se haga una adecuada discretización del espacio ocupado por la parte finita del embalse. Recientemente Li y col. [14] propusieron una condición de radiación que no depende de la discretización del embalse y en este sentido es una condición exacta. Esta condición se expresa en la siguiente forma

$$\nabla \psi \cdot n^w = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m g_m(Y, \omega)}{d_m} \int_0^H g_m(Y, \omega) \psi(Y, \omega) dY \quad (III.9)$$

donde $\alpha_m = \pm \sqrt{\beta_m^2 - (\omega/c^w)^2}$, $d_m = (1/2\beta_m) [\beta_m H - \sin(\beta_m H) \cos(\beta_m H)]$

$g_m(Y, \omega) = \sin \beta_m (H - Y)$, ψ es el potencial de velocidad, n^w es la normal exterior a la superficie de radiación y ∇ es el operador gradiente.

Los valores de β_m son las raíces de la siguiente ecuación trascendente

$$\beta_m \cot(\beta_m H) + i \omega \xi = 0$$

donde ξ es el coeficiente de amortiguamiento del material en el fondo del embalse y que se determina en función de sus propiedades elásticas (q en la ecuación II.14).

El empleo de esta condición de frontera permite obtener excelentes resultados para un amplio rango de la frecuencia excitadora, empleando un número moderado de términos de la sumatoria (aproximadamente diez). Una ventaja importante en este caso es que requiere una malla poco densa para lograr buenos resultados.

CAPÍTULO IV

DESARROLLO TEÓRICO DE LAS FRONTERAS DE RADIACIÓN

El objetivo de este capítulo es obtener y analizar las expresiones que representan la frontera de radiación y que consideran los efectos: (1) del oleaje, (2) de la flexibilidad del material del fondo del embalse y (3) del oleaje y de la flexibilidad del fondo simultáneamente.

Los modelos de radiación propuestos se desarrollarán sobre la base de las siguientes hipótesis generales:

- el fondo del embalse es horizontal,
- la cortina es rígida y con paramento mojado vertical,
- el líquido es compresible e invíscido,
- la longitud del embalse es infinita,
- el movimiento del suelo es horizontal, armónico y de pequeña amplitud y
- el problema es bidimensional.

Además se incluirán otras hipótesis que caracterizan cada modelo de radiación en particular.

IV.1 DESARROLLO DE LA FRONTERA DE RADIACIÓN QUE CONSIDERA EL OLEAJE

En este caso se tomará en cuenta el efecto del oleaje generado en la superficie del líquido debido al movimiento de la estructura.

IV.1.1 Ecuación gobernante

La presión hidrodinámica desarrollada por un líquido en movimiento que cumple con las condiciones mencionadas anteriormente, está gobernada por la ecuación (II.8)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (IV.1)$$

donde x y y son las coordenadas cartesianas, $p = p(x, y, t)$ es la presión hidrodinámica, c es la velocidad de las ondas de compresión en el agua ($c = 1438 \text{ m/s}$) y t es el tiempo.

IV.1.2 Condiciones de frontera

Además de las condiciones de frontera mencionadas al inicio, en este caso se deben cumplir las siguientes condiciones adicionales:

- Se considera que el suelo y la cortina vibran con una aceleración horizontal igual a

$$\ddot{x}_g(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (IV.2)$$

donde \ddot{x}_0 es la amplitud de la aceleración armónica del suelo, ω es la frecuencia circular de vibración e $i = \sqrt{-1}$.

- Como consecuencia del movimiento de la cortina, se genera un oleaje en la superficie libre del agua que, se supone, afecta a la presión hidrodinámica. El efecto del oleaje se considera a través de la condición de frontera de Poisson, que establece que en la superficie libre del líquido se cumple la siguiente expresión

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = 0 \quad (IV.3)$$

- En $x = 0$, el movimiento de la cortina y las partículas del agua es el mismo. Entonces, de las ecuaciones de Euler (ec. II.4) se cumple

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (IV.4)$$

donde ρ es la densidad del agua.

- Se considera que el fondo es rígido, por lo tanto no tiene movimiento en la dirección vertical ($\ddot{y}_0 = 0$) y, según las ecuaciones de Euler mencionadas en el punto anterior, se debe cumplir

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (IV.5)$$

- Por último, a una distancia infinitamente grande de la cortina, la presión hidrodinámica es igual a cero. Es decir:

$$p|_{x=\infty} = 0 \quad (IV.6)$$

Las condiciones de frontera mencionadas se ilustran en la figura IV.1

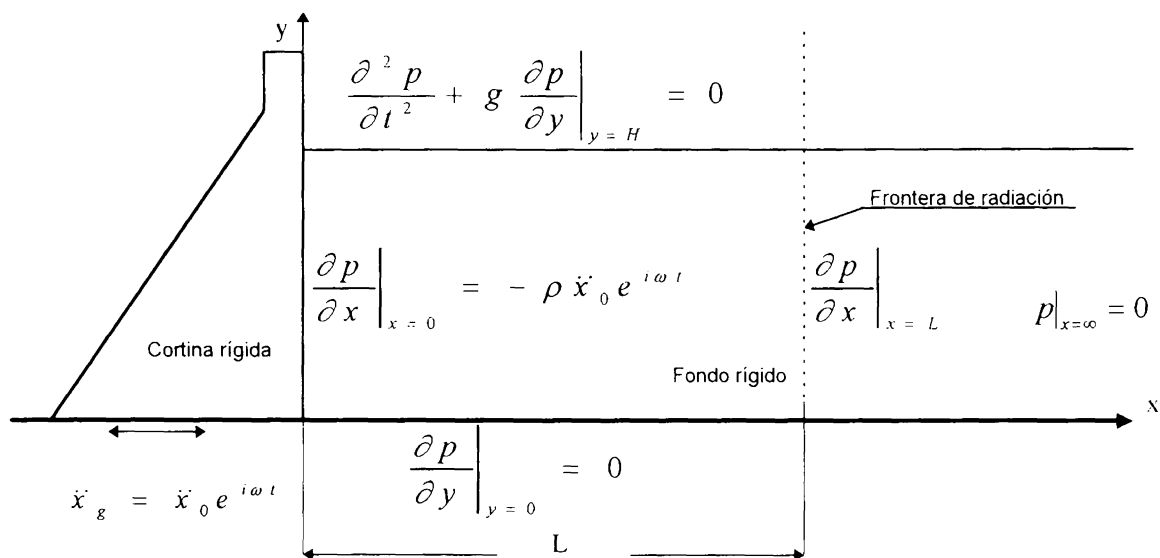


Fig. IV.1 Condiciones de frontera que consideran el oleaje

IV.1.3 Solución de la ecuación gobernante

La ecuación gobernante (IV.1) junto con las condiciones de frontera mencionadas anteriormente, se resuelve por el método de separación de variables que a continuación se detalla.

Se propone que la función que representa la presión hidrodinámica se busque como el producto de tres funciones que dependan únicamente del tiempo y de las coordenadas x y y respectivamente. Es decir:

$$p(x, y, t) = p_t(t) \cdot p_x(x) \cdot p_y(y)$$

o simplemente

$$p = p_t p_x p_y \quad (IV.7)$$

Derivando dos veces la ecuación (IV.7) con respecto x y y se obtiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = p_t p_y p_x'' \quad (IV.8)$$

y

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = p_t p_x p_y'' \quad (IV.9)$$

Por otra parte, ya que se está analizando un proceso armónico, se puede considerar que

$$p_t = \bar{p}_t e^{i\omega t}$$

donde \bar{p}_t es la amplitud de la función p_t .

Derivando dos veces esta última ecuación y considerando la expresión (IV.7) se obtiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 p_t p_x p_y \quad (IV.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (IV.8), (IV.9) y (IV.10) en la ecuación (IV.1) y simplificando se encuentra que

$$\frac{p_x''}{p_x} + \frac{p_y''}{p_y} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \quad (IV.11)$$

Para que la ecuación (IV.11) se cumpla los cocientes p_x''/p_x y p_y''/p_y deben ser constantes y pueden representarse, por conveniencia, en la siguiente forma

$$\frac{p_x''}{p_x} = \xi^2 \quad \text{ó} \quad p_x'' - \xi^2 p_x = 0 \quad (IV.12)$$

$$\frac{p_y''}{p_y} = -\eta^2 \quad \text{ó} \quad p_y'' + \eta^2 p_y = 0 \quad (IV.13)$$

y

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (IV.14)$$

Entonces la ecuación (IV.11) se puede escribir como sigue

$$\xi^2 - \eta^2 + k^2 = 0 \quad (IV.15)$$

donde ξ, η y k son constantes.

De esta manera, la solución de la ecuación (IV.11) se resume a resolver las ecuaciones diferenciales (IV.12) y (IV.13). Las soluciones de estas ecuaciones son

$$p_x = B e^{\xi x} + D e^{-\xi x} \quad (IV.16)$$

$$p_y = F \cos(\eta y) + G \operatorname{sen}(\eta y) \quad (IV.17)$$

donde B, D, F y G son constantes de integración.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (IV.1) es

$$p(x, y, t) = p_t \left(B e^{\xi x} + D e^{-\xi x} \right) \left[F \cos(\eta y) + G \operatorname{sen}(\eta y) \right] \quad (IV.18)$$

Las constantes de integración B, D, F y G se determinarán usando las condiciones de frontera particulares de este problema.

IV.1.4 Determinación de las constantes de integración B y D

Considerando la condición de frontera (IV.6) en la ecuación (IV.18), se obtiene

$$p|_{x=-\infty} = p_t B e^{\xi \infty} [F \cos(\eta y) + G \operatorname{sen}(\eta y)] = 0$$

$$\therefore B = 0$$

Análogamente de la condición de frontera (IV.5).

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

se deduce

$$p_t D e^{-\xi x} (G \eta) = 0$$

de adonde se encuentra que $G = 0$.

Entonces la ecuación (IV.18) se reduce a la siguiente expresión

$$p(x, y, t) = \bar{p}_t A e^{-\xi x} \cos(\eta y) e^{i\omega t} \quad (IV.19)$$

donde la nueva constante A se sustituyó por el producto de las constantes D y F .

IV.1.5 Determinación de las constantes ξ y η

Las constantes ξ y η se determinan aplicando la condición de frontera (IV.3) que representa la generación de oleaje en la superficie libre del agua

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = 0$$

Derivando la ecuación (IV.19) dos veces respecto al tiempo y sustituyendo $y = H$ se obtiene

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right|_{y=H} = -\omega^2 \bar{p}_t A e^{-\xi x} \cos(\eta H) e^{i\omega t} \quad (IV.20)$$

Análogamente

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = -\bar{p}_i A e^{-\xi x} \eta \operatorname{sen}(\eta H) e^{i\omega t} \quad (IV.21)$$

Sustituyendo las expresiones (IV.20) y (IV.21) en la ecuación anterior y simplificando se encuentra

$$\eta \tan(\eta H) + \frac{\omega^2}{g} = 0 \quad (IV.22)$$

Esta última ecuación puede expresarse de la siguiente manera, haciendo $\lambda = \eta H$ y $\Omega = \omega H/c$

$$\lambda \tan(\lambda) + \frac{\Omega^2 c^2}{g H} = 0 \quad (IV.23)$$

La ecuación trascendente (IV.23) tiene un número infinito de soluciones y cada una de ellas es un valor propio de la ecuación diferencial (IV.1). Esta ecuación se puede expresar, entonces como

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) + \frac{\Omega^2 c^2}{g H} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (IV.24)$$

A cada raíz λ_n le corresponde un valor del coeficiente ξ_n que se determina por la ecuación (IV.15)

$$\xi_n = \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{H}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

En esta última expresión sólo tienen sentido físico los valores positivos de ξ_n ya que se está considerando que la longitud del embalse es infinita y por lo tanto no hay ondas de presión que puedan regresar.

Ahora representando $\gamma_n = \xi_n H$ y recordando que la frecuencia excitadora normalizada Ω es igual a $\omega H/c$, entonces la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2} \quad (IV.25)$$

Tomando en cuenta todo lo anterior se puede concluir que la ecuación diferencial (IV.1) tiene un número infinito de soluciones homogéneas, y ya que esta ecuación es lineal, entonces la solución general es la suma de las soluciones homogéneas. Es decir

$$p(x, y, t) = p_t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (IV.26)$$

IV.1.6 Determinación de la función p_t

La función p_t se determina a partir de la condición de frontera (IV.4)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$$

Derivando la ecuación (IV.26) y sustituyendo $x = 0$, se obtiene

$$-p_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (IV.27)$$

Anteriormente se consideró que $p_t = \bar{p}_t e^{i\omega t}$, y comparando esta fórmula con la expresión (IV.27) se deduce que

$$\bar{p}_t = \rho \ddot{x}_0 \quad (IV.28)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) = 1 \quad (IV.29)$$

Para concluir, la presión hidrodinámica considerando el efecto del oleaje se determina con la siguiente expresión

$$p(x, y, t) = \rho \ddot{x}_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) e^{i\omega t} \quad (IV.30)$$

donde λ_n son las raíces de la ecuación trascendente (IV.24), γ_n son coeficientes que se calculan con la ecuación (IV.25) y A_n son constantes que deben cumplir con la expresión (IV.29).

IV.1.7 Cálculo de las raíces de la ecuación trascendente λ_n

Los valores propios λ_n son las raíces de la ecuación trascendente (IV.24)

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) + \frac{\Omega^2 c^2}{gH} = 0$$

y se calculan aplicando alguno de los métodos numéricos tradicionales.

Ya que los valores propios son todos positivos sólo tienen interés práctico las raíces positivas de la ecuación (IV.24). Esta ecuación es periódica discontinua y crece muy rápido cerca de la discontinuidad y las raíces están muy próximas a los valores $(2n-1)\pi/2$. Por esto, para buscar las raíces e iniciar las iteraciones es conveniente proponer valores ligeramente más grandes, por ejemplo $(2n-1)\pi/2 + 10^{-5}$. En la figura (IV.2) se muestra el comportamiento de esta función.

IV.1.8 Cálculo de los coeficientes A_n

Los coeficientes A_n se calculan a través de la ecuación (IV.29) y empleando las propiedades de ortogonalidad de la función coseno. Multiplicando ambos términos de esta ecuación por $\cos(\lambda_n y/H)$ e integrando de 0 a H se obtiene

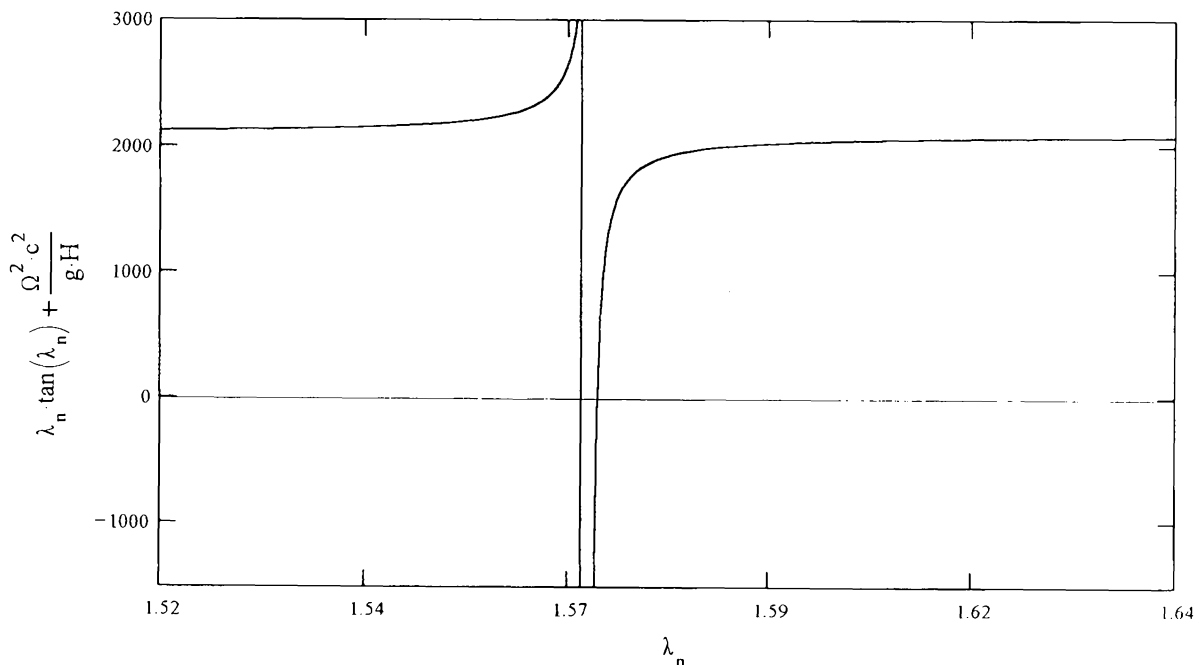


Fig. IV.2 Gráfica de la ecuación trascendente

$$\int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy$$

Empleando las propiedades de ortogonalidad de la función coseno la expresión anterior se reduce a

$$A_m \frac{\gamma_n}{H} \int_0^H \cos^2\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy = \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy$$

Desarrollando las integrales de esta última expresión y sustituyendo m por n en virtud de que son índices mudos, finalmente se obtiene la siguiente fórmula que permite calcular directamente los coeficientes A_n

$$A_n = \frac{H \operatorname{sen}(\lambda_n)}{\gamma_n \lambda_n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \operatorname{sen}(2\lambda_n) \right]} \quad (IV.31)$$

IV.1.9 Coeficiente de presión C_p

Se conoce de la ecuación (IV.30) que la amplitud de la presión hidrodinámica es igual a

$$\bar{p} = \rho \ddot{x}_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)$$

Esta expresión puede escribirse en la siguiente forma:

$$\bar{p} = \rho \ddot{x}_0 H C_p \quad (IV.32)$$

donde C_p es el coeficiente de presión que se determina, evidentemente, por la siguiente expresión

$$C_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{H} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (IV.33)$$

Con la intención de conocer el efecto del oleaje, se realizó una extensa comparación entre los valores del coeficiente de presión C_p que consideran solamente la

la compresibilidad del líquido (ec. I.4) con aquellos que consideran adicionalmente el oleaje (ec. IV.33). Los cálculos se realizaron para una amplia gama de valores de la frecuencia excitadora Ω . Los resultados obtenidos coinciden prácticamente en todos los casos, como se observa en la figura IV.3, de lo cual se concluye que el oleaje generado por el movimiento de la cortina, considerado en el sentido de la condición de Poisson (ec. IV.3), no tiene ningún efecto importante en las presiones hidrodinámicas. Esto viene a confirmar el mismo hecho observado anteriormente por algunos investigadores [2].

Para este caso también son válidas las observaciones que se hicieron notar en el Capítulo I cuando se analizaba el efecto de la compresibilidad del líquido.

IV.1.10 Frontera de radiación

Adoptando el criterio considerado en el tercer capítulo se deduce fácilmente que la condición que se debe cumplir en la frontera de radiación es la siguiente

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\rho \ddot{x}_0}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) e^{i\omega t} \quad (IV.34)$$

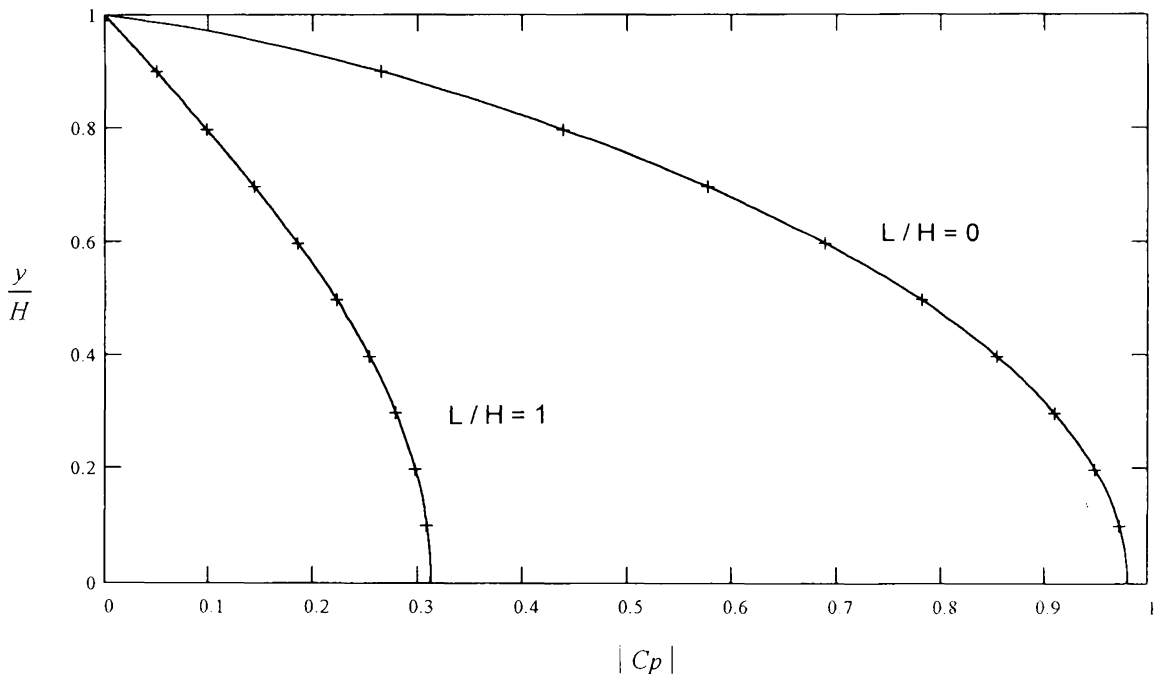


Fig. IV.3 Comparación entre los coeficientes de presión que consideran la compresibilidad del agua y los que consideran además el oleaje en $L/H = 0$ y 1 para $\Omega = 1$

————— considerando solo compresibilidad + + + considerando además el oleaje

Con fines de análisis, la ecuación (IV.34) se puede expresar en la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Z \frac{\partial p}{\partial t} \quad (IV.35)$$

donde

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)}{\Omega c \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)} \quad (IV.36)$$

Esta forma de expresar la condición en la frontera de radiación ha sido usada por varios investigadores [8],[9],[11],[12],[13],[14] y tiene la ventaja de ser muy simple para implementarse en un análisis por elementos finitos.

De la ecuación (IV.36) se observa que Z es una cantidad compleja que depende de las coordenadas x y y , de la compresibilidad del agua y de la frecuencia excitadora Ω . Esta última ecuación también se puede expresar de la siguiente manera

$$Z = -\frac{1}{c}(\alpha + \beta i) \quad (IV.37)$$

donde a los coeficientes α y β se les dio el nombre de parámetros de amortiguamiento. La condición en la frontera de radiación se puede escribir entonces como

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\beta \omega}{c} p \Big|_{x=L} \quad (IV.38)$$

ya que $\partial p / \partial t = \partial / \partial t (\bar{p} e^{i\omega t}) = i\omega p$.

Finalmente, la ecuación (IV.38) es la que se incorpora al análisis por elementos finitos y los parámetros de amortiguamiento α y β se determinan con ayuda de las expresiones (IV.36) y (IV.37).

IV.1.11 Análisis de los parámetros de amortiguamiento α y β

Con la intención de conocer el comportamiento de los parámetros α y β se realizó un estudio paramétrico con un amplio rango de valores de la frecuencia

excitadora Ω y de las coordenadas x y y . Los resultados obtenidos fueron comparados con los publicados por Sharan [4], para el caso de flujo compresible sin considerar el oleaje.

En primer lugar, se puede mencionar que los parámetros α y β calculados en este trabajo considerando el oleaje, prácticamente coinciden en su totalidad con los presentados por Sharan en el artículo mencionado. De esto se deduce que el oleaje no tiene ningún efecto apreciable en el comportamiento de los parámetros α y β (figura IV.4).

Por otro lado se observó que para valores de Ω menores de 4.0 los coeficientes α y β rápidamente tienden a estabilizarse al alejar la posición de la frontera de radiación L/H (figura IV.5). Así, para un valor cercano a la unidad, estos coeficientes alcanzan un valor prácticamente constante que ya no depende de L/H ni de y/H .

Por el contrario, para valores de la frecuencia excitadora Ω mayores de 4.7 se observó que los parámetros α y β tienen un comportamiento periódico y sus valores dependen en gran medida de las relaciones L/H y y/H . En este caso, los parámetros α y β no tienden a tomar ningún valor constante aún cuando la frontera de radiación esté muy alejada de la cortina.

Por todo lo anterior y observando la Figura IV.5, resulta lógico pensar que para valores de la frecuencia normalizada menores de cuatro la frontera de radiación se debe ubicar a una distancia L/H cercana a la unidad.

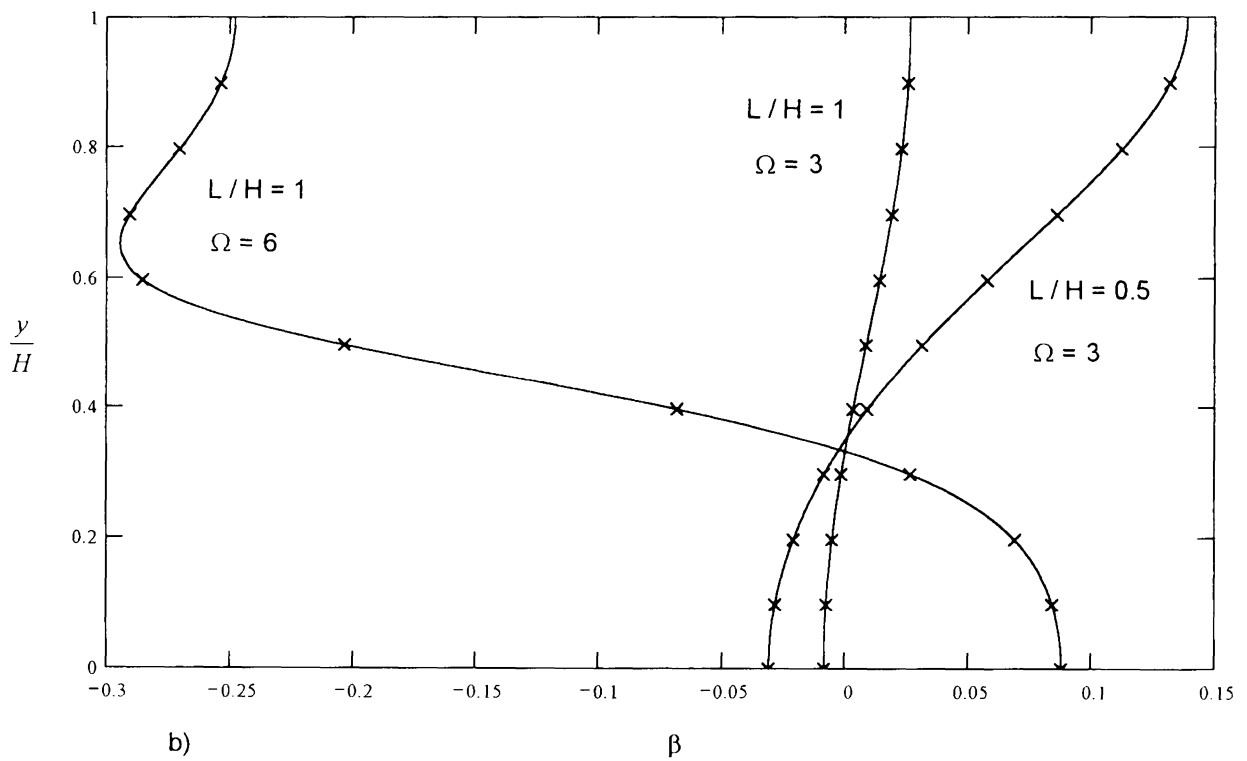
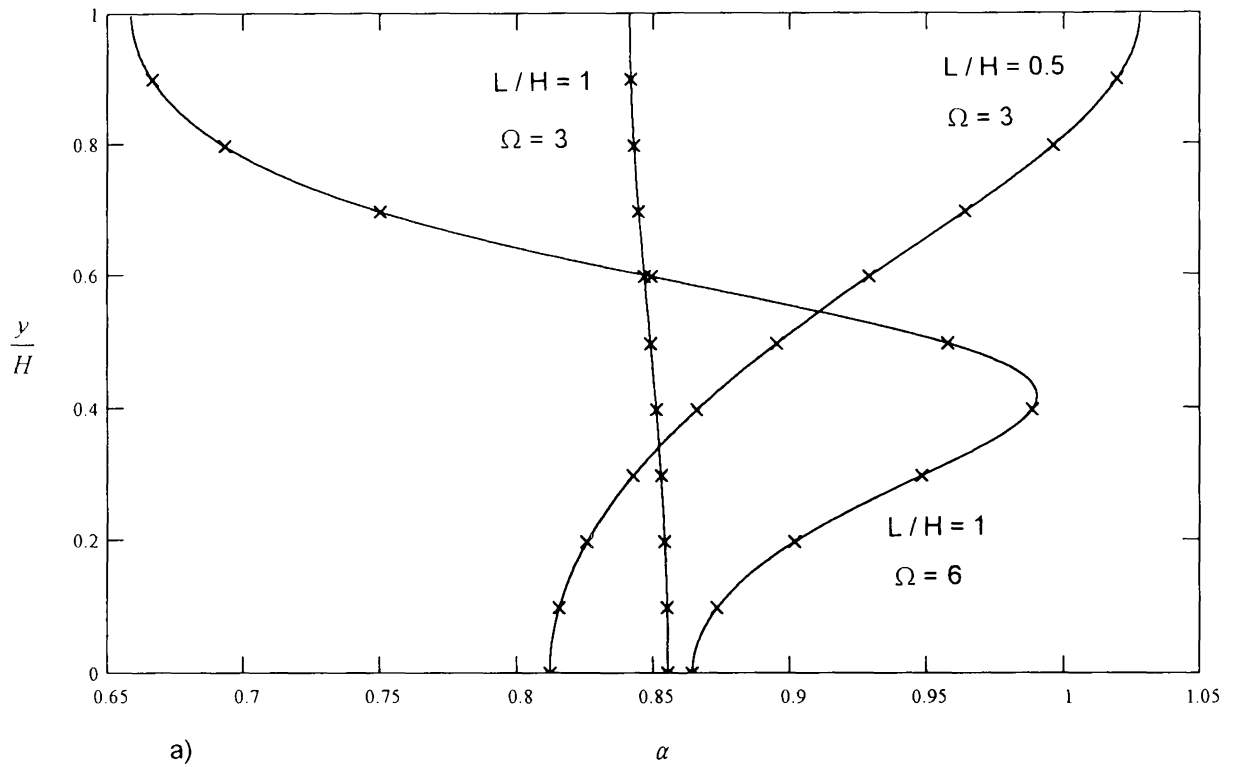


Fig. IV.4 Efecto del oleaje en los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β en $L/H = 0.5$ y 1 para $\Omega = 3$ y 6

x x x x x sin consideran el oleaje ——— considerando el oleaje

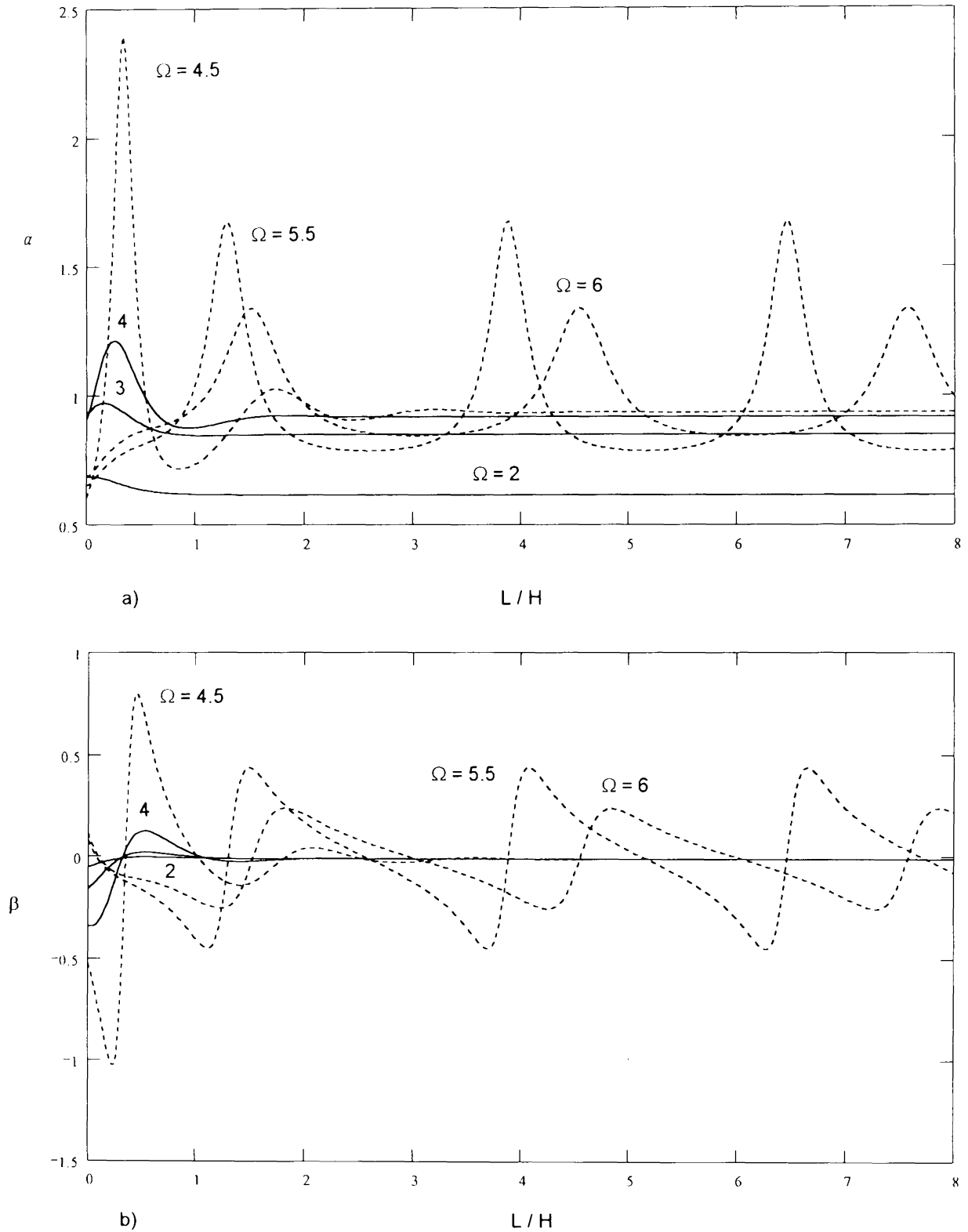


Fig. IV.5 Comportamiento de los parámetros a) α y b) β que consideran el oleaje en función de la ubicación de la frontera de radiación en $y/H = 0.5$ para $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5, \text{ y } 6$

IV.2 DESARROLLO DE LA FRONTERA DE RADIACIÓN QUE CONSIDERA LA FLEXIBILIDAD DEL FONDO

En este caso se considerará la flexibilidad del material del fondo del embalse empleando el método propuesto por Hall y Chopra [10].

El análisis de este problema es similar al caso anterior y para evitar repeticiones aquí se usarán algunas de las expresiones deducidas detalladamente en la sección anterior.

IV.2.1 Ecuación gobernante

En este caso, la presión hidrodinámica también está gobernada por la ecuación general de onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (IV.39)$$

IV.2.2 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son similares a las empleadas en el caso anterior, cambiando únicamente las condiciones en la superficie libre del líquido y en el fondo del embalse. Estas nuevas condiciones son:

- En la superficie libre del líquido la presión hidrodinámica vale cero, ya que no se está considerando el efecto del oleaje,

$$p|_{y=H} = 0 \quad (IV.40)$$

- El fondo es flexible. Para considerar la flexibilidad del fondo del embalse Hall y Chopra [10] proponen que se cumpla la siguiente condición en el fondo del embalse

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = i \omega q p(x, 0, t) \quad (IV.41)$$

Esta condición fue brevemente analizada en el capítulo II. En esta expresión la constante q se interpreta como un factor de amortiguamiento por radiación de las ondas de compresión por el fondo y se determina con la siguiente expresión

$$q = \frac{1 - \alpha_r}{c \cdot 1 + \alpha_r}$$

en donde

$$\alpha_r = \frac{1 - \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}}{1 + \frac{\gamma c}{\gamma_r c_r}}$$

En estas expresiones γ y γ_r representan los pesos específicos del agua y de la roca, c y c_r son las velocidades de las ondas de compresión en el agua y en la roca, respectivamente.

Para cada tipo de roca existen valores conocidos de γ_r y c_r , y a través de ellos se calculan las constantes α_r y q . En el caso hipotético de fondo absolutamente rígido, es decir no hay amortiguamiento de las ondas de compresión y viajan a una velocidad infinita, se cumple que $c_r = \infty$, $\alpha_r = 1$ y $q = 0$. Por el contrario, si el fondo es absolutamente flexible entonces $c_r = 0$, $\alpha_r = -1$ y $q = \infty$. Sin embargo, en el caso práctico de roca muy flexible el valor de α_r se puede limitar razonablemente a cero, por lo tanto $q = 1$ [14].

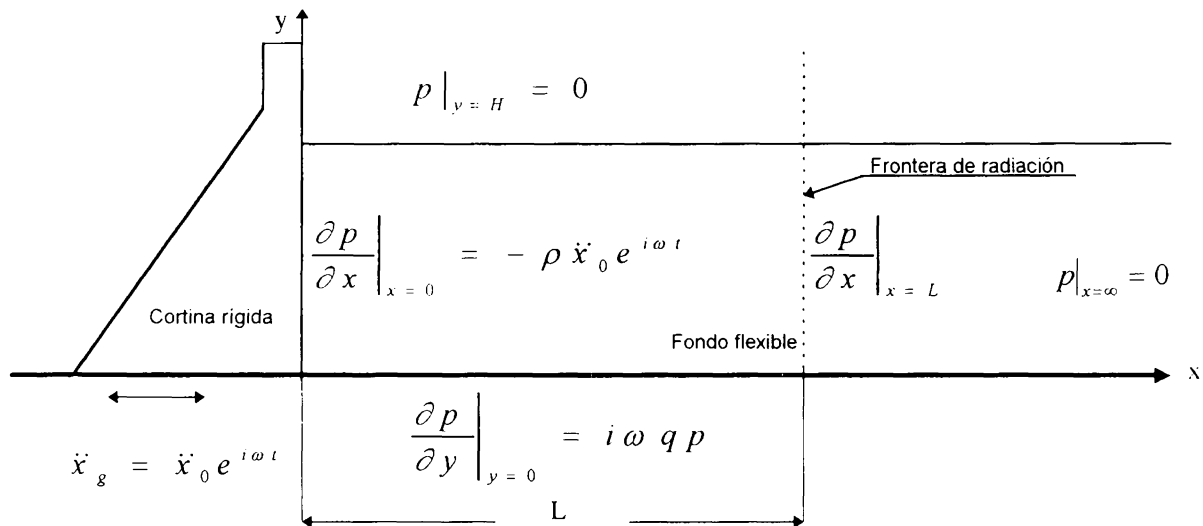


Fig. IV.6 Condiciones de frontera que consideran la flexibilidad del fondo

IV.2.3. Solución de la ecuación gobernante

Procediendo análogamente al caso anterior, se encuentra la solución general de la ecuación gobernante (IV.39), que se expresa como sigue

$$p(x, y, t) = p_i \left(B e^{\xi x} + D e^{-\xi x} \right) \left[F \cos(\eta y) + G \operatorname{sen}(\eta y) \right] \quad (IV.42)$$

donde B , D , F y G son constantes de integración.

Además se debe cumplir la siguiente condición

$$\xi^2 - \eta^2 + k^2 = 0 \quad (IV.43)$$

donde ξ , η y k son constantes que se definen por las ecuaciones (IV.12), (IV.13) y (IV.14), respectivamente. Considerando adicionalmente que $\eta = \lambda/H$, $\xi = \gamma/H$, $k = \omega/c$ y $\Omega = \omega H/c$, las ecuaciones (IV.42) y (IV.43) se escriben en la siguiente forma

$$p(x, y, t) = p_i \left(B e^{\gamma \frac{x}{H}} + D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \right) \left[F \cos\left(\lambda \frac{y}{H}\right) + G \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.44)$$

$$\gamma^2 - \lambda^2 + \Omega^2 = 0 \quad (IV.45)$$

IV.2.4 Determinación de la constante de integración B

La condición de frontera (IV.6) establece que a una distancia infinitamente grande de la cortina, la presión hidrodinámica se desvanece. De esto se deduce fácilmente que $B = 0$ y la ecuación (IV.44) queda

$$p(x, y, t) = p_i D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \left[F \cos\left(\lambda \frac{y}{H}\right) + G \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.46)$$

IV.2.5 Determinación de los parámetros λ y γ

Aplicando la condición de frontera que considera la flexibilidad del fondo, ec.(IV.41), y empleando la expresión (IV.46) se deduce lo siguiente

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = i \omega q p(x, 0, t)$$

o

$$p_t D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \frac{\lambda G}{H} = i \omega q p_t D e^{-\gamma \frac{x}{H}} F$$

y simplificando se obtiene

$$\lambda \frac{G}{F} = i \omega q H \quad (IV.47)$$

Ahora, aplicando la condición de superficie libre, ec. (IV.40), en la ecuación (IV.46) se encuentra que

$$p \Big|_{y=H} = 0 \quad \therefore \quad F \cos(\lambda) + G \operatorname{sen}(\lambda) = 0$$

de aquí

$$\frac{G}{F} = -\cot(\lambda) \quad (IV.48)$$

Relacionando las ecuaciones (IV.47) y (IV.48) y considerando una vez más que $\Omega = \omega H/c$, se deduce que

$$\lambda \cot(\lambda) + i \Omega q c = 0 \quad (IV.49)$$

La ecuación trascendente (IV.49) tiene un número infinito de soluciones y cada una de ellas es un valor propio de la ecuación diferencial (IV.39). De ahí que esta ecuación puede expresarse como sigue

$$\lambda_n \cot(\lambda_n) + i \Omega q c = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (IV.50)$$

A cada raíz de esta última ecuación le corresponde un valor de γ que se determina empleando la ecuación (IV.45), es decir

$$\gamma_n = \pm \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2} \quad (IV.51)$$

Es importante mencionar que los valores de γ_n calculados con la expresión anterior son complejos, pero en la ecuación (IV.46) sólo se deben considerar los valores que cumplan con la condición $\text{Re}[\gamma_n] > 0$.

A cada par de valores λ_n y γ_n le corresponde una solución homogénea de la ecuación diferencial gobernante (IV.39), y ya que esta ecuación es lineal entonces la solución general es igual a la superposición de las soluciones homogéneas. Esto es

$$p(x, y, t) = p_t \sum_{n=1}^{\infty} D e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[F \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + G \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (\text{IV.52})$$

La ecuación (IV.52) se puede expresar en función de una sola constante si se factoriza F y se considera la ecuación (IV.47)

$$p(x, y, t) = p_t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i \omega q H}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (\text{IV.53})$$

donde los coeficientes A_n sustituyen al producto de las constantes D y F .

Por último, aplicando la condición de frontera (IV.4) se obtienen las expresiones para calcular p_t y los coeficientes A_n . Esto es

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i \omega t}$$

Empleando (IV.53), se obtiene

$$-p_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i \omega q H}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = -\rho \ddot{x}_0 e^{i \omega t} \quad (\text{IV.54})$$

En la igualdad anterior se observa que los únicos términos que dependen del tiempo son p_t y $\rho \ddot{x}_0 e^{i \omega t}$, por lo tanto

$$p_t = \rho \ddot{x}_0 e^{i \omega t} \quad (\text{IV.55})$$

y además se debe cumplir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\omega q H}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = 1 \quad (IV.56)$$

Las constantes A_n se determinan con base en esta última expresión.

Finalmente, sustituyendo la ec. (IV.55) en la ec. (IV.53) y tomando en cuenta que $\Omega = \omega H/c$ se encuentra la expresión definitiva para calcular la presión hidrodinámica que considera la compresibilidad del agua y la flexibilidad del fondo,

$$p(x, y, t) = \rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega q c}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.57)$$

IV.2.6 Cálculo de los valores propios λ_n

Los valores propios λ_n son las raíces de la ecuación trascendente (IV.50)

$$\lambda_n \cot \lambda_n + i\Omega q c = 0$$

Las raíces de esta ecuación se pueden determinar por alguno de los métodos numéricos tradicionales. Se encontró que proponiendo las raíces λ_n calculadas por el método anterior como valores iniciales, la solución numérica converge rápidamente.

Cabe mencionar que los valores propios λ_n calculados por las fórmulas (IV.24) y (IV.50) difieren en una cantidad muy pequeña.

IV.2.7 Cálculo de los coeficientes A_n

Los coeficientes A_n se determinan a partir de la ecuación (IV.56). Considerando que $\Omega = \omega H/c$, esta ecuación puede escribirse en la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega q c}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = 1 \quad (IV.58)$$

Esta ecuación se puede resolver usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno.

Multiplicando ambos términos de la ecuación (IV.58) por $\cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right)$ e integrando desde $y = 0$ hasta $y = H$, se obtiene

$$\int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] dy = \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy$$

Haciendo algunas operaciones algebraicas y utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno, la ecuación anterior se reduce a

$$A_m = \frac{H \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy}{\gamma_m \int_0^H \cos^2\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy}$$

Evaluando las integrales anteriores y sustituyendo el subíndice m por n , en virtud de que son índices mudos, se obtiene finalmente la siguiente expresión para calcular los coeficientes A_n

$$A_n = \frac{H \operatorname{sen}(\lambda_n)}{\gamma_n \lambda_n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \operatorname{sen}(2\lambda_n) \right]} \quad (IV.59)$$

Cabe mencionar que esta fórmula es idéntica a la expresión (IV.31) obtenida en la sección anterior.

IV.2.8 Coeficiente de presión C_p

En la práctica se acostumbra expresar la amplitud de la presión hidrodinámica en la siguiente forma

$$\bar{p} = \rho \ddot{x}_0 H C_p \quad (IV.60)$$

Considerando la expresión (IV.57), el coeficiente de presión C_p es igual a

$$C_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{H} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.61)$$

Con la finalidad de conocer el efecto de la flexibilidad del fondo del embalse en el coeficiente de presión C_p , se calcularon sus valores para el caso de un coeficiente α_r igual a 0.75. Los cálculos se realizaron para un amplio rango de la frecuencia excitadora Ω . Estos resultados se compararon con resultados análogos obtenidos empleando la expresión para el coeficiente de presión (IV.33) que solo considera el efecto del oleaje.

Como se puede observar de la figura IV.7, la influencia de la flexibilidad del fondo es pequeña para frecuencias excitadoras menores que la primera frecuencia natural de vibraciones del embalse, pero es muy significativa para frecuencias mayores (fig. IV.8).

IV.2.9 Frontera de radiación

De acuerdo con los criterios expuestos en el tercer capítulo, se deduce fácilmente, a partir de la ecuación (IV.57), que la condición que se debe cumplir en la frontera de radiación es la siguiente

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.62)$$

donde L es la distancia desde la cortina hasta la frontera de radiación.

Análogamente al caso anterior, por conveniencia esta última ecuación se puede expresar en la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Z \frac{\partial p}{\partial t} \quad (IV.63)$$

donde

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]}{\Omega c \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]} \quad (IV.64)$$

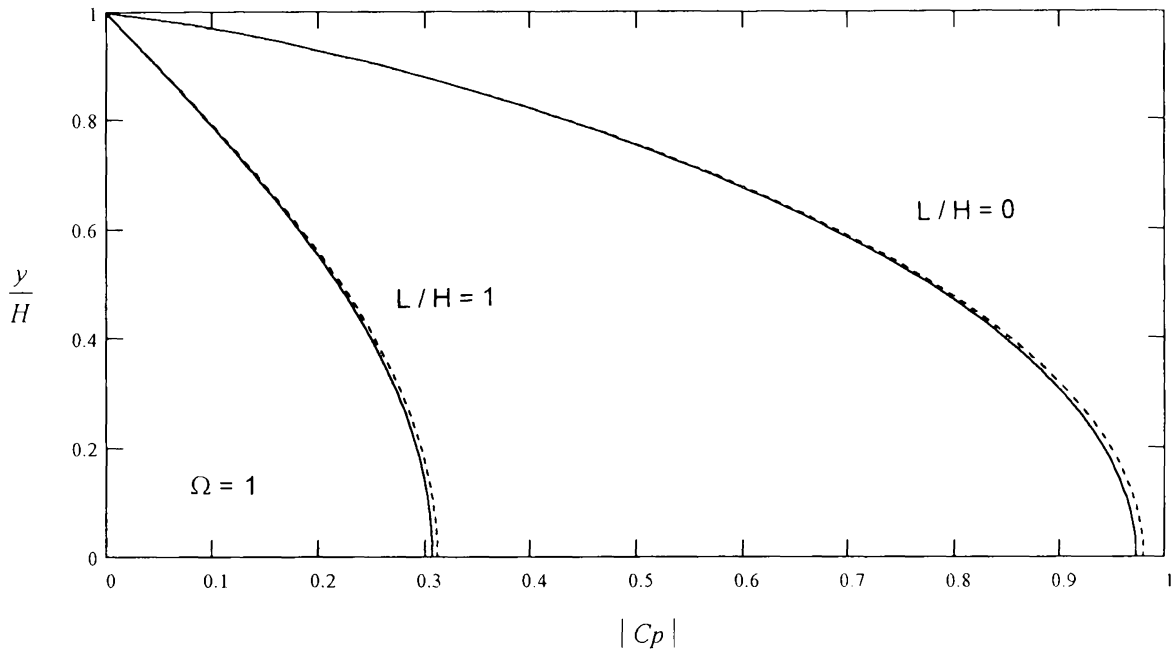


Fig. IV.7 Comparación entre los coeficientes de presión que consideran el oleaje con los que consideran la flexibilidad del fondo en $L/H = 0$ y 1 para $\Omega = 1$ y $\alpha_r = 0.75$

———— considerando solo la flexibilidad considerando solo el oleaje

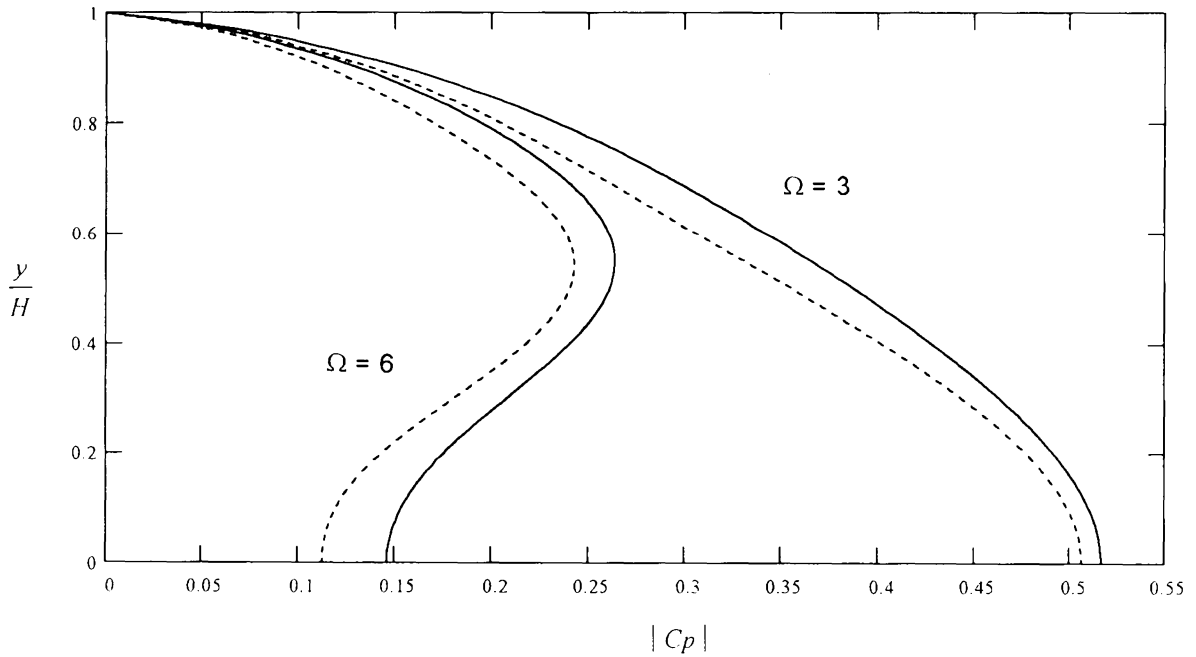


Fig. IV.8 Comparación entre los coeficientes de presión que consideran el oleaje y los que consideran la flexibilidad del fondo en $L/H = 0$ para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3$ y 6 .

———— considerando solo flexibilidad considerando solo oleaje

Ya que Z es una cantidad compleja, también se puede representar en la siguiente forma

$$Z = -\frac{1}{c}(\alpha + \beta i) \quad (IV.65)$$

donde α y β son los parámetros de amortiguamiento. La condición en la frontera de radiación puede expresarse entonces como:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\beta \omega}{c} p \Big|_{x=L} \quad (IV.66)$$

Esta última expresión es la que se incorpora al análisis por elementos finitos como frontera de radiación.

IV.2.10 Análisis de los parámetros α y β

Para conocer la influencia de la flexibilidad del fondo en los parámetros de amortiguamiento α y β se realizó un estudio paramétrico para α , igual a 0.75 y un amplio rango de valores de Ω . Los resultados obtenidos se compararon gráficamente con los encontrados en la sección anterior que consideran solamente el efecto del oleaje (figura IV.9).

En cuanto al coeficiente α se observó que para la primera frecuencia natural hay una influencia importante de la flexibilidad del fondo la cual disminuye notoriamente para las demás frecuencias (figura IV.9a). Por otro lado, en el caso del parámetro β se observó que la influencia de la flexibilidad del fondo para la primera frecuencia natural es relativamente pequeña mientras que puede ser importante para las demás frecuencias (figura IV.9b)

También se investigó el efecto de la ubicación de la frontera de radiación en el comportamiento de los coeficientes α y β , quedando de manifiesto que para frecuencias excitadoras Ω menores de 4.7 ambos coeficientes tienden a estabilizarse rápidamente y para valores de L/H cercanos a la unidad adquieren valores prácticamente constantes. Para otros valores de Ω , los coeficientes α y β tienen un comportamiento cíclico amortiguado (figura IV.10).

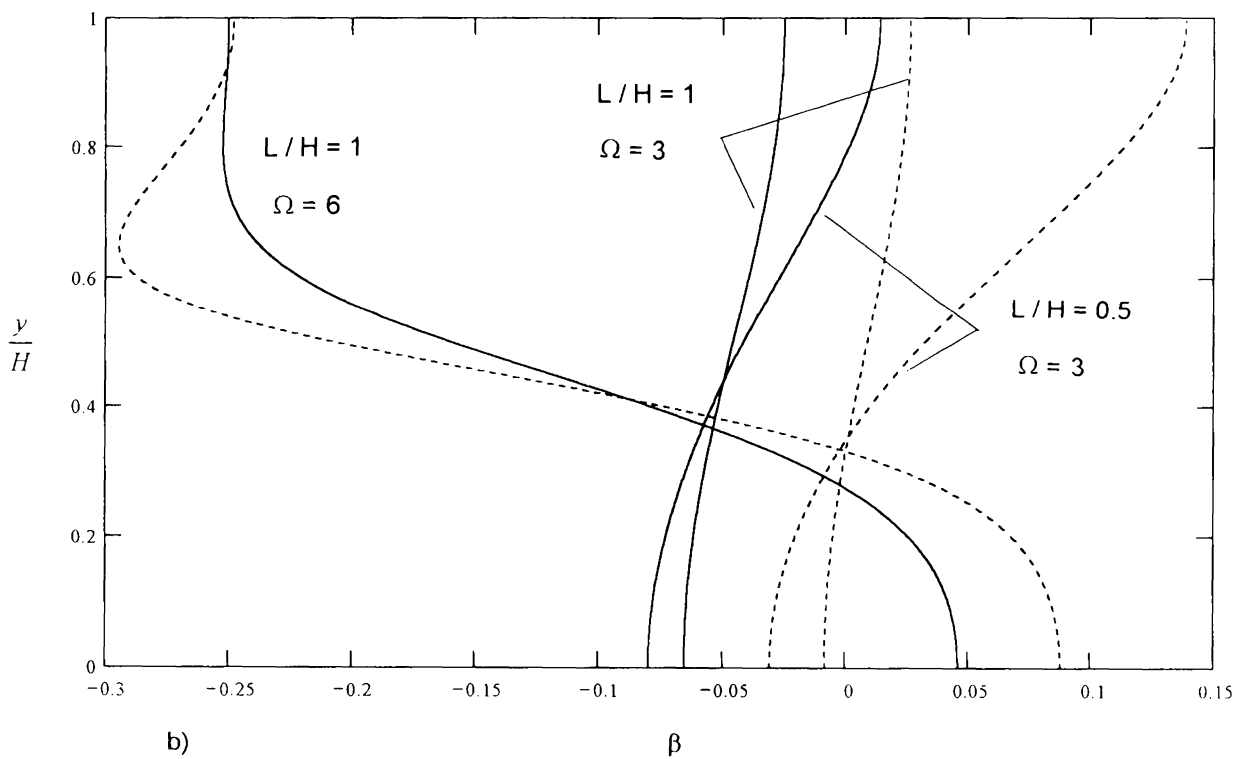
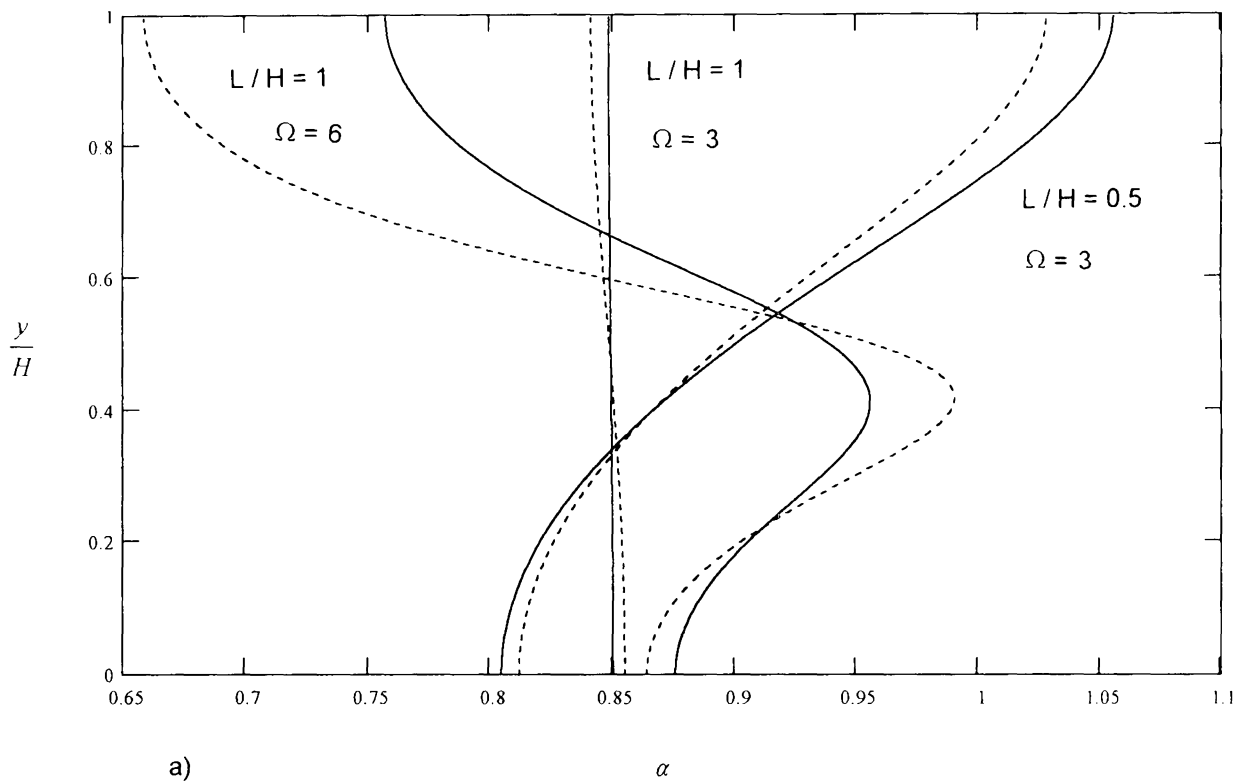


Fig. IV.9 Parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran el oleaje y la flexibilidad para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3$ y 6 en $L/H = 0.5$ y 1

..... considerando el oleaje ——— considerando la flexibilidad

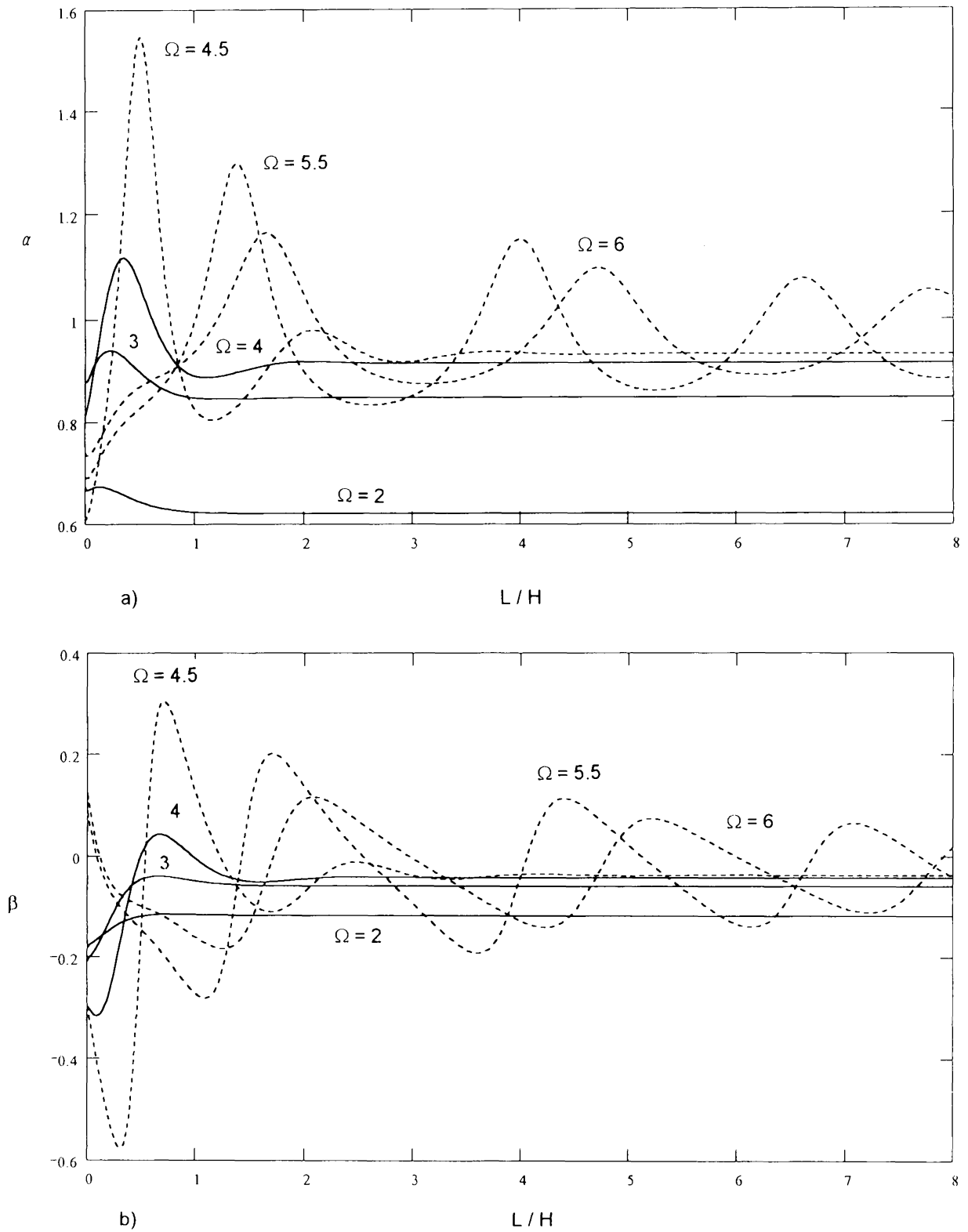


Fig. IV.10 Comportamiento de los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran la flexibilidad en función de la ubicación de la frontera de radiación para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5$ y 6 en $y/H = 0.5$.

IV.3 DESARROLLO DE LA FRONTERA DE RADIACIÓN QUE CONSIDERA EL OLEAJE Y LA FLEXIBILIDAD DEL FONDO

En este punto se desarrollará la expresión teórica de la frontera de radiación que considera tanto el efecto del oleaje como de la flexibilidad del material del fondo del embalse.

IV.3.1 Ecuación gobernante

Al igual que en los dos casos anteriores, la ecuación que gobierna la presión hidrodinámica en los líquidos compresibles es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (IV.67)$$

También se considera que el suelo y la cortina vibran con la misma aceleración horizontal

$$\ddot{x}_g(t) = \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (IV.68)$$

IV.3.2 Condiciones de frontera

En este caso se considerarán simultáneamente las condiciones de frontera que caracterizan el oleaje en la superficie del embalse y la flexibilidad del fondo.

Las condiciones de frontera que se emplearán son las siguientes:

- La cortina y el agua tienen el mismo movimiento en $x = 0$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (IV.69)$$

- En la superficie libre del líquido se genera un oleaje debido al movimiento de la cortina, que cumple con la condición de Poisson

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} = 0 \quad (IV.70)$$

- En el infinito la presión hidrodinámica se anula

$$p|_{x=\infty} = 0 \quad (IV.71)$$

- El fondo es flexible. De acuerdo con la condición de frontera propuesta por Hall y Chopra [10], se debe cumplir

$$\frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{y=0} = i\omega q p(x, 0, t) \quad (IV.72)$$

Estas condiciones de frontera se ilustran en la figura IV.11

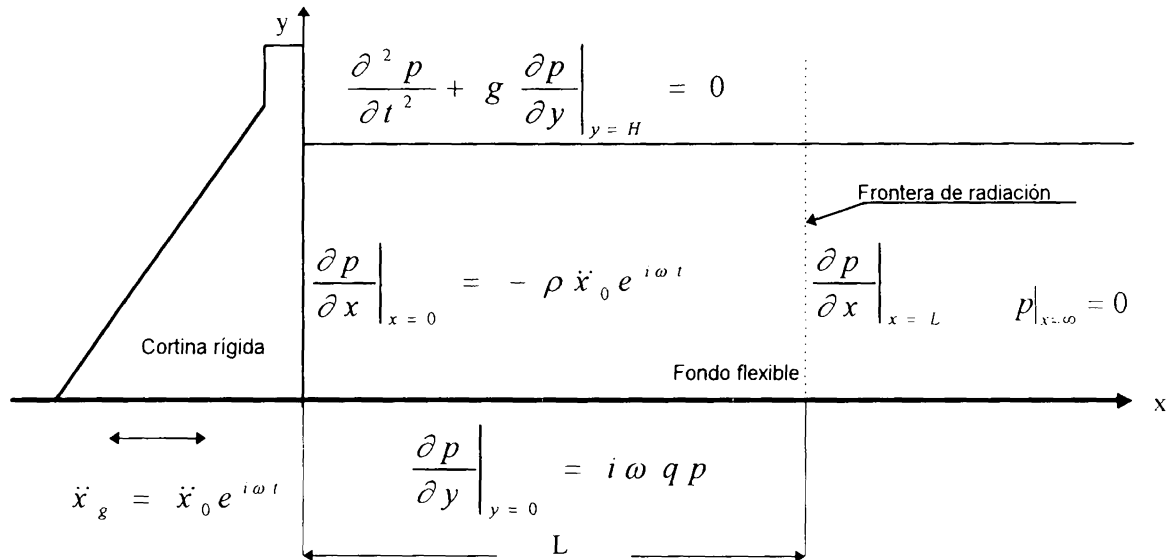


Fig. IV.11 Condiciones de frontera que consideran el oleaje y la flexibilidad del fondo

IV.3.3 Solución de la ecuación gobernante

Procediendo análogamente a los casos anteriores, se puede demostrar que la solución de la ecuación gobernante (IV.67) es

$$p(x, y, t) = p_i (B e^{\xi x} + D e^{-\xi x}) [F \cos(\eta y) + G \text{sen}(\eta y)] \quad (IV.73)$$

donde B , D , F y G son constantes de integración.

Además debe cumplirse la siguiente condición

$$\xi^2 - \eta^2 + k^2 = 0 \quad (IV.74)$$

donde ξ, η y k son constantes que se definen por las ecuaciones (IV.12), (IV.13) y (IV.14), respectivamente. Considerando adicionalmente que $\eta = \lambda/H$, $\xi = \gamma/H$, $k = \omega/c$ y $\Omega = \omega H/c$, las ecuaciones (IV.73) y (IV.74) pueden escribirse como

$$p(x, y, t) = p_t \left(B e^{\gamma \frac{x}{H}} + D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \right) \left[F \cos\left(\lambda \frac{y}{H}\right) + G \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.75)$$

$$\gamma^2 - \lambda^2 + \Omega^2 = 0 \quad (IV.76)$$

IV.3.4 Determinación de la constante de integración B

La condición de frontera (IV.6) establece que a una distancia infinitamente grande de la cortina, la presión hidrodinámica es igual a cero. De esto se deduce fácilmente que $B = 0$ y la ecuación (IV.75) se reduce a

$$p(x, y, t) = p_t D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \left[F \cos\left(\lambda \frac{y}{H}\right) + G \operatorname{sen}\left(\lambda \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.77)$$

IV.3.5 Determinación de los parámetros λ y γ

Sustituyendo la ecuación (IV.77) en la condición de frontera que considera la flexibilidad del fondo, ecuación (IV.72), se deduce

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = i \omega q p(x, 0, t)$$

o

$$p_t D e^{-\gamma \frac{x}{H}} \frac{\lambda G}{H} = i \omega q p_t D e^{-\gamma \frac{x}{H}} F$$

y simplificando se obtiene

$$\lambda \frac{G}{F} = i \omega q H \quad (IV.78)$$

Considerando a continuación la condición de superficie libre

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0$$

y recordando que $p_t = \bar{p}_t e^{i\omega t}$, se obtiene

$$-\omega^2 [F \cos(\lambda) + G \operatorname{sen}(\lambda)] + g \frac{\lambda}{H} [-F \operatorname{sen}(\lambda) + G \cos(\lambda)] = 0$$

o bien

$$\left(\omega^2 \frac{G}{F} + g \frac{\lambda}{H} \right) \tan(\lambda) - \left(g \frac{\lambda}{H} \frac{G}{F} - \omega^2 \right) = 0 \quad (IV.79)$$

Sustituyendo la ecuación (IV.78) en la (IV.79) y recordando que $\Omega = \omega H/c$, se encuentra:

$$\left(\frac{i \Omega^3 c^3 q}{\lambda H^2} + g \frac{\lambda}{H} \right) \tan(\lambda) + \left(\frac{\Omega^2 c^2}{H^2} - \frac{i \Omega q c}{\lambda} g \right) = 0 \quad (IV.80)$$

La ecuación trascendente (IV.80) es una función periódica, discontinua que tiene un número infinito de soluciones y cada solución es un valor propio de la ecuación diferencial (IV.67)

Tomando en cuenta esto último, la ecuación (IV.80) puede expresarse como sigue

$$\left(\frac{i \Omega^3 c^3 q}{\lambda_n H^2} + g \frac{\lambda_n}{H} \right) \tan(\lambda_n) + \left(\frac{\Omega^2 c^2}{H^2} - \frac{i \Omega q c}{\lambda_n} g \right) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (IV.81)$$

A cada raíz λ_n de esta última ecuación le corresponde un valor de γ_n que se determina empleando la ecuación (IV.76)

$$\gamma_n = \pm \sqrt{\lambda_n^2 - \Omega^2} \quad (IV.82)$$

Se debe mencionar que los valores de γ_n calculados con la ecuación anterior son complejos, pero en la ecuación (IV.77) sólo se deben tomar los valores que cumplan con la condición $\text{Re}[\gamma_n] > 0$.

A cada par de valores λ_n y γ_n le corresponde una solución homogénea de la ecuación diferencial gobernante (IV.67), y ya que esta ecuación es lineal entonces se establece la solución general como la superposición de las soluciones homogéneas. Esto es

$$p(x, y, t) = p_t \sum_{n=1}^{\infty} D e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[F \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + G \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (\text{IV.83})$$

La ecuación anterior se puede expresar en función de una sola constante si se factoriza F y se sustituye en ella la ecuación (IV.78). Considerando además que $\Omega = \omega H/c$, se obtiene

$$p(x, y, t) = p_t \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (\text{IV.84})$$

donde los coeficientes A_n sustituyen al producto de las constantes D y F .

Por último, aplicando la condición de frontera (IV.69) se obtienen las expresiones para determinar p_t y los coeficientes A_n . Esto es

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$$

Aplicando la ecuación (IV.84), se obtiene

$$-p_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = -\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{IV.85})$$

En esta igualdad se observa que los únicos términos que dependen del tiempo son p_t y $\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t}$, por lo tanto se deben cumplir las siguientes expresiones:

$$p_t = \rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{IV.86})$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = 1 \quad (IV.87)$$

las constantes A_n se determinan en base a esta última ecuación.

Finalmente, sustituyendo la ec. (IV.86) en la ec. (IV.84) se obtiene la expresión definitiva para calcular la presión hidrodinámica que considera la compresibilidad del agua, el efecto del oleaje y la flexibilidad del fondo del embalse

$$p(x, y, t) = \rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.88)$$

IV.3.6 Cálculo de los valores propios λ_n

Los valores propios λ_n son las raíces de la ecuación trascendente (IV.81)

$$\left(\frac{i\Omega^3 c^3 q}{\lambda_n H^2} + g \frac{\lambda_n}{H} \right) \tan(\lambda_n) + \left(\frac{\Omega^2 c^2}{H^2} - \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} g \right) = 0$$

Las raíces de esta ecuación se pueden determinar por alguno de los métodos numéricos tradicionales. Se encontró que proponiendo los valores de λ_n calculadas por la expresión (IV.24) del primer caso como valores iniciales, la solución numérica converge rápidamente.

Cabe mencionar que los valores propios λ_n calculados por las fórmulas (IV.24) y (IV.50) y (IV.81) difieren en una cantidad muy pequeña.

IV.3.7 Cálculo de los coeficientes A_n

Los coeficientes A_n se calculan a partir de la ecuación (IV.87)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] = 1$$

Esta ecuación es fácil resolverla usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno como se hace en seguida.

Multiplicando ambos términos de la ecuación (IV.87) por $\cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right)$ e integrando desde $y = 0$ hasta $y = H$, se obtiene

$$\int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{H} A_n \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \operatorname{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] dy = \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy$$

Haciendo algunas transformaciones algebraicas y utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno, la expresión anterior se reduce a

$$A_m = \frac{H \int_0^H \cos\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy}{\gamma_m \int_0^H \cos^2\left(\lambda_m \frac{y}{H}\right) dy}$$

Evalutando las integrales de la expresión anterior y cambiando el subíndice m por n , ya que son índices mudos, se obtiene finalmente la siguiente expresión para calcular los coeficientes A_n

$$A_n = \frac{H \operatorname{sen}(\lambda_n)}{\gamma_n \lambda_n \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \operatorname{sen}(2\lambda_n) \right]} \quad (IV.89)$$

Es de notarse que los coeficientes A_n , en los tres casos analizados en este trabajo, se determinan por expresiones idénticas.

IV.3.8 Coeficiente de presión C_p

Es común expresar la amplitud de la presión hidrodinámica en la siguiente forma

$$\bar{p} = \rho \ddot{x}_0 H C_p \quad (IV.90)$$

Considerando la expresión (IV.88), el coeficiente de presión C_p se determina por la siguiente fórmula:

$$C_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{H} e^{-\gamma_n \frac{x}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.91)$$

Esta fórmula es completamente similar a la obtenida en la sección anterior, por lo que se puede concluir nuevamente que el oleaje no tiene ningún efecto apreciable sobre la presión hidrodinámica.

Sin embargo, con la finalidad de comprobar el efecto combinado del oleaje y de la flexibilidad del fondo en el coeficiente de presión C_p , se calcularon sus valores para α , igual a 0.75 y un amplio rango de la frecuencia excitadora Ω . Los resultados obtenidos en este caso se compararon con los resultados encontrados en el punto anterior que toman en cuenta solo la flexibilidad del fondo, esta comparación se muestra en las figuras IV.12 y IV.13. Las observaciones realizadas en la sección anterior referentes al coeficiente C_p también son válidas para este caso.

IV.3.9 Frontera de radiación

Tomando el mismo criterio de los puntos anteriores y considerando la ecuación (IV.88) en la frontera de radiación se debe cumplir la siguiente condición

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\rho \ddot{x}_0 e^{i\omega t}}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right] \quad (IV.92)$$

donde L es la distancia desde la cortina hasta la frontera de radiación.

Al igual que los casos anteriores esta condición se puede expresar en la forma siguiente

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Z \frac{\partial p}{\partial t} \quad (IV.93)$$

donde

$$Z = \frac{i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n \frac{L}{H}} \left[\cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) + \frac{i\Omega qc}{\lambda_n} \text{sen}\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \right]} \quad (IV.94)$$

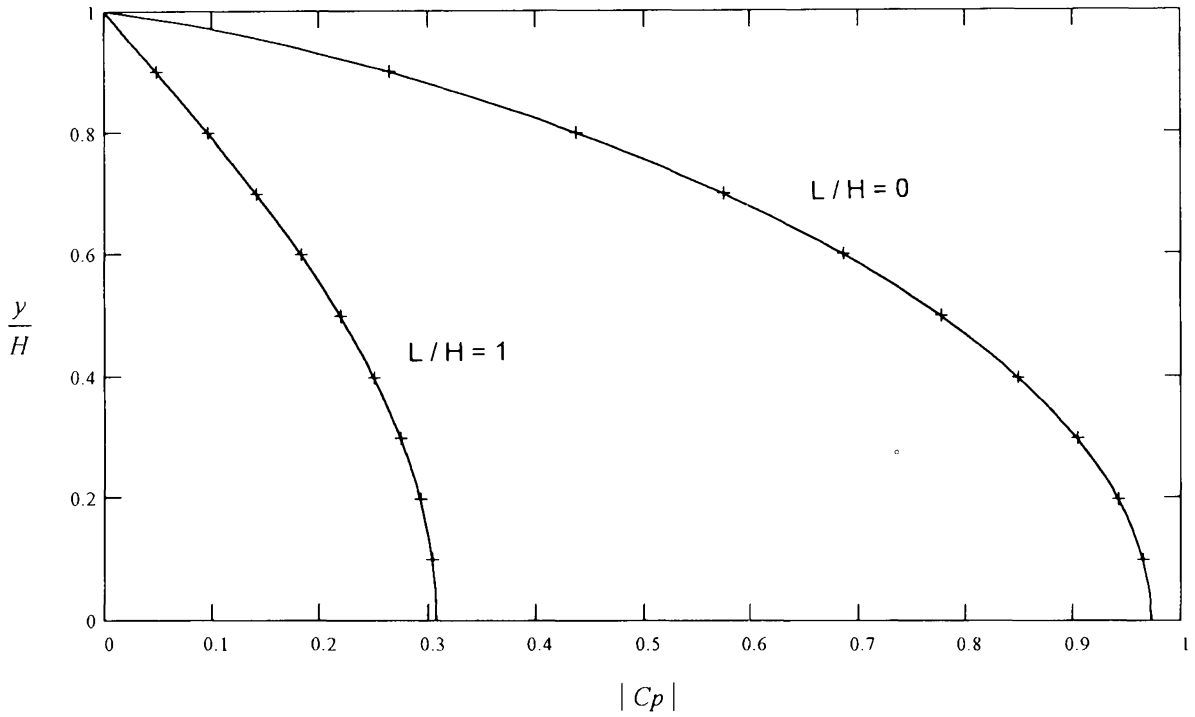


Fig. IV.12 Comparación entre los coeficientes de presión que consideran oleaje y flexibilidad con los que consideran solo flexibilidad para $\Omega = 1$ y $\alpha_r = 0.75$ en $L/H = 0$ y 1

———— considerando flexibilidad y oleaje + + + considerando flexibilidad

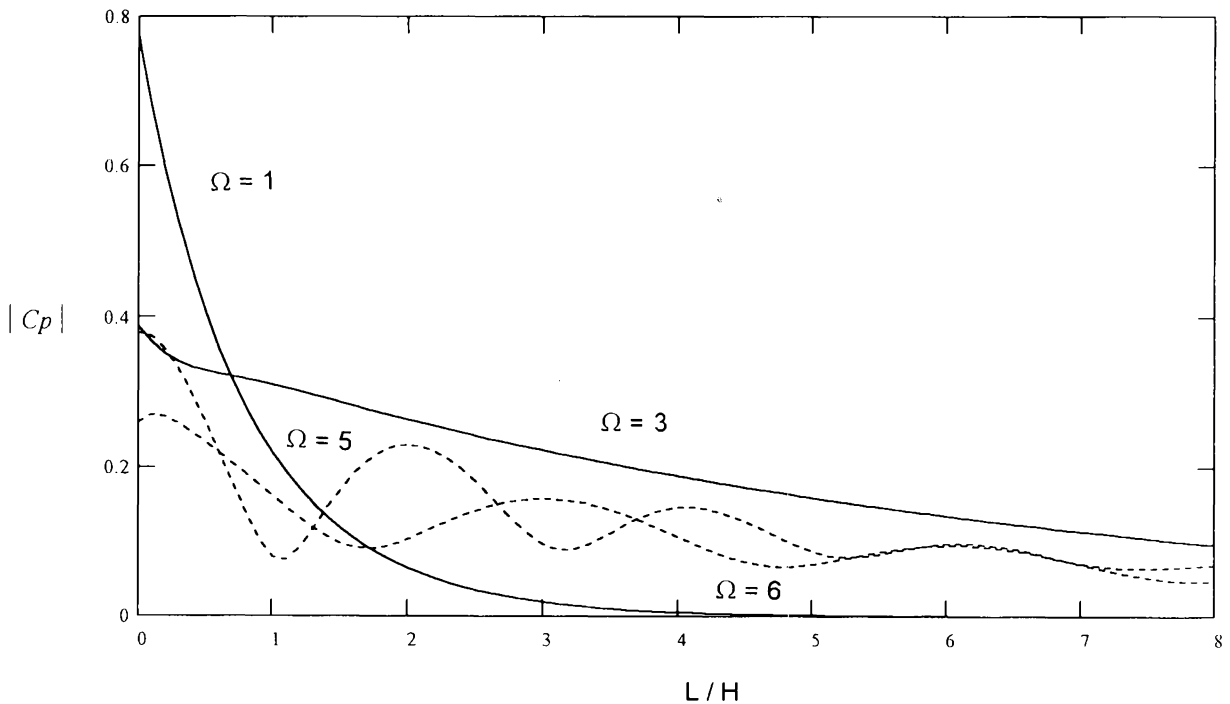


Fig. IV.13 Comportamiento del coeficientes de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo en función de la ubicación de la frontera de radiación en $y/H = 0.5$ para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 1, 3, 5$ y 6

Considerando que Z es una cantidad compleja, también se puede representar en la siguiente forma

$$Z = -\frac{1}{c}(\alpha + \beta i) \quad (IV.95)$$

donde α y β son los nuevos parámetros de amortiguamiento.

Considerando la ecuación (IV.93) la condición en la frontera de radiación se puede escribir como sigue

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\beta \omega}{c} p \Big|_{x=L} \quad (IV.96)$$

La expresión (IV.96) es la que finalmente se incorporará al análisis por elementos finitos como frontera de radiación.

IV.3.10 Análisis de los parámetros α y β

Como era de esperarse, el oleaje tampoco afecta en forma importante a los parámetros de amortiguamiento α y β como puede comprobarse fácilmente al observar la figura (IV.14). Todos los comentarios que se hicieron para el caso anterior son igualmente válidos para este caso.

También se investigó el efecto de la ubicación de la frontera de radiación en el comportamiento de los coeficientes α y β , quedando de manifiesto que para frecuencias excitadoras Ω menores de 4.0 ambos coeficientes tienden a estabilizarse rápidamente y para valores de L/H cercanos a la unidad adquieren valores prácticamente constantes. Para otros valores de Ω , los coeficientes α y β tienen un comportamiento cíclico amortiguado (figura IV.15).

De las observaciones realizadas, se corrobora la conclusión hecha en la sección anterior en el sentido de que es conveniente ubicar la frontera de radiación a una distancia $L/H = 1$.

Para terminar este capítulo se presenta en las figuras IV.16 y IV.17 las gráficas del módulo del coeficiente de presión hidrodinámica para distintos valores de Ω y α . En ellas se observa claramente que para valores de $\Omega < 1$ el efecto de la flexibilidad del fondo es pequeño. Por el contrario, cuando $\Omega > 1$ este efecto es muy importante y sería erróneo despreciarlo.

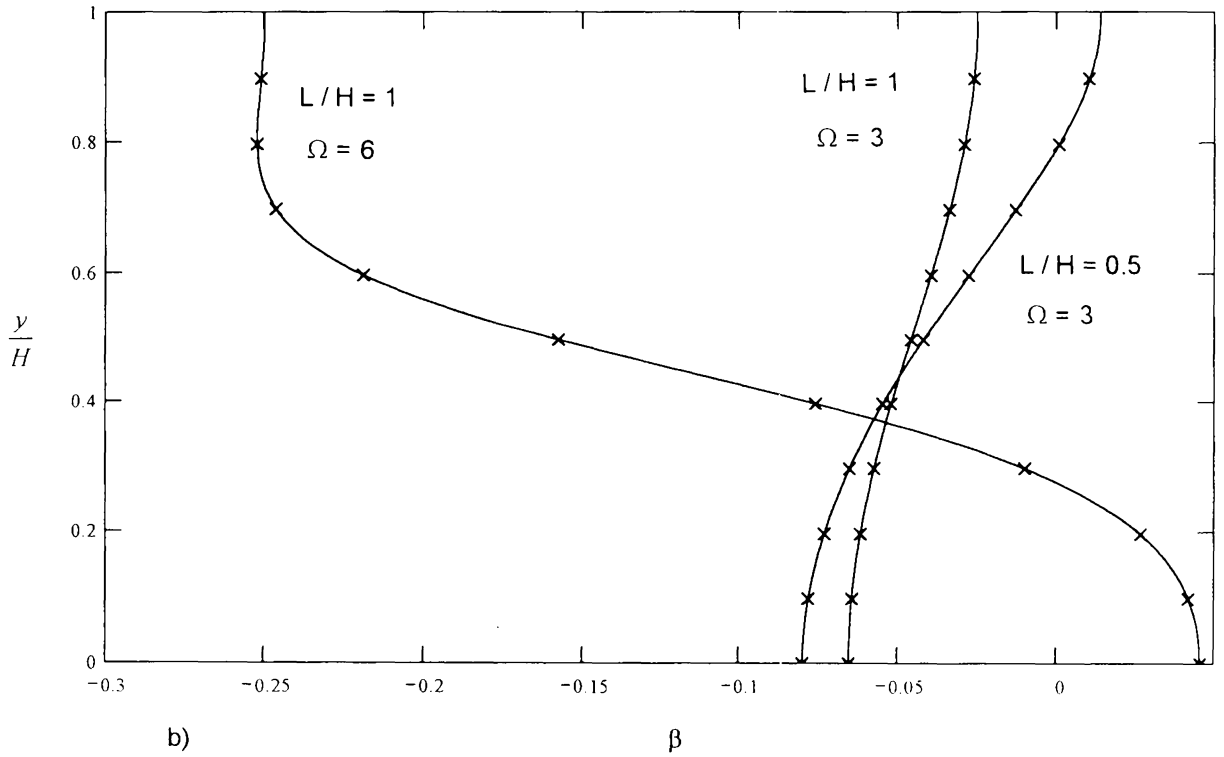
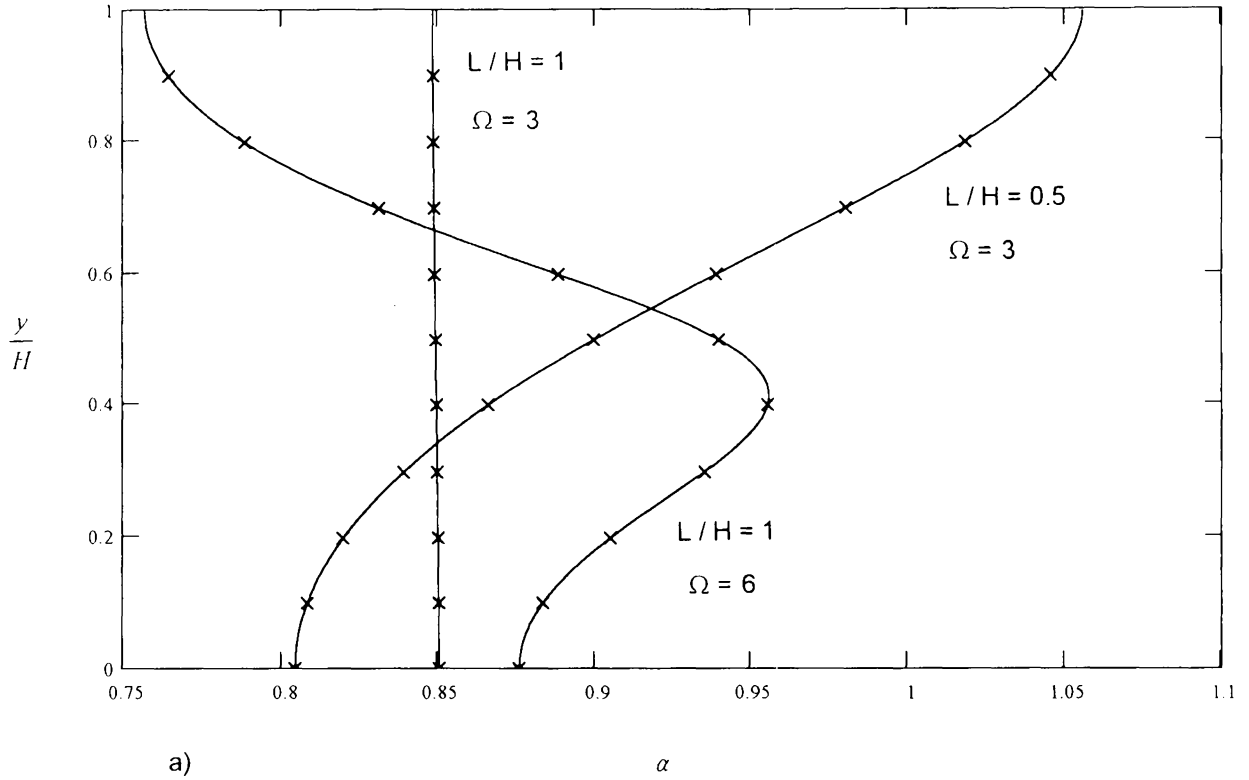


Fig. IV.14 Comparación entre los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran la flexibilidad y el oleaje con flexibilidad en $L/H = 0.5$ y 1 para $\alpha_r = 0.75$ y $\Omega = 3$ y 6

x x x x x x x oleaje ————— oleaje y flexibilidad

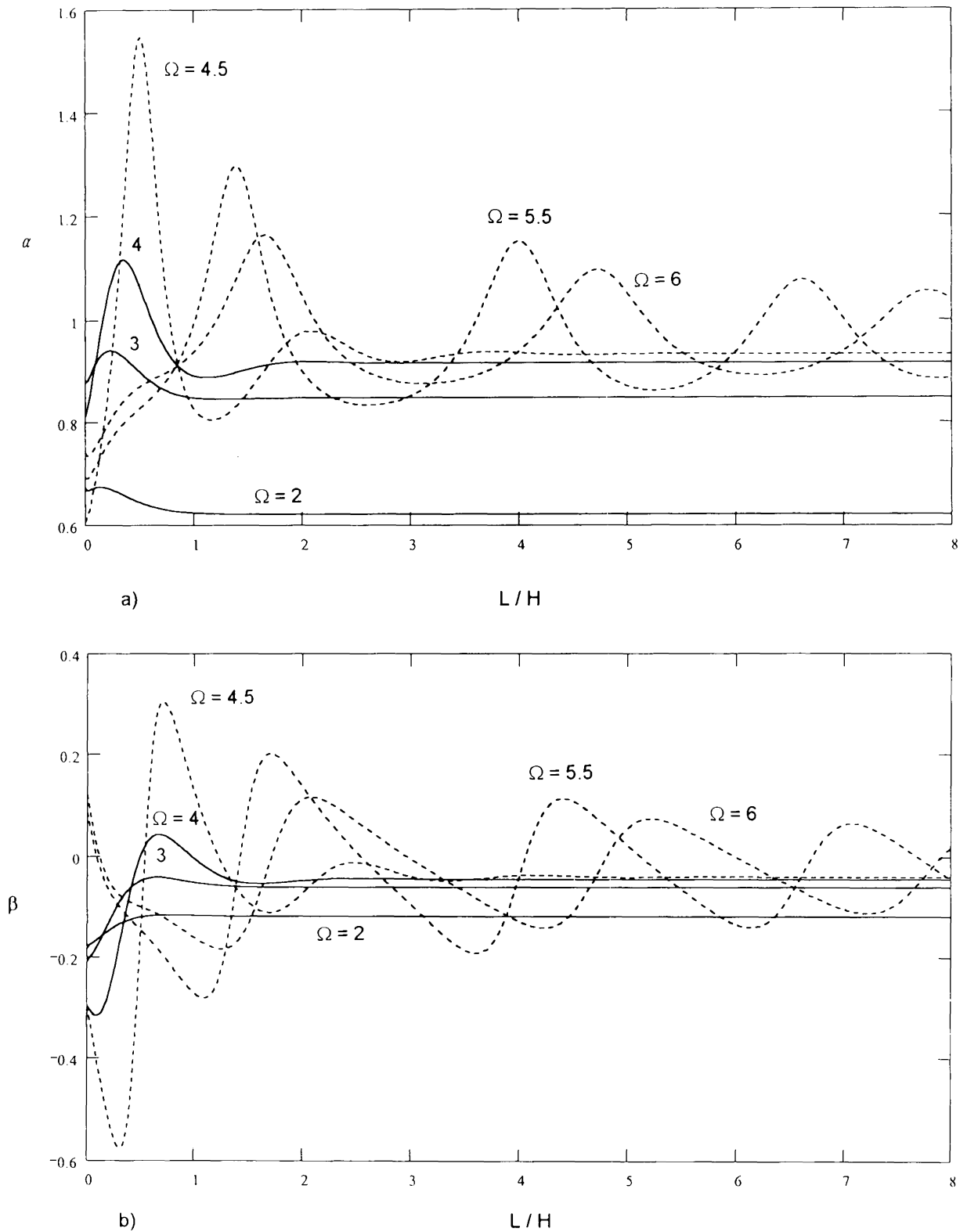


Fig. IV.15 Comportamiento de los parámetros de amortiguamiento a) α y b) β que consideran el oleaje y flexibilidad en función de la ubicación de la frontera de radiación para $\Omega = 2, 3, 4, 4.5, 5.5$ y 6 y $\alpha_r = 0.75$ en $y/H = 0.5$

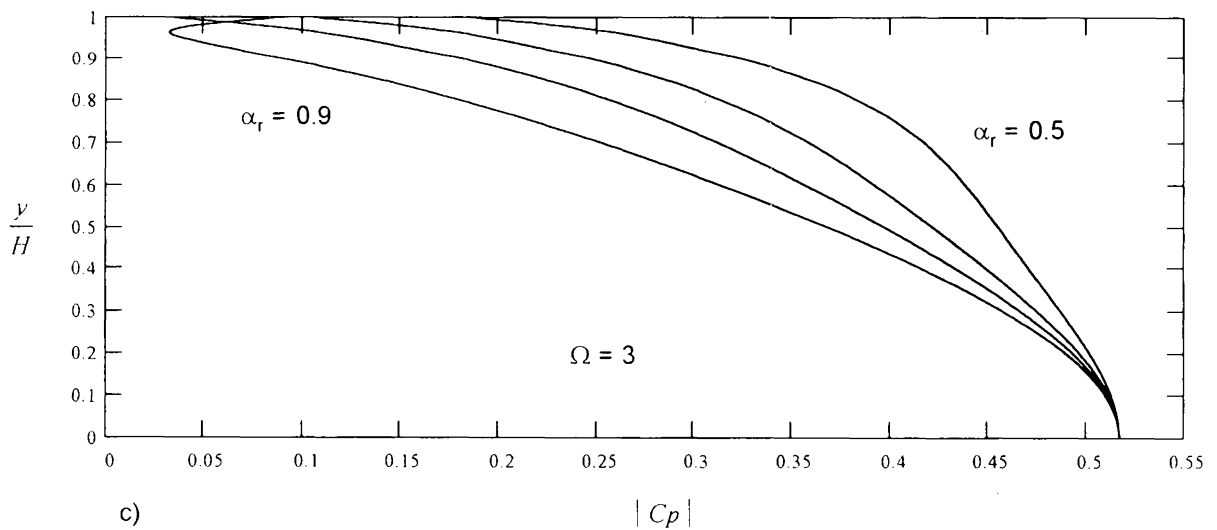
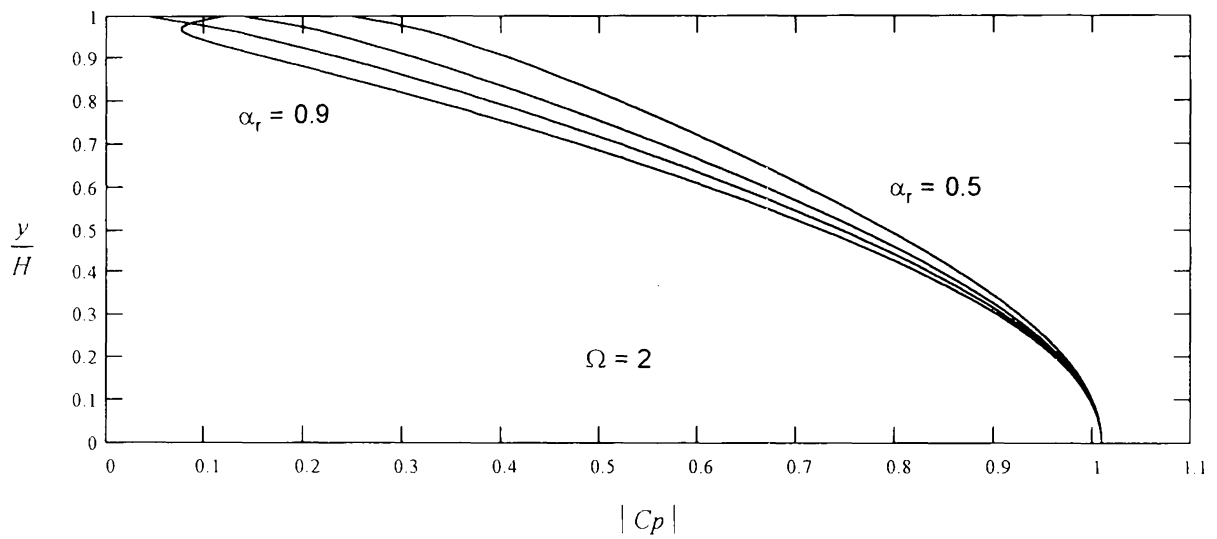
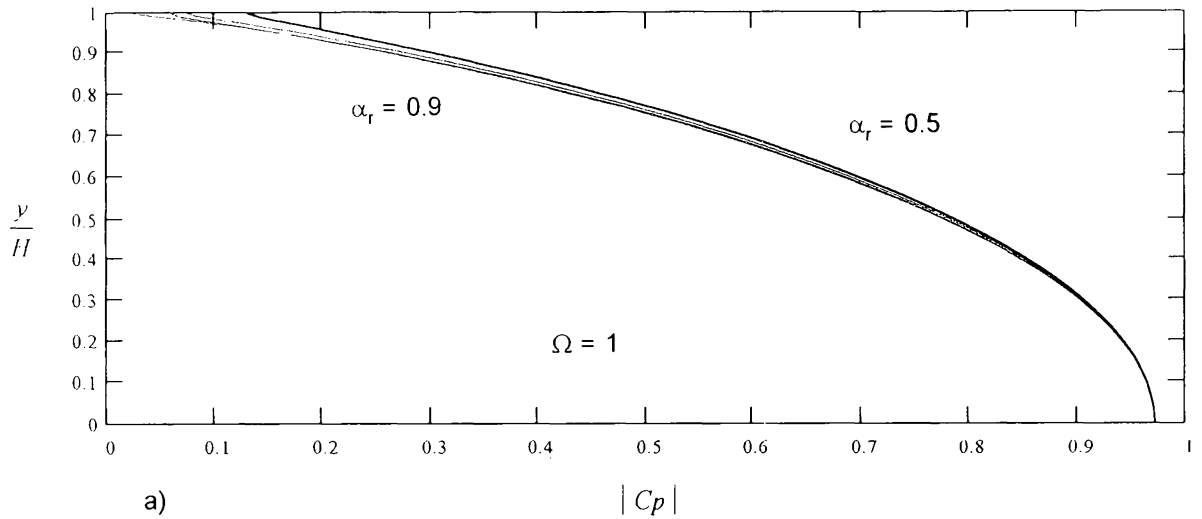


Fig. IV.16 Gráficas para determinar el coeficiente de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo para en $L/H=0$ para $\alpha_r = 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.9
 a) $\Omega = 1$ b) $\Omega = 2$ c) $\Omega = 3$

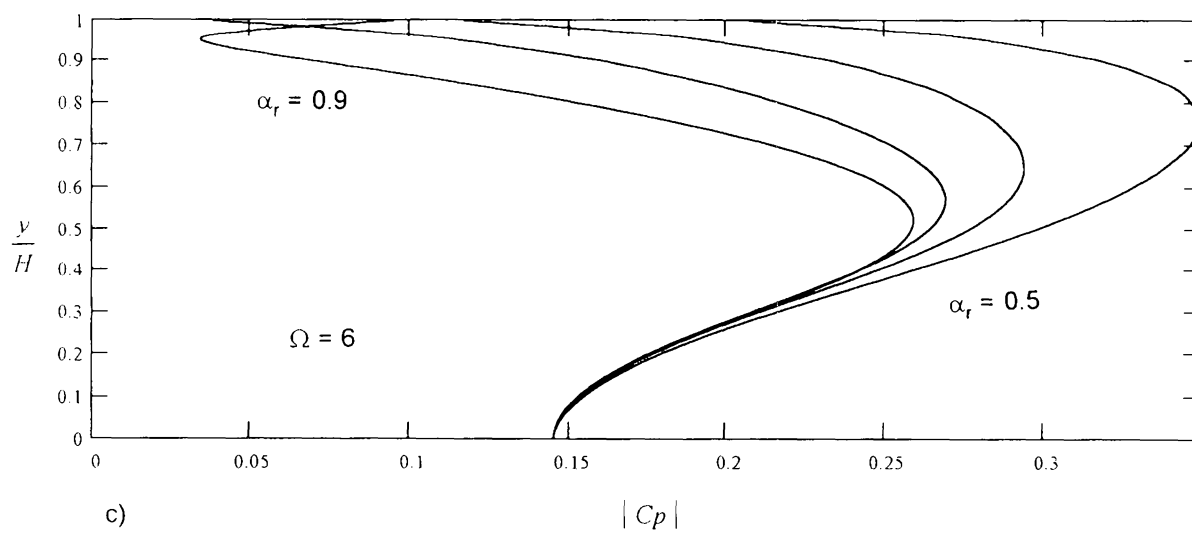
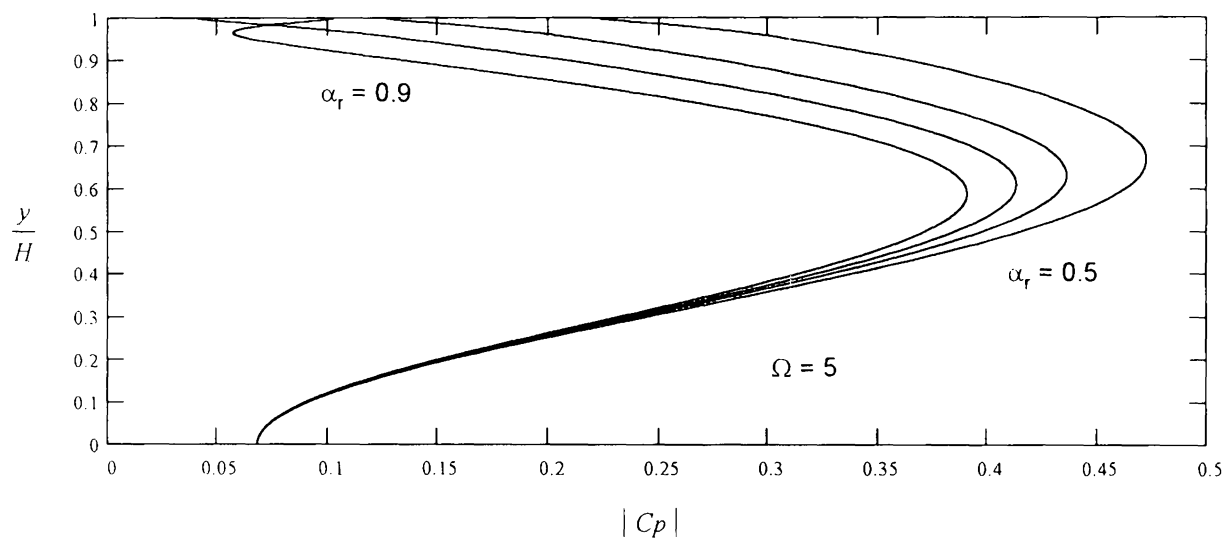
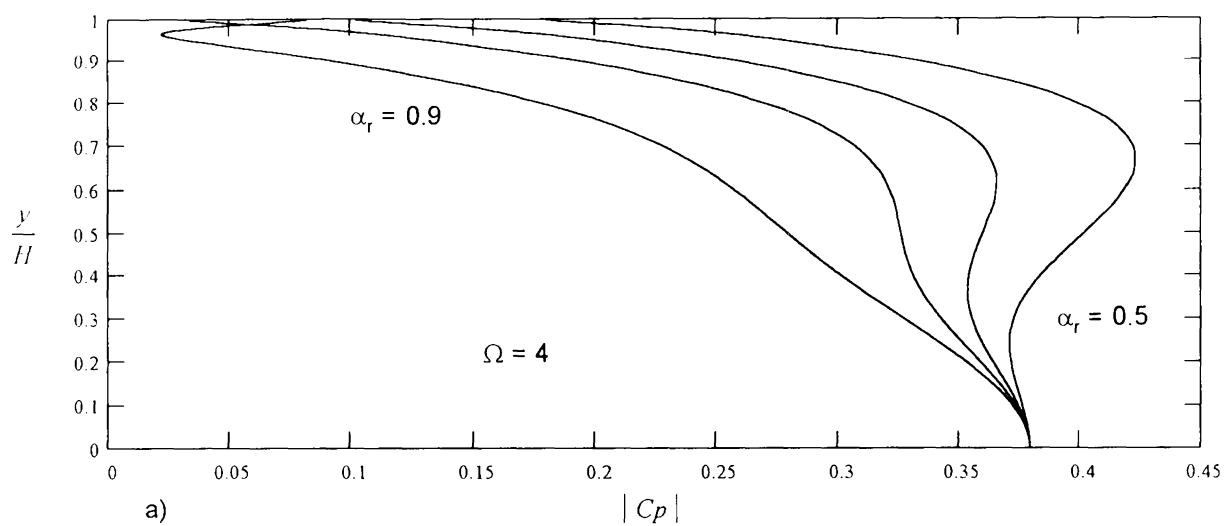


Fig. IV.17 Gráficas para determinar el coeficiente de presión que considera oleaje y flexibilidad del fondo en $L/H=0$ para $\alpha_r = 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.9

a) $\Omega = 4$ b) $\Omega = 5$ c) $\Omega = 6$

CAPÍTULO V

FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

En este capítulo se presentará el desarrollo de la formulación de las ecuaciones básicas para el cálculo de la presión hidrodinámica por el método de los elementos finitos.

El cálculo de las presiones hidrodinámicas por el método de los elementos finitos requiere de la discretización del dominio que está modelado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (V.1)$$

y que está acotado por las siguientes condiciones de frontera (figura V.1):

- en la superficie libre Γ_1 ($y = H$)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (V.2)$$

- en el paramento de la cortina Γ_2 ($x = 0$)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{x} \quad (V.3)$$

- en el fondo flexible Γ_3 ($y = 0$)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = i\omega q p \quad (V.4)$$

- en la frontera de radiación Γ_4 ($x = L$)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha}{c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\beta\omega}{c} p \quad (V.5)$$

El embalse será discretizado como un ensamble de elementos finitos considerando que las presiones nodales son las incógnitas. Se empleará el método de Galerkin para la formulación de las ecuaciones básicas y, se adoptará la siguiente notación:

$$\{ \} = \{ \vdots \} \quad \text{vector}$$

$$[] = [\vdots \vdots \vdots] \quad \text{matriz}$$

Aplicando el método de Galerkin a cada elemento del dominio se obtiene

$$-\int_A \{N\} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) dA = 0 \quad (V.6)$$

donde $\{N\}$ es el vector que contiene las funciones de forma del elemento.

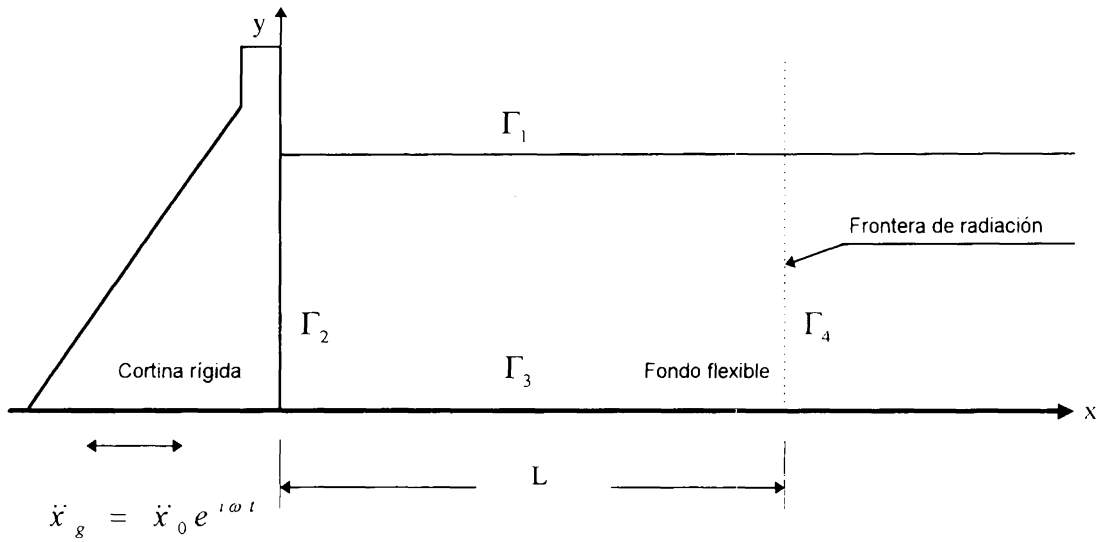


Fig. V.1 Condiciones de frontera que consideran el oleaje y la flexibilidad del fondo

Desarrollando la ecuación anterior se encuentra que

$$-\int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dA - \int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} dA + \frac{1}{c^2} \int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dA = 0 \quad (V.7)$$

Por otra parte, empleando el primer teorema de Green se pueden demostrar las siguientes igualdades

$$-\int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dA = -\int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial p}{\partial x} n_x d\Gamma + \int_A \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dA \quad (V.8)$$

$$-\int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} dA = -\int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial p}{\partial y} n_y d\Gamma + \int_A \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} dA \quad (V.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (V.8) y (V.9) en la expresión (V.7) y simplificando se obtiene

$$\int_A \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dA + \frac{1}{c^2} \int_A \{N\} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dA - \int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (V.10)$$

donde se consideró que

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y$$

Considerando ahora que la presión hidrodinámica en el interior de un elemento se determina por la siguiente expresión

$$p = \{N\}^T \{p\} \quad (V.11)$$

donde $\{p\}$ es el vector que contiene las presiones hidrodinámicas en los nodos del elemento. Sustituyendo la ecuación (V.11) en la ecuación (V.10) se encuentra la aportación de cada elemento al sistema, que se puede expresar en la siguiente forma

$$[G]\{p\} + [H]\{\ddot{p}\} = \{L\} \quad (V.12)$$

donde

$$[G] = \int_A \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) dA \quad (V.13)$$

$$[H] = \frac{1}{c^2} \int_A \{N\} \{N\}^T dA \quad (V.14)$$

$$\{L\} = \int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \quad (V.15)$$

y \ddot{p} es la segunda derivada de la presión hidrodinámica con respecto al tiempo.

Las cuatro fronteras que limitan el dominio (figura V.1) se consideran dentro de la expresión (V.15) de la siguiente manera

$$\{L\} = \int_{\Gamma_1} \{N\} \frac{\partial p}{\partial y} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [R] \{N\} \frac{\partial p}{\partial x} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \{N\} \frac{\partial p}{\partial y} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \{N\} \frac{\partial p}{\partial x} d\Gamma \quad (V.16)$$

donde $[R]$ es la matriz que transforma las aceleraciones generalizadas en aceleraciones normales al paramento de la cortina.

Sustituyendo en la ecuación (V.16) los gradientes de presión dados por las expresiones (V.2)-(V.5) y considerando además que

$$\ddot{x} = \{N\}^T \{\ddot{x}\} \quad (V.17)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \{L\} = & -\frac{1}{g} \int_{\Gamma_1} \{N\} \{N\}^T d\Gamma \{\dot{p}\} - \rho \int_{\Gamma_2} [R] \{N\} \{N\}^T d\Gamma \{\ddot{x}\} + i\omega q \int_{\Gamma_3} \{N\} \{N\}^T d\Gamma \{p\} + \\ & + \int_{\Gamma_4} \{N\} \{N\}^T d\Gamma \left(\frac{\beta\omega}{c} \{p\} - \frac{\alpha}{c} \{\dot{p}\} \right) \end{aligned} \quad (V.18)$$

Para el caso de una excitación armónica los vectores $\{\ddot{x}\}$ y $\{p\}$ se pueden expresar en la siguiente forma

$$\{\ddot{x}\} = \{\ddot{x}_0\} e^{i\omega t} \quad (V.19)$$

$$\{p\} = \{\bar{p}\} e^{i\omega t} \quad (V.20)$$

De la expresión (V.20) fácilmente se deduce que

$$\{\dot{p}\} = i\omega \{\bar{p}\} e^{i\omega t} \quad (V.21)$$

$$\{\ddot{p}\} = -\omega^2 \{\bar{p}\} e^{i\omega t} \quad (V.22)$$

Sustituyendo las expresiones (V.19)-(V.22) en la ecuación (V.12) y ordenando términos, finalmente se obtiene la contribución de cada elemento al sistema.

$$\left[[G] - \omega^2 [H] - \left(\frac{\omega^2}{g} + i\omega \left(q - \frac{\alpha}{c} \right) + \frac{\beta\omega}{c} \right) [D] \right] \{\bar{p}\} = -\rho [S] \{\ddot{x}_0\} \quad (V.23)$$

donde

$$[D] = \int_{\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4} \{N\} \{N\}^T d\Gamma \quad (V.24)$$

y

$$[S] = \int_{\Gamma_2} [R] \{N\} \{N\}^T d\Gamma \quad (V.25)$$

En la expresión (V.23) se nota que la inclusión del efecto del oleaje, la flexibilidad del fondo y los parámetros de amortiguamiento no alteran la simetría ni la forma bandeada de las matrices.

La expresión (V.23) también puede expresarse en la siguiente forma simplificada

$$[k]^e \{p\}^e = \{f\}^e \quad (V.26)$$

donde la matriz de rigidez del elemento $[k]^e$ y el vector $\{f\}^e$ se determinan por las siguientes expresiones

$$[k]^e = [G] - \omega^2 [H] - \left[\frac{\omega^2}{g} + i\omega \left(q - \frac{\alpha}{c} \right) + \frac{\beta\omega}{c} \right] [D] \quad (V.27)$$

$$\{f\}^e = -\rho [S] \{\ddot{x}_0\} \quad (V.28)$$

Finalmente, el embalse se modela con el ensamble de los elementos finitos que lo integran, mediante la siguiente expresión

$$[K] \{P\} = \{F\} \quad (V.29)$$

donde

$$[K] = \sum_1^{NE} [k]^e \quad (V.30)$$

$$\{P\} = \sum_1^{NE} \{p\}^e \quad (V.31)$$

$$\{F\} = \sum_1^{NE} \{f\}^e \quad (V.32)$$

El sistema de ecuaciones representado por la ecuación (V.29) puede resolverse para cualquier valor de la frecuencia excitadora ω y de esta manera se determinan las presiones de respuesta en los nodos de la malla.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se mostró el desarrollo teórico de la frontera de radiación para el caso de líquidos compresibles considerando la formación de oleaje sísmico en la superficie del embalse y la flexibilidad de la roca que subyace en el fondo.

Entre las conclusiones más importantes de este trabajo se pueden mencionar las siguientes:

- Se comprobó que el oleaje sísmico prácticamente no tiene ningún efecto apreciable sobre la presión hidrodinámica.

- El efecto de la flexibilidad del fondo en la presión hidrodinámica es pequeño cuando la frecuencia de la excitación es menor que la frecuencia fundamental del embalse.

- La flexibilidad del fondo es de gran importancia para frecuencias excitadoras mayores que la frecuencia fundamental del embalse y no se debe despreciar.

- Se encontró una expresión para la frontera de radiación que es relativamente simple de incluir en el análisis del embalse por elementos finitos y que no altera la forma bandeada de la matriz de rigidez.

Finalmente, se presenta un conjunto de gráficas para determinar el módulo del coeficiente de presión hidrodinámica que considera el oleaje y la flexibilidad del fondo para distintos valores de α_r y Ω .

REFERENCIAS

1. H. M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, *Trans. ASCE*, **98**, 418-472, 1933.
2. E. Rosenblueth, N. M. Newmark, *Fundamentos de Ingeniería sísmica*, ed. Diana, México 1976.
3. A. K. Chopra, Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes, *Journal of Eng. Mech. Div., ASCE*, vol. **93**, No. *EM6*, 205-223, 1967.
4. C. N. Zangar, Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes, *Prog. Soc. Ext. Stress Anal.*, **10** (3), 93-102, 1953.
5. E. Rosenblueth, Presión hidrodinámica por sismo en presas. Estado del arte, *Instituto de Ingeniería*, UNAM, **283**, 1971.
6. E. Rosenblueth, Presión hidrodinámica en cortinas de gravedad, *Instituto de Ingeniería*, UNAM, **161**, 1968.
7. E. Rosenblueth, Presión hidrodinámica en presas debida a aceleración vertical con refracción en el fondo, *Instituto de Ingeniería*, UNAM, **180**, 1968.
8. A. K. Chopra, Earthquakes response of concrete gravity dams, *Journal of Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. **96**, No. *EM4*, 443-474, 1970.
9. J. L. Humar and M. Roufaiel, Finite element analysis of reservoir vibration, *Journal of Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. **109**, No. 1, 215-230, 1983.
10. J. F. Hall and A. K. Chopra, Dynamic responses of embankment concrete gravity and arch dam including hydrodynamic interaction, *Report EERC-UCV-80-39*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 1980.
11. S. K. Sharan, Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. **21**, 1659-1669, 1985.
12. S. K. Sharan, Finite element modeling of infinite reservoirs, *Journal of Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. **111**, No. 2, 1457-1469, 1985.
13. S. K. Sharan, Efficient finite element analysis of hydrodynamic pressure on dams, *Comput. Struct.*, **42** No. 5 713-723, 1992.
14. X. Li, M. P. Romo O. and J. Avilés L. Finite element analysis of dam-reservoir systems using an exact far-boundary condition, *Comput. Struct.*, Vol. **60** No. 5, 751-762, 1996.

15. P. Chakrabarti and A. K. Chopra, Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2, No. 2, 143-160, 1973.
16. S. S. Saini, P. Bettess and Zienkiewics O. C., Coupled Hydrodynamic response of concrete gravity dams using finite and infinite elements, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, 363-374, 1978.
17. J. L. Humar and A. M. Jablonski, Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, 1129-1156, 1988.
18. A. Sommerfeld, *Partiel diferencial equations in physics*, ed. Academic Press, New York, 1949.
19. O. C. Zienkiewics and R. E. Newton, Coupled vibrations of structure submerged in a compressible fluid, *Pro. Int. Symp. on Finite Element Techniques*, Stuttgart, Germany, 359-379, 1969.