



BIBLIOTECA CENTRAL

**UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE PUEBLA**



MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS

**ANÁLISIS DINÁMICO DE LOS ESTADOS PLANOS
POR EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO**

Trabajo de investigación
que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

Presenta:

Luis Daniel Bravo Tomás

Puebla, Pue., México

Julio de 1999



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyła**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



LA SALLE



BIBLIOTECA CENTRAL

México D.F., 28 de Julio de 1999

Ing. Gerardo de Jesús López Árciga
Coordinador de la Maestría en Estructuras
U. P. A. E. P.
Presente

Estimado ingeniero:

Por medio de la presente me es grato informar a usted que el Sr. Luis Daniel Bravo Tomás ha concluido satisfactoriamente su trabajo de investigación denominado "Análisis dinámico de los estados planos por el método del elemento finito". Cubriendo los objetivos planteados al inicio del mismo.

Sin otro particular quedo a sus apreciables órdenes.

ATENTAMENTE

Ing. Fernando Vera Badillo

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA LOS ESTADOS PLANOS	4
2.1. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DEL MEDIO CONTINUO.....	5
2.2. DISCRETIZACIÓN DEL CONTINUO.....	10
3. FUNCIONES DE FORMA	13
3.1. ELEMENTO TRIANGULAR.....	14
3.1.1. Interpolación lineal	14
3.1.2. Interpolación Cuadrática.....	16
3.2. ELEMENTO CUADRILÁTERO GENERAL	17
3.2.1. Interpolación Lineal.....	18
3.2.2. Interpolación cuadrática.....	19
3.3. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	20
3.3.1. Interpolación lineal	23
3.3.2. Interpolación cuadrática.....	24
4. OBTENCIÓN DE LAS MATRICES DE RIGIDECES Y MASAS DE LOS ELEMENTOS FINITOS	27
4.1. ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL	28
4.2. ELEMENTO TRIANGULAR CUADRÁTICO.....	29
4.3. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	31
5. ENSAMBLE DE LAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES DEL CONTINUO	32
5.1. ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDECES DEL CONTINUO.....	32
5.1.1. Elemento triangular lineal.....	33
5.1.2. Elemento triangular cuadrático.....	34
5.1.3. Elemento cuadrilátero lineal	36
5.1.4. Elemento cuadrilátero cuadrático	37
5.2. ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE MASAS DE LA ESTRUCTURA.....	39
5.2.1. Elemento triangular lineal	39
5.2.2. Elemento triangular cuadrático	40
5.2.3. Elemento cuadrilátero lineal.....	42

5.2.4. Elemento cuadrilátero cuadrático	43
6. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO	46
6.1. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO..	46
6.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO. (BETA DE NEWMARK).....	49
6.3. GENERALIZACIÓN DE NEWMARK.....	53
6.4. BETA DE NEWMARK CON AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH	55
6.5. ALGORITMO DEL MÉTODO BETA DE NEWMARK GENERALIZADO CON AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH.....	56
6.6. PROCESO DE SOLUCIÓN GENERAL DEL MEF	56
7. PROGRAMA DE COMPUTADORA.....	58
7.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA	58
7.2. ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA	60
7.2.1. Lectura de datos	60
7.2.2. Cálculo de desplazamientos	61
7.2.3. Presentación de resultados	64
7.3. MANUAL DE USUARIO.....	65
8. EJEMPLOS DE APLICACIÓN	79
8.1. ESTÁTICO	79
8.1.1. Datos.....	80
8.1.2. Resultados	83
8.1.3. Resumen de los desplazamientos del nodo 1	86
8.2. DINÁMICO	87
8.2.1. Datos	87
8.2.2. Resultados.....	89
8.2.3. Resumen de soluciones.....	90
9. CONCLUSIONES.....	91
10. REFERENCIAS	93

1. INTRODUCCIÓN

En toda obra de ingeniería se deben definir las dimensiones apropiadas de los elementos que forman una estructura (Elementos Estructurales). Los elementos estructurales deben resistir las cargas probables a las que sean sometidos, según su uso y ubicación geográfica.

Las cargas a las que se encuentra sometida una estructura pueden ser estáticas o dinámicas y su importancia depende de los factores antes mencionados.

Las cargas estáticas son propiamente cargas vivas, cargas muertas y cargas debidas a reparación y mantenimiento estructural.

Las cargas dinámicas generalmente son ocasionadas por eventos accidentales, es decir, sismos, explosiones, derrumbes cercanos, viento, entre otros; de los cuales uno de los eventos más importantes es el evento sísmico.

De acuerdo a la teoría de Tectónica de placas, los sismos son ocasionados por la gran liberación de energía al ocurrir un rompimiento de la tierra por fallas subterráneas. La repetición de los sismos depende de la ubicación geográfica, en el mundo hay zonas de alta sismicidad, en las cuales se llegan a ocurrir sismos repetidas veces en un día.

En cuanto a análisis estructural, existen varios métodos para determinar el comportamiento de estructuras ante estos tipos de cargas. El más utilizado para estructuras reticulares es el método de rigideces, sin embargo para el análisis de elementos con geometrías complejas se desarrolló un método llamado Método del Elemento Finito (MEF).

Debido a la gran cantidad de datos que se utilizan en la aplicación del MEF y a la repetición del proceso para el análisis dinámico, es indispensable el uso de la computadora.

El objetivo principal es desarrollar un sistema para el análisis dinámico de los estados planos por el MEF empleando la solución Beta de Newmark. El sistema se desarrolla en un ambiente de trabajo Windows, empleando la técnica de programación estructurada.

En el capítulo 2 se describe la ecuación de equilibrio dinámico de un medio continuo empleando el MEF, y la forma de idealizarlo con elementos finitos.

En el capítulo 3 se describen las funciones de forma de las geometrías de elementos finitos.

En el capítulo 4 se describe la forma de obtener las matrices de rigideces y de masas de los elementos finitos.

En el capítulo 5 se describe la forma de ensamblar las matrices de rigideces y de masas del continuo.

En el capítulo 6 se describen los métodos de solución de la ecuación de equilibrio dinámico y se desarrolla paso a paso el método Beta de Newmark.

En el capítulo 7 se describen los elementos con que cuenta Visual Basic, la forma en que está organizado el programa de computadora y se presenta el manual de usuario para el programa desarrollado.

En el capítulo 8 se analizan algunos continuos empleando el programa Análisis de los Estados Planos por el Método del Elemento Finito.

Finalmente se dan las conclusiones del trabajo realizado.

2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA LOS ESTADOS PLANOS

El MEF es un método matemático para resolver ecuaciones diferenciales de valores en la frontera o iniciales.

En mecánica estructural el MEF es una extensión de los métodos matriciales para analizar un medio continuo, el cual se idealiza como una estructura formada por un número finito de elementos interconectados entre sí por puntos (conocidos como puntos nodales) (Fig. 2.1). Este método es muy útil cuando la geometría el continuo es compleja.

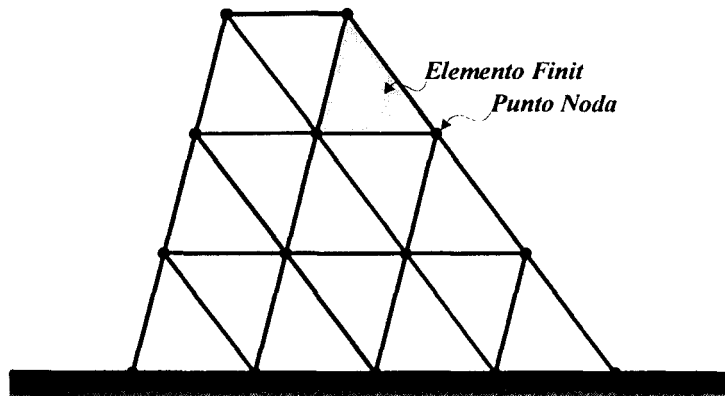


Fig. 2.1 Medio Continuo Dividido en Elementos Finitos.

Para plantear las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad y proponer su solución por el MEF, se puede emplear el método de los residuos pesados o los métodos variacionales.

2.1. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DEL MEDIO CONTINUO

En la teoría de la elasticidad lineal la ecuación variacional está dada por el principio del trabajo virtual, el cual se obtiene de las ecuaciones de Cauchy del movimiento que en forma matricial está dado por la ecuación:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon' \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}' \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \rho \delta \mathbf{u}' \sigma_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}' \mathbf{f} d\Omega \quad (2.1)$$

en donde:

- Ω Punto interior de la estructura
- Γ Condiciones de frontera
- δ Primera variación que opera sobre las cantidades que proceden
- $\sigma_{(n)}$ Componentes de las cargas que actúan por unidad de superficie
- \mathbf{f} Vector de cargas de cuerpo

ε	Componentes del vector de deformación
σ	Componentes del tensor de esfuerzos
\mathbf{u}	Vector de desplazamiento
ρ	Densidad de masa por unidad de volumen
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vector de aceleraciones

Al considerar una solución aproximada del campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} \quad (2.2)$$

En donde $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector de soluciones aproximadas de los desplazamientos.

La solución aproximada se propone mediante funciones de forma y se tiene:

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

En donde $\tilde{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos que se van a obtener en la solución y \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma. De acuerdo a la teoría de la elasticidad se pueden definir las siguientes ecuaciones

$$\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (2.5)$$

En donde ε y σ están definidos en la ecuación (2.1), \mathbf{L} es una matriz de operadores.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Y \mathbf{D} es una matriz de coeficientes elásticos, que varía de acuerdo al estado plano que se desea analizar.

Para el estado plano de esfuerzos la matriz \mathbf{D} es:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Para el estado plano de deformaciones la matriz \mathbf{D} es:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde:

E Módulo de elasticidad lineal

ν Coeficiente de Poisson

Al considerar la solución aproximada se sustituye la ecuación (2.3) en las ecuaciones (2.4) y (2.5) y, la expresión que se obtiene es:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{LN}\tilde{\mathbf{u}} \quad (2.9)$$

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.10)$$

Se define:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (2.11)$$

Al sustituir la ecuación (2.11) en las ecuaciones (2.9) y (2.10).

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.13)$$

Al considerar la primera variación, con los desplazamientos aproximados se tiene:

$$\delta \mathbf{u} \approx \delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (2.14)$$

$$\delta \mathbf{u}' \approx \delta \bar{\mathbf{u}}' = \mathbf{N}' \delta \bar{\mathbf{u}}' \quad (2.15)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.12) a (2.15) en la ecuación (2.1) se obtiene:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}' \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \bar{\mathbf{u}}' \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{u}}' \mathbf{N}' \sigma_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}' \underline{\mathbf{f}} d\Omega \quad (2.16)$$

Al factorizar y simplificar se obtiene la ecuación:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \bar{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}' \mathbf{N} d\Omega \bar{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}' \sigma_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}' \underline{\mathbf{f}} d\Omega \quad (2.17)$$

Misma que es válida para toda la región del continuo $(\Omega + \Gamma)$. Al reordenar los términos se obtiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^t \sigma(n) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{f} d\Omega \quad (2.18)$$

Por definición:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega \quad (2.20)$$

$$\mathbf{f}_c = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{f} d\Omega \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}_s = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^t \sigma(n) d\Gamma \quad (2.22)$$

Donde:

\mathbf{K} Matriz de Rigideces del Continuo.

\mathbf{M} Matriz de Masas del Continuo.

\mathbf{f}_c Vector de Fuerzas de Cuerpo del Continuo.

\mathbf{f}_s Vector de Fuerzas de Superficie del Continuo.

Al sustituir las ecuaciones (2.19) a (2.22) en la ecuación (2.18) se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_c \quad (2.23)$$

Considerando que las fuerzas externas varían con el tiempo, y agregando el término que relaciona el amortiguamiento se llega a la ecuación:

$$\mathbf{M} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}(t) \quad (2.24)$$

Donde:

- C Matriz de Amortiguamiento del Continuo.
- $\ddot{\mathbf{u}}$ Vector de Aceleración.
- $\mathbf{P}(t)$ Fuerzas de Superficie y de Cuerpo que varían con el tiempo.
- $\dot{\mathbf{u}}$ Vector de Velocidad.

2.2. DISCRETIZACIÓN DEL CONTINUO

Al aplicar el método del elemento finito en la solución de la ecuación de equilibrio dinámico se tienen las siguientes hipótesis.

- a) El medio continuo se divide en un número finito de regiones (Elementos Finitos).
- b) Los elementos finitos están interconectados por un número finito de puntos nodales situados en las fronteras de los mismos, y los desplazamientos de los puntos nodales son las incógnitas básicas del problema.
- c) Se define en forma única el campo de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito en función de los desplazamientos de los puntos nodales.
- d) Conocidos los desplazamientos se pueden definir en forma única las deformaciones y los esfuerzos.

Según las hipótesis anteriores la región $\Omega + \Gamma$ se divide en elementos finitos, esto es:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i^e \quad (2.25)$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i^e \quad (2.26)$$

Donde:

n Número de elementos finitos del continuo.

La ecuación (2.18) se aplica en forma aislada a todos los elementos finitos por lo que se tiene:

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}' \underline{D} \underline{B} d\Omega^e \underline{u}^e + \int_{\Omega^e} \rho \underline{N}^{e'} \underline{N}^e d\Omega^e \underline{u}^e = \int_{\Gamma^e} \underline{N}^{e'} \sigma_{(n)} d\Gamma^e + \int_{\Omega^e} \underline{N}^{e'} \underline{f} d\Omega^e \quad (2.27)$$

donde:

Ω^e Región de cada elemento

Γ^e Frontera de cada elemento

y por definición:

$$\underline{K}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}' \underline{D} \underline{B} d\Omega^e \quad (2.28)$$

$$\underline{M}^e = \rho \int_{\Omega^e} \underline{N}^{e'} \underline{N}^e d\Omega^e \quad (2.29)$$

$$\underline{f}_s^e = \int_{\Gamma^e} \underline{N}^{e'} \sigma_{(n)} d\Gamma^e \quad (2.30)$$

$$\underline{f}_c^e = \int_{\Omega^e} \underline{N}^{e'} \underline{f} d\Omega^e \quad (2.31)$$

donde:

K^e Matriz de Rigideces del Elemento

M^e Matriz de Masas del Elemento

f_s^e Vector de Fuerzas de Superficie del Elemento

f_c^e Vector de Fuerzas de Cuerpo del Elemento

Al sustituir las ecuaciones (2.28) a (2.31) en la ecuación (2.27) se obtiene el modelo discreto de cada elemento, esto es:

$$K^e u^e + M^e \ddot{u}^e = f_s^e + f_c^e \quad (2.32)$$

La ecuación es válida únicamente en la región del elemento y a partir de calcular las matrices de rigideces y de masas de cada elemento es posible obtener las matrices de masas y rigideces del continuo discretizado en elementos finitos.

3. FUNCIONES DE FORMA

En la solución aproximada considerada se deben definir las funciones de forma, las cuales dependen de los siguientes factores:

- a) *Geometría global.*- Esto se refiere al tipo de espacio donde se van a integrar las ecuaciones, puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional.

- b) *Grado de aproximación deseado en la solución:* Generalmente las funciones de forma son de interpolación, las cuales son polinomios con funciones exponenciales o trigonométricas. Si son polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nodales en los vértices del elemento, si se utilizan polinomios cuadráticos se deben adicionar puntos nodales en la frontera del elemento.

- c) *Facilidad de integración sobre el dominio del elemento*: La función de forma debe permitir la representación de cualquier forma lineal, de manera que se satisfaga el criterio de deformación constante.
- d) Las incógnitas deben presentar continuidad entre elementos.

3.1. ELEMENTO TRIANGULAR

3.1.1. Interpolación lineal

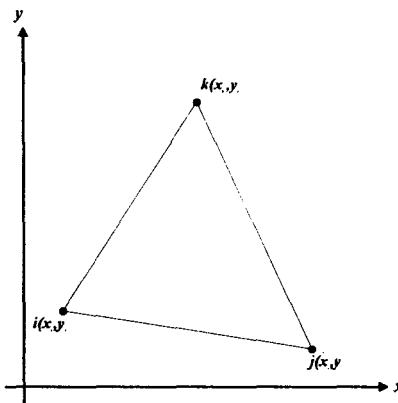


Fig. 3.1 Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas.

Se requieren únicamente los tres puntos nodales sobre los vértices, y las funciones de forma en coordenadas cartesianas son:

$$N_i = \frac{1}{\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.1)$$

$$N_j = \frac{1}{\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (3.2)$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad (3.3)$$

donde:

N_i Función de forma del nodo i .

N_j Función de forma del nodo j .

N_k Función de forma del nodo k .

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (3.4)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (3.5)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (3.6)$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k \quad (3.7)$$

$$b_j = y_k - y_i \quad (3.8)$$

$$c_j = x_i - x_k \quad (3.9)$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i \quad (3.10)$$

$$b_k = y_i - y_j \quad (3.11)$$

$$c_k = x_j - x_i \quad (3.12)$$

$$\Delta = a_i + a_j + a_k \quad (3.13)$$

x_i Coordenada x del nodo i .

y_i Coordenada y del nodo i .

x_j Coordenada x del nodo j .

y_j Coordenada y del nodo j .

x_k Coordenada x del nodo k .

y_k Coordenada y del nodo k .

3.1.2. Interpolación Cuadrática

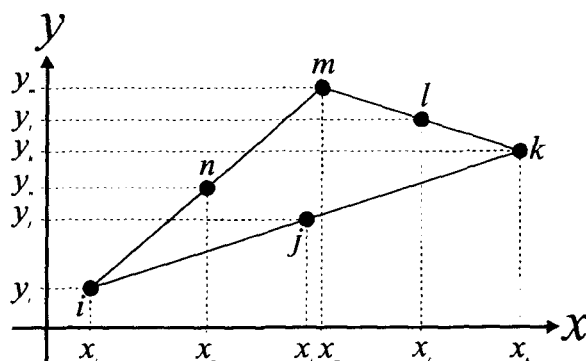


Fig. 3.2 Elemento triangular cuadrático.

Se requieren los puntos nodales sobre los vértices y tres puntos nodales sobre los lados, y las funciones de forma en coordenadas de área son:

$$N_i = (2L_1 - 1)L_1 \quad (3.14)$$

$$N_j = 4L_1L_2 \quad (3.15)$$

$$N_k = (2L_2 - 1)L_2 \quad (3.16)$$

$$N_l = 4L_2L_3 \quad (3.17)$$

$$N_m = (2L_3 - 1)L_3 \quad (3.18)$$

$$N_n = 4L_3L_1 \quad (3.19)$$

donde:

L_1, L_2 y L_3 Son coordenadas de área.

$$L_1 = \frac{1}{\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.20)$$

$$L_2 = \frac{1}{\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad (3.21)$$

$$L_3 = \frac{1}{\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) \quad (3.22)$$

$$a_i = x_k y_m - x_m y_k \quad (3.23)$$

$$b_i = y_k - y_m \quad (3.24)$$

$$c_i = x_m - x_k \quad (3.25)$$

$$a_k = x_m y_i - x_i y_m \quad (3.26)$$

$$b_k = y_m - y_i \quad (3.27)$$

$$c_k = x_i - x_m \quad (3.28)$$

$$a_m = x_i y_k - x_k y_i \quad (3.29)$$

$$b_m = y_i - y_k \quad (3.30)$$

$$c_m = x_k - x_i \quad (3.31)$$

$$\Delta = a_i + a_k + a_m \quad (3.32)$$

3.2. ELEMENTO CUADRILÁTERO GENERAL

Para facilitar la integración en el dominio del elemento es conveniente usar coordenadas normalizadas y la forma de seleccionarlas se indica en la figura 3.3.

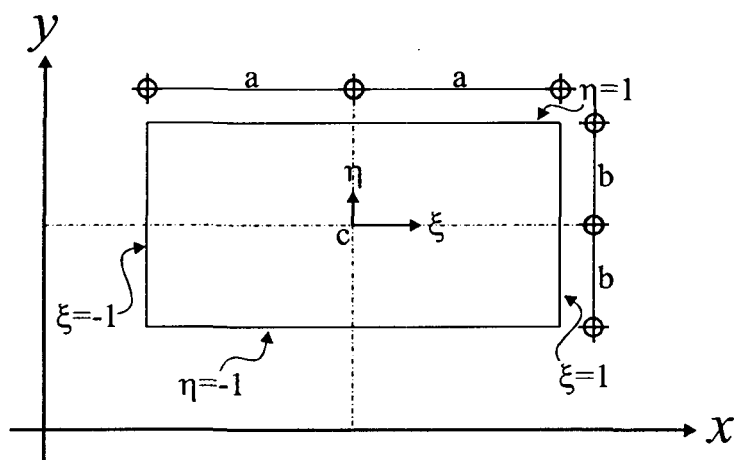


Fig. 3.3 Coordenadas normalizadas para un rectángulo.

Debido a la geometría del cuadrilátero, las funciones de forma se pueden generar, automáticamente, mediante productos de polinomios en las dos coordenadas.

Las funciones de interpolación de la familia Serendipity se obtuvieron, originalmente por inspección; y por esta razón, Zienkiewicz les asignó dicho nombre, en similitud con la princesa de Serendip de la novela de Horace Walpole, famosa por sus descubrimientos casuales.

Esta familia se originó por la convergencia de que las funciones de interpolación dependan de puntos nodales localizados sobre los lados del elemento. Es necesario mencionar que las funciones generadas por los puntos localizados sobre los lados, generan polinomios hasta la interpolación cúbica; para mayores aproximaciones es necesario agregar nodos interiores.

3.2.1. Interpolación Lineal

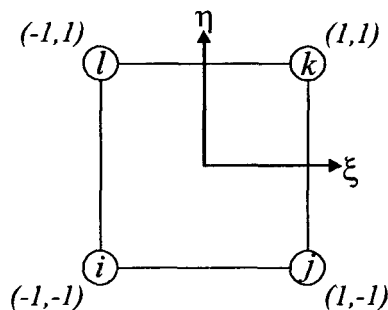


Fig. 3.4 Elemento cuadrilátero general normalizado.

Se requieren únicamente los puntos nodales sobre los vértices:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.33)$$

Para el orden mostrado en la figura 3.4 las funciones de forma se reducen a:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (3.34)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (3.35)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (3.36)$$

$$N_l = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.37)$$

3.2.2. Interpolación cuadrática

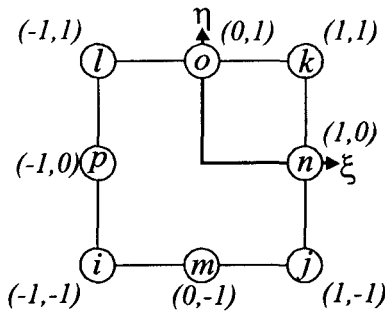


Fig. 3.5 Cuadrilátero cuadrático normalizado.

Se requieren cuatro puntos nodales sobre los vértices y cuatro puntos nodales sobre los lados:

a) Para los nodos sobre los vértices:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.38)$$

b) Para los nodos sobre los lados:

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad \xi_i = 0 \quad i = 5,7 \quad (3.39a)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad \eta_i = 0 \quad i = 6,8 \quad (3.39b)$$

De acuerdo al orden de los nodos que muestra la figura 3.5 las funciones de forma son:

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \quad (3.40)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad (3.41)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (3.42)$$

$$N_l = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \quad (3.43)$$

$$N_m = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (3.44)$$

$$N_n = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (3.45)$$

$$N_o = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (3.46)$$

$$N_p = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (3.47)$$

3.3. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Para que cualquier geometría, relativamente compleja, se pueda representar con un número pequeño de elementos, se necesitan elementos finitos con formas más complejas que las descritas anteriormente. En este apartado se tratan geometrías distorsionadas (lados y superficies curvas) de los elementos de forma simple que conduzcan a geometrías arbitrarias según se puede observar en la figura 3.6, en donde los puntos asociados a las regiones regulares mapean a puntos de las regiones irregulares. En este mapeo, la referencia original del elemento se transforma en una referencia curvilínea. Si el mapeo es uno a uno, se puede establecer una correspondencia entre las coordenadas cartesianas y curvilíneas de la forma mostrada en la figura 3.6.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Una vez establecida la relación dada por la ecuación anterior, las funciones de forma se pueden especificar en términos de las coordenadas locales y , mediante una serie de transformaciones, determinar los elementos, correspondientes a una referencia arbitraria.

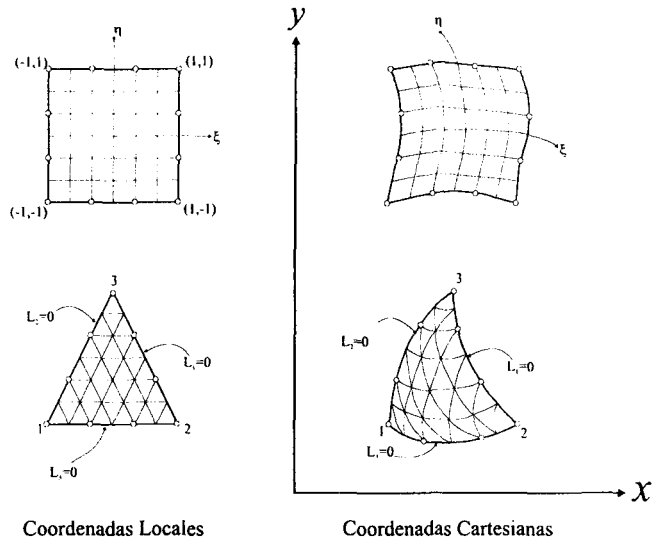


Fig. 3.6 Mapeo de elementos bidimensionales.

Si $N_i = N_i(\xi, \eta)$ son las funciones de forma del elemento en coordenadas locales (no deformadas), se puede realizar la transformación de coordenadas mediante las relaciones siguientes:

$$\underline{x} = \underline{N} \underline{x} \quad (3.49)$$

$$\underline{y} = \underline{N} \underline{y} \quad (3.50)$$

donde:

$\underline{x}, \underline{y}$ Coordenadas en referencia cartesiana de cualquier punto localizado en el elemento deformado.

$\underline{x}, \underline{y}$ Vectores de las coordenadas cartesianas de los puntos nodales que definen la frontera del elemento.

N Funciones de forma, del elemento, referenciadas al sistema coordinado (ξ, η) .

Considerando el sistema de referencia local (ξ, η) y su correspondiente sistema de referencia global (x, y) ; las derivadas parciales de las funciones de forma N_i respecto a las variables locales, para la regla de la cadena, se pueden expresar, en forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

donde:

\mathbf{J} Matriz Jacobiana.

$x_{,\xi}, x_{,\eta}, y_{,\xi}, y_{,\eta}$ Derivadas de las coordenadas globales en términos de las locales.

Pero como se conocen las funciones de forma en referencia local, se pueden conocer sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas locales y, de la ecuación (3.51) se pueden despejar las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales. La ecuación obtenida es:

$$\begin{pmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

donde:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$|\mathbf{J}| = x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi} \quad (3.54)$$

3.3.1. Interpolación lineal

Las derivadas parciales de las coordenadas globales en términos de las locales se obtienen de las ecuaciones (3.49) y (3.50):

$$\mathbf{x}_{,\xi} = N_{i,\xi} \mathbf{x}_i + N_{j,\xi} \mathbf{x}_j + N_{k,\xi} \mathbf{x}_k + N_{l,\xi} \mathbf{x}_l \quad (3.55)$$

$$\mathbf{x}_{,\eta} = N_{i,\eta} \mathbf{x}_i + N_{j,\eta} \mathbf{x}_j + N_{k,\eta} \mathbf{x}_k + N_{l,\eta} \mathbf{x}_l \quad (3.56)$$

$$\mathbf{y}_{,\xi} = N_{i,\xi} \mathbf{y}_i + N_{j,\xi} \mathbf{y}_j + N_{k,\xi} \mathbf{y}_k + N_{l,\xi} \mathbf{y}_l \quad (3.57)$$

$$\mathbf{y}_{,\eta} = N_{i,\eta} \mathbf{y}_i + N_{j,\eta} \mathbf{y}_j + N_{k,\eta} \mathbf{y}_k + N_{l,\eta} \mathbf{y}_l \quad (3.58)$$

Las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales se obtienen con la ecuación (3.52):

$$N_{i,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{i,\xi} - y_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.59)$$

$$N_{i,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{i,\xi} + x_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.60)$$

$$N_{j,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{j,\xi} - y_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.61)$$

$$N_{j,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{j,\xi} + x_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.62)$$

$$N_{k,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{k,\xi} - y_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.63)$$

$$N_{k,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{k,\xi} + x_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.64)$$

$$N_{l,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{l,\xi} - y_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.65)$$

$$N_{l,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{l,\xi} + x_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.66)$$

Donde:

J^i se define por la ecuación (3.54).

Las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales se obtienen de derivar las ecuaciones (3.34) a (3.37):

$$N_{i,\xi} = \frac{-(1-\eta)}{4} \quad (3.67)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{-(1-\xi)}{4} \quad (3.68)$$

$$N_{j,\xi} = \frac{(1-\eta)}{4} \quad (3.69)$$

$$N_{j,\eta} = \frac{-(1+\xi)}{4} \quad (3.70)$$

$$N_{k,\xi} = \frac{(1+\eta)}{4} \quad (3.71)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{-(1-\xi)}{4} \quad (3.72)$$

$$N_{l,\xi} = \frac{-(1+\eta)}{4} \quad (3.73)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{-(1-\xi)}{4} \quad (3.74)$$

3.3.2. Interpolación cuadrática

Las derivadas parciales de las coordenadas globales en términos de las locales se obtienen con las ecuaciones (3.49) y (3.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,\xi} = & N_{i,\xi} \mathbf{x}_i + N_{j,\xi} \mathbf{x}_j + N_{k,\xi} \mathbf{x}_k + N_{l,\xi} \mathbf{x}_l + \\ & + N_{m,\xi} \mathbf{x}_m + N_{n,\xi} \mathbf{x}_n + N_{o,\xi} \mathbf{x}_o + N_{p,\xi} \mathbf{x}_p \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,\eta} = & N_{i,\eta} \mathbf{x}_i + N_{j,\eta} \mathbf{x}_j + N_{k,\eta} \mathbf{x}_k + N_{l,\eta} \mathbf{x}_l + \\ & + N_{m,\eta} \mathbf{x}_m + N_{n,\eta} \mathbf{x}_n + N_{o,\eta} \mathbf{x}_o + N_{p,\eta} \mathbf{x}_p \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$y_{,\xi} = N_{i,\xi} y_i + N_{j,\xi} y_j + N_{k,\xi} y_k + N_{l,\xi} y_l + N_{m,\xi} y_m + N_{n,\xi} y_n + N_{o,\xi} y_o + N_{p,\xi} y_p \quad (3.77)$$

$$y_{,\eta} = N_{i,\eta} y_i + N_{j,\eta} y_j + N_{k,\eta} y_k + N_{l,\eta} y_l + N_{m,\eta} y_m + N_{n,\eta} y_n + N_{o,\eta} y_o + N_{p,\eta} y_p \quad (3.78)$$

Las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales se obtienen con la ecuación (3.52):

$$N_{i,x} = \frac{1}{|J|} (y_{,\eta} N_{i,\xi} - y_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.79)$$

$$N_{i,y} = \frac{1}{|J|} (-x_{,\eta} N_{i,\xi} + x_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.80)$$

$$N_{j,x} = \frac{1}{|J|} (y_{,\eta} N_{j,\xi} - y_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.81)$$

$$N_{j,y} = \frac{1}{|J|} (-x_{,\eta} N_{j,\xi} + x_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.82)$$

$$N_{k,x} = \frac{1}{|J|} (y_{,\eta} N_{k,\xi} - y_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.83)$$

$$N_{k,y} = \frac{1}{|J|} (-x_{,\eta} N_{k,\xi} + x_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.84)$$

$$N_{l,x} = \frac{1}{|J|} (y_{,\eta} N_{l,\xi} - y_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.85)$$

$$N_{l,y} = \frac{1}{|J|} (-x_{,\eta} N_{l,\xi} + x_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.86)$$

Donde:

J se define por la ecuación (3.54).

Las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales se obtienen de derivar las ecuaciones (3.40) a (3.47):

$$N_{i,x} = \frac{1}{|J|} (y_{,\eta} N_{i,\xi} - y_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.87)$$

$$N_{i,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{i,\xi} + x_{,\xi} N_{i,\eta}) \quad (3.88)$$

$$N_{j,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{j,\xi} - y_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.89)$$

$$N_{j,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{j,\xi} + x_{,\xi} N_{j,\eta}) \quad (3.90)$$

$$N_{k,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{k,\xi} - y_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.91)$$

$$N_{k,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{k,\xi} + x_{,\xi} N_{k,\eta}) \quad (3.92)$$

$$N_{l,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{l,\xi} - y_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.93)$$

$$N_{l,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{l,\xi} + x_{,\xi} N_{l,\eta}) \quad (3.94)$$

$$N_{m,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{m,\xi} - y_{,\xi} N_{m,\eta}) \quad (3.95)$$

$$N_{m,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{m,\xi} + x_{,\xi} N_{m,\eta}) \quad (3.96)$$

$$N_{n,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{n,\xi} - y_{,\xi} N_{n,\eta}) \quad (3.97)$$

$$N_{n,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{n,\xi} + x_{,\xi} N_{n,\eta}) \quad (3.98)$$

$$N_{o,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{o,\xi} - y_{,\xi} N_{o,\eta}) \quad (3.99)$$

$$N_{o,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{o,\xi} + x_{,\xi} N_{o,\eta}) \quad (3.100)$$

$$N_{p,x} = \frac{1}{J} (y_{,\eta} N_{p,\xi} - y_{,\xi} N_{p,\eta}) \quad (3.101)$$

$$N_{p,y} = \frac{1}{J} (-x_{,\eta} N_{p,\xi} + x_{,\xi} N_{p,\eta}) \quad (3.102)$$

4. OBTENCIÓN DE LAS MATRICES DE RIGIDECES Y MASAS DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Las matrices de Rigideces y masas, para todos los casos quedan definidas por las ecuaciones (2.28) y (2.29), mismas que para los estados planos se reducen a:

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} dA^e \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M}^e = \rho \int_{A^e} \mathbf{N}^{e'} \mathbf{N}^e dA^e \quad (4.2)$$

En los incisos siguientes se definen las matrices de continuidad y de forma de los elementos finitos, las matrices de constantes elásticas están definidas por las ecuaciones (2.7) y (2.8) para ambos tipos de estado plano.

4.1. ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL

Las matrices de rigideces y masas del elemento triangular lineal se obtienen directamente, debido a que las derivadas de las funciones de forma son constantes.

La matriz de continuidad (\mathbf{B}), queda definida por la expresión:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} N_{i,x} & \mathbf{0} & N_{j,x} & \mathbf{0} & N_{k,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{i,y} & \mathbf{0} & N_{j,y} & \mathbf{0} & N_{k,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & N_{j,y} & N_{j,x} & N_{k,y} & N_{k,x} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

donde:

$$N_{i,x} = \frac{b_i}{\Delta} \quad (4.4)$$

$$N_{i,y} = \frac{c_i}{\Delta} \quad (4.5)$$

$$N_{j,x} = \frac{b_j}{\Delta} \quad (4.4)$$

$$N_{j,y} = \frac{c_j}{\Delta} \quad (4.5)$$

$$N_{k,x} = \frac{b_k}{\Delta} \quad (4.4)$$

$$N_{k,y} = \frac{c_k}{\Delta} \quad (4.5)$$

La matriz de funciones de forma se define como:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_i & \mathbf{0} & N_j & \mathbf{0} & N_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_i & \mathbf{0} & N_j & \mathbf{0} & N_k \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Donde, N_i , N_j y N_k están definidas por las ecuaciones (3.1) a (3.3).

4.2. ELEMENTO TRIANGULAR CUADRÁTICO

La transpuesta de la matriz de continuidad queda definida por:

$$\underline{B}' = \begin{pmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \\ N_{j,x} & 0 & N_{j,y} \\ 0 & N_{j,y} & N_{j,x} \\ N_{k,x} & 0 & N_{k,y} \\ 0 & N_{k,y} & N_{k,x} \\ N_{l,x} & 0 & N_{l,y} \\ 0 & N_{l,y} & N_{l,x} \\ N_{m,x} & 0 & N_{m,y} \\ 0 & N_{m,y} & N_{m,x} \\ N_{o,x} & 0 & N_{o,y} \\ 0 & N_{o,y} & N_{o,x} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

donde:

$$N_{i,x} = \frac{b_i}{\Delta} (4L_1 - 1) \quad (4.8)$$

$$N_{i,y} = \frac{c_i}{\Delta} (4L_1 - 1) \quad (4.9)$$

$$N_{j,x} = \frac{4}{\Delta} (b_k L_1 + b_i L_2) \quad (4.10)$$

$$N_{j,y} = \frac{4}{\Delta} (c_k L_1 + c_i L_2) \quad (4.11)$$

$$N_{k,x} = \frac{b_k}{\Delta} (4L_2 - 1) \quad (4.12)$$

$$N_{k,y} = \frac{c_k}{\Delta} (4L_2 - 1) \quad (4.13)$$

$$N_{l,x} = \frac{4}{\Delta} (b_m L_2 + b_k L_3) \quad (4.14)$$

$$N_{l,y} = \frac{4}{\Delta} (c_m L_2 + c_k L_3) \quad (4.15)$$

$$N_{m,x} = \frac{b_m}{\Delta} (4L_3 - 1) \quad (4.16)$$

$$N_{m,y} = \frac{c_m}{\Delta} (4L_3 - 1) \quad (4.17)$$

$$N_{n,x} = \frac{4}{\Delta} (b_m L_1 + b_1 L_3) \quad (4.18)$$

$$N_{n,y} = \frac{4}{\Delta} (c_m L_1 + c_1 L_3) \quad (4.19)$$

Al realizar la operación $\mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B}$ se obtiene una matriz que depende de las coordenadas de área, por lo que para integrar dicha matriz se emplea la ecuación (4.20).

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m dA = 2A \frac{k! l! m!}{(2 + k + l + m)!} \quad (4.20)$$

La transpuesta de la matriz de funciones de forma se define como:

$$\mathbf{N}' = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \\ N_l & 0 \\ 0 & N_l \\ N_m & 0 \\ 0 & N_m \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Donde cada función de forma queda definida por las ecuaciones (2.14) a (2.19).

Para realizar la integral de $\underline{N}' N$ en coordenadas de área se emplea la ecuación (4.20).

4.3. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Definida la transformación en las ecuaciones (3.51) a (3.53) se pueden expresar las ecuaciones (4.1) y (4.2) en función de las coordenadas locales y se tiene:

$$\underline{K}^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J(\xi, \eta) \underline{B}'(\xi, \eta) \underline{D} \underline{B}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.22)$$

$$\underline{M}^e = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{N}^{e'}(\xi, \eta) \underline{N}^e(\xi, \eta) dA^e \quad (4.23)$$

Para efectuar la integración de las ecuaciones (4.22) y (4.23) se utiliza la cuadratura gaussiana por lo que se transforman en:

$$\underline{K}^e = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 H_m H_n J(\xi_m, \eta_n) \underline{B}'(\xi_m, \eta_n) \underline{D} \underline{B}(\xi_m, \eta_n) \quad (4.24)$$

$$\underline{K}^e = t \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 H_m H_n \underline{N}'(\xi_m, \eta_n) \underline{N}(\xi_m, \eta_n) \quad (4.25)$$

5. ENSAMBLE DE LAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES DEL CONTINUO

Una parte del proceso de solución de la ecuación de equilibrio dinámico es obtener las matrices de masas y de rigideces, del continuo, a partir de las matrices de masas y rigideces de cada elemento.

5.1. ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDECES DEL CONTINUO

Para explicar el procedimiento de ensamble en forma adecuada, se presenta una viga empotrada en la pared idealizada con los cuatro tipos de elementos finitos que se mencionan en el trabajo. Una vez definidas las matrices de rigideces de los elementos finitos, sus componentes ocupan una posición en la matriz de rigideces de todo el continuo dependiendo de los desplazamientos de los nodos que definen la frontera de cada elemento.

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} x+y & x+y & x & x \\ x+y & x+y & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.3)$$

5.1.2. Elemento triangular cuadrático

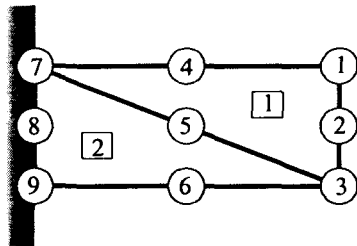


Fig. 5.2 Viga idealizada con elementos triangulares cuadráticos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grado de libertad x	1	3	5	7	9	11	0	0	0
Grado de libertad y	2	4	6	8	10	12	0	0	0

Tabla 5.2 Numeración de los grados de libertad.

$$k^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 0 & 0 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y \\ x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y \\ x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y \\ x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y \end{array} \right) \end{matrix} \quad (5.9)$$

5.1.4. Elemento cuadrilátero cuadrático

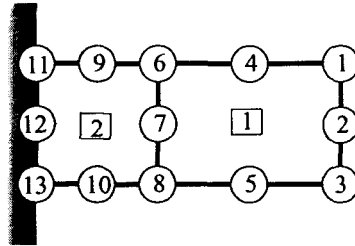


Fig. 5.4 Viga idealizada con elementos cuadriláteros cuadráticos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Grado de libertad x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	0	0	0
Grado de libertad y	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	0	0	0

Tabla 5.4 Numeración de los grados de libertad

$$\begin{matrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\
 K = & \begin{matrix}
 1 & x \\
 2 & x \\
 3 & x \\
 4 & x \\
 5 & x \\
 6 & x \\
 7 & x \\
 8 & x \\
 9 & x \\
 10 & x \\
 11 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 12 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 13 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 14 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 15 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 16 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & x+y & y & y & y & y \\
 17 & & & & & & & & & & & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y \\
 18 & & & & & & & & & & & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y \\
 19 & & & & & & & & & & & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y \\
 20 & & & & & & & & & & & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y & y
 \end{matrix}
 \end{matrix} \tag{5.12}$$

5.2. ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE MASAS DE LA ESTRUCTURA

Una vez definidas las matrices de masas de los elementos finitos, se ensambla la matriz de masas del continuo de la misma forma que se hizo con la matriz de rigideces, es decir, calcular primero las matrices de masas de los elementos finitos y posteriormente hacer el ensamble con los indicadores de ecuación.

5.2.1. Elemento triangular lineal

Para ejemplificar el ensamble de las matrices de masas para el elemento triangular lineal se toman en cuenta la figura 5.1 y los datos mostrados en la tabla 5.1.

$$\begin{array}{c}
 5 \quad 6 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad 10 \\
 m^1 = \begin{pmatrix}
 5 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 6 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 3 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 4 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 1 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 2 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 7 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 8 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 9 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x \\
 10 & x & x & x & x & x & x & x & & & x & x
 \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{5.16}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 0 \quad 11 \quad 12 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 m^2 = \begin{pmatrix}
 0 & & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 11 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 12 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 5 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 6 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 9 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 10 & & y & y & y & y & y & y & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & & \\
 0 & & & & & & & & & & &
 \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{5.17}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 \end{array} \\
 M = \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x+y & x+y & x & x & x+y & x+y & y & y \\
 x & x & x & x & x+y & x+y & x & x & x+y & x+y & y & y \\
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & 0 & 0 \\
 x & x & x & x & x+y & x+y & x & x & x+y & x+y & y & y \\
 x & x & x & x & x+y & x+y & x & x & x+y & x+y & y & y \\
 0 & 0 & 0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y \\
 0 & 0 & 0 & 0 & y & y & 0 & 0 & y & y & y & y
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array} \quad (5.18)$$

5.2.3. Elemento cuadrilátero lineal

Para este elemento se utilizan la figura 5.3 y los datos de la tabla 5.3.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 7 & 8 & 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \\
 \end{array} \\
 \underline{m}^1 = \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x \\
 x & x & x & x & x & x & x & x
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array} \quad (5.19)$$

6. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO

6.1. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO

El modelo matemático correspondiente a las ecuaciones de equilibrio dinámico de los medios continuos modelados con la teoría de la elasticidad lineal se indica con la ecuación (2.24).

La solución de la ecuación (2.24) puede obtenerse mediante la aplicación de los procedimientos clásicos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Sin embargo, tales métodos resultan, en general, poco prácticos para los sistemas estructurales debido a la gran cantidad de variables involucradas. Por tal razón, se han

desarrollado métodos que toman en cuenta las características de las matrices de rigideces, amortiguamiento y de masas, para mejorar la eficiencia del método de solución y se basan en las siguientes ideas:

- 1) Se satisface el equilibrio únicamente en puntos discretos a intervalos Δt , denominado paso de integración (Fig. 6.1).
- 2) Se supone conocida la variación, en el intervalo Δt , de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

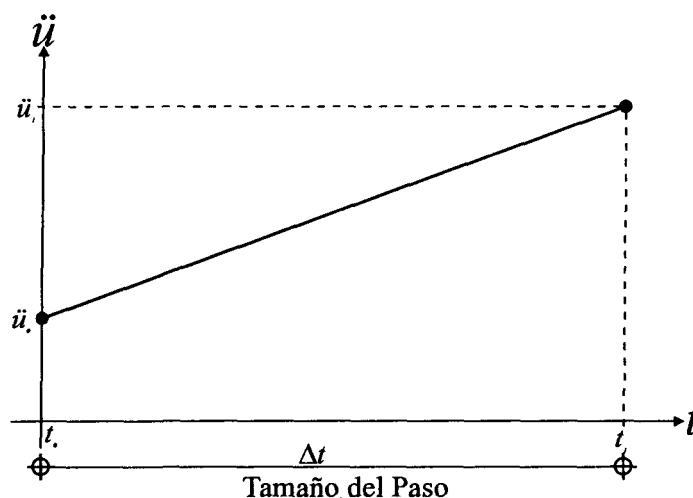


Fig. 6.1 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración (Δt).

Las ideas anteriores en función de la aproximación conducen a los siguientes métodos:

- a) Método de diferencias centrales.
- b) Método de Houbolt.
- c) Método Theta de Wilson.
- d) Método Beta de Newmark.
- e) Método Alfa de Hilber.
- f) Método Cúbico de Argyris.

La diferencia básica entre estos métodos se encuentra en la forma en que se aproxima la respuesta en el intervalo Δt .

En los métodos de diferencias centrales y de Houbolt, se emplea una aproximación de las aceleraciones y velocidades en términos de los desplazamientos, mediante diferencias finitas.

En el método Theta de Wilson se supone una variación lineal en el intervalo $[t, t + \theta\Delta t]$, donde el parámetro $\theta > 1$, controla la convergencia y estabilidad del método.

En el método Beta de Newmark, se generaliza la variación lineal de la aceleración mediante dos parámetros γ y β .

En el método Alfa de Hilber se emplea la misma aproximación que el de Beta de Newmark, pero introduce un término perturbador que se controla mediante un parámetro α .

El método Cúbico de Argyris aproxima la fuerza de inercia mediante una variación cúbica en el intervalo Δt .

El propósito que se persigue en cualquier método de integración numérica es que el método sea eficiente en el contexto de una buena aproximación.

La convergencia de un método se puede aprobar al satisfacer las condiciones de consistencia y estabilidad. La eficiencia de un método depende de la elección apropiada del paso de integración, Δt , para el cual el método converge a la solución.

1.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO. (BETA DE NEWMARK)

El objetivo fundamental al resolver la ecuación de equilibrio dinámico es encontrar los desplazamientos correspondientes a los puntos nodales de la malla de elementos finitos en que se discretizó el continuo.

Dado que para el análisis dinámico, únicamente se conoce la historia de aceleraciones en un intervalo de tiempo (acelerograma); es necesario suponer una variación lineal en un incremento de tiempo (Δt) para encontrar una ecuación que defina la aceleración en cualquier punto.

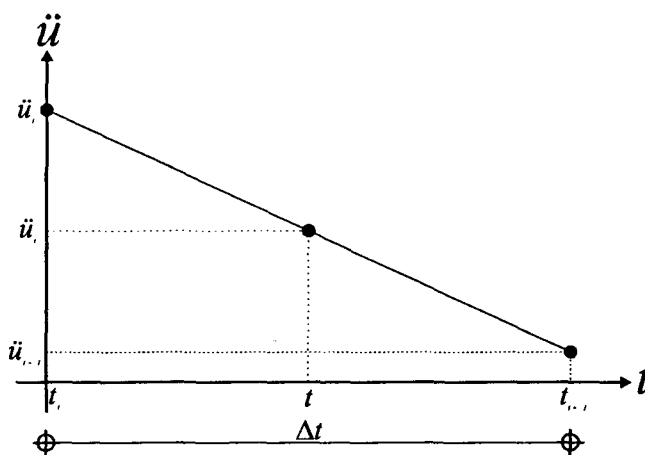


Fig. 6.2 Variación lineal de la aceleración.

Considerando los datos mostrados en la figura (6.2) y la ecuación de la línea recta se obtiene la relación de la aceleración en el intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$.

$$\ddot{u}_t = \ddot{u}_i + \frac{t}{\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (6.1)$$

donde:

\ddot{u}_t Aceleración al tiempo t

\ddot{u}_i Aceleración al tiempo t_i

\ddot{u}_{i+1} Aceleración al tiempo t_{i+1}

t_i	Inicio del intervalo de tiempo en estudio
t_{i+1}	Final del intervalo de tiempo en estudio
t	Tiempo en estudio
Δt	Intervalo de tiempo

Al integrar la ecuación (6.1) con respecto al tiempo se obtiene una relación que define la velocidad al tiempo t , y es:

$$\dot{u}_t = tu_i + \frac{t^2}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i) + c \quad (6.2)$$

donde:

u_i Velocidad al tiempo t

La constante de integración se obtiene aplicando las condiciones de frontera.

Cuando $t = 0$, $\dot{u}_t = \dot{u}_i$ por lo que se encuentra:

$$c = \dot{u}_i \quad (6.3)$$

Al sustituir la ecuación (6.3) en la ecuación (6.2) se obtiene:

$$\dot{u}_t = \dot{u}_i + tu_i + \frac{t^2}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \quad (6.4)$$

donde:

\dot{u}_i Velocidad al tiempo t_i

Al integrar la ecuación (6.4) con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de desplazamiento al tiempo t :

$$u_t = t\dot{u}_i + \frac{t^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) + c \quad (6.5)$$

donde:

u_t Velocidad al tiempo t

Al aplicar las condiciones de frontera se obtiene el valor de la constante de integración. Cuando $t = 0$, $u_t = u_i$ por lo que se obtiene:

$$c = u_i \quad (6.6)$$

Al sustituir la ecuación (6.6) en la ecuación (6.5) se obtiene:

$$u_t = u_i + t\dot{u}_i + \frac{t^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{t^3}{6\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (6.7)$$

donde:

u_i Velocidad al tiempo t_i

Las ecuaciones (6.1), (6.4) y (6.7) se pueden reducir al tomar en cuenta que cuando $t = \Delta t$; $\ddot{u}_t = \ddot{u}_{i+1}$, $\dot{u}_t = \dot{u}_{i+1}$ y $u_t = u_{i+1}$. Al realizar las sustituciones y operaciones necesarias para cada ecuación se obtiene:

$$u_{i+1} = u_{i+1} \quad (6.8)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (6.9)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6} (2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (6.10)$$

Las ecuaciones (6.8) a (6.10) muestran la aceleración, la velocidad y el desplazamiento del suelo ante un evento sísmico.

Para involucrar el evento sísmico en el comportamiento estructural es necesario considerar la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (6.11)$$

Al sustituir las ecuaciones (6.8) a(6.10) en la ecuación (6.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1})\right) + \\ + \mathbf{K}\left(\mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{6}(\mathbf{u}_{i+1} + 2\mathbf{u}_i)\right) = \mathbf{P}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Al despejar $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ de la ecuación (6.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} = \left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{u}_i\right) - \mathbf{K}\left(\mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\mathbf{u}_i\right) \right) \times \\ \times \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{6}\mathbf{K} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Al considerar que:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{u}_i \quad (6.14)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\mathbf{u}_i \quad (6.15)$$

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{6}\mathbf{K} \right)^{-1} \quad (6.16)$$

La ecuación (6.12) queda expresada como:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{K}\mathbf{b}) \quad (6.17)$$

Al sustituir las ecuaciones (6.14) a (6.17) en las ecuaciones (6.8) a (6.10) se obtienen las ecuaciones predictoras o generalización lineal:

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{F}(\underline{P}_{i+1} - \underline{C}\underline{a} - \underline{K}\underline{b}) \quad (6.18)$$

$$\underline{\dot{u}}_{i+1} = \underline{a} + \frac{\Delta t}{2} \underline{\ddot{u}}_{i+1} \quad (6.19)$$

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{b} + \frac{\Delta t^2}{6} \underline{\ddot{u}}_{i+1} \quad (6.20)$$

En las ecuaciones (6.18) a (6.20) se puede observar claramente que conociendo el valor de $\underline{\ddot{u}}_{i+1}$, se pueden conocer los valores de $\underline{\dot{u}}_{i+1}$ y \underline{u}_{i+1} .

6.3. GENERALIZACIÓN DE NEWMARK

Newmark generaliza las ecuaciones (6.8) a (6.10) por medio de dos parámetros adimensionales β y γ :

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_{i+1} \quad (6.21)$$

$$\underline{\dot{u}}_{i+1} = \underline{\dot{u}}_i + ((1-\gamma)\underline{\dot{u}}_i + \gamma\underline{\dot{u}}_{i+1})\Delta t \quad (6.22)$$

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i + \Delta t\underline{\dot{u}}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \underline{\ddot{u}}_i + \beta\Delta t^2 \underline{\ddot{u}}_{i+1} \quad (6.23)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método y el parámetro γ está relacionado con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático.

Cuando $\beta = \frac{1}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ el sistema es incondicionalmente estable. Al sustituir las ecuaciones (6.21) a (6.22) en la ecuación (6.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\underline{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}(\underline{\mathbf{u}}_i + (1-\gamma)\Delta t\underline{\mathbf{u}}_i + \gamma\Delta t\underline{\mathbf{u}}_{i+1}) + \\ & + \mathbf{K}\left(\underline{\mathbf{u}}_i + \Delta t\underline{\dot{\mathbf{u}}}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\underline{\mathbf{u}}_i + \beta\Delta t^2\underline{\mathbf{u}}_{i+1}\right) = \mathbf{P}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Al despejar $\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_{i+1}$ de la ecuación (6.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_{i+1} = & \left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C}(\underline{\mathbf{u}}_i + (1-\gamma)\Delta t\underline{\mathbf{u}}_i) - \mathbf{K}\left(\underline{\mathbf{u}}_i + \Delta t\underline{\dot{\mathbf{u}}}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\underline{\mathbf{u}}_i\right) \right) \times \\ & \times (\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K})^{-1} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Al considerar que:

$$\mathbf{a} = \underline{\mathbf{u}}_i + (1-\gamma)\Delta t\underline{\dot{\mathbf{u}}}_i \quad (6.26)$$

$$\mathbf{b} = \underline{\mathbf{u}}_i + \Delta t\underline{\dot{\mathbf{u}}}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\underline{\mathbf{u}}_i \quad (6.27)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K})^{-1} \quad (6.28)$$

La ecuación (6.25) se reduce a:

$$\underline{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{K}\mathbf{b}) \quad (6.29)$$

Al sustituir las ecuaciones (6.26) a (6.29) en las ecuaciones (6.21) a (6.23) se obtienen las ecuaciones predictoras de Newmark.

$$\underline{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{K}\mathbf{b}) \quad (6.30)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}_{i+1} = \mathbf{a} + \gamma\Delta t\underline{\dot{\mathbf{u}}}_{i+1} \quad (6.31)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{b} + \beta\Delta t^2\underline{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (6.32)$$

6.4. BETA DE NEWMARK CON AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH

Aunque el modelo matemático de los sólidos, elásticos lineales no considera efectos disipativos, al utilizarse en la modelación de las estructuras reales se considera un término correspondiente a las fuerzas disipativas del tipo viscoso lineal.

La matriz de amortiguamiento de la estructura, puede ser calculada con el criterio de Rayleigh mediante la ecuación:

$$C = \alpha M + \mu K \quad (6.33)$$

donde α y μ son conocidos como coeficientes de Rayleigh.

Al sustituir la ecuación (6.33) en las ecuaciones (6.30) a (6.32) se llega a las ecuaciones predictoras de Newmark con amortiguamiento de Rayleigh.

$$\underline{u}_{i+1} = F(\underline{P}_{i+1} - \alpha M \underline{a} - K(\mu \underline{a} + \underline{b})) \quad (6.34)$$

$$\underline{\dot{u}}_{i+1} = \underline{a} + \gamma \Delta t \underline{\dot{u}}_{i+1} \quad (6.35)$$

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{b} + \beta \Delta t^2 \underline{\dot{u}}_{i+1} \quad (6.36)$$

Donde: \underline{a} y \underline{b} se definen por las ecuaciones (6.26) y (6.27); la matriz F y el vector \underline{P}_{i+1} quedan definidos por las expresiones:

$$F = \left[(1 - \alpha \gamma \Delta t) M + (\mu \gamma \Delta t + \beta \Delta t^2) K \right]^{-1} \quad (6.37)$$

$$\underline{P}_{i+1} = -M \underline{\ddot{u}}_g \quad (6.38)$$

Donde el término $\underline{\ddot{u}}_g$ corresponde a la aceleración del apoyo del continuo.

Para efectos de facilitar el manejo de las ecuaciones se plantea la solución como un sistema de ecuaciones de la forma $A \underline{x} = \underline{b}$ y se sustituye $F = \bar{K}$. Al tomar en cuenta las consideraciones anteriores se llega a establecer la ecuación:

$$\underline{K} \underline{u}_1 = \underline{r} \quad (6.39)$$

Donde:

$$\underline{K} = (1 - \alpha\gamma\Delta t)\underline{M} + (\mu\gamma\Delta t + \beta\Delta t^2)\underline{K} \quad (6.40)$$

$$\underline{r} = -\underline{M}\underline{u}_g - \alpha\underline{M}\underline{a} - \underline{K}(\underline{\mu}\underline{a} + \underline{b}) \quad (6.41)$$

6.5. ALGORITMO DEL MÉTODO BETA DE NEWMARK GENERALIZADO CON AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH

- Se calcula la matriz \underline{K} con la ecuación (6.40).
- Se determinan los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{r} para cada punto del acelerograma con las ecuaciones (6.26), (6.27) y (6.41) respectivamente.
- Se resuelve el sistema de ecuaciones mostrado con la ecuación (6.39).
- Se obtiene el vector de velocidades con la ecuación (6.35)
- Finalmente se obtiene el vector de desplazamientos con la ecuación (6.36).
- Se repite el procedimiento tantas veces como puntos de aceleraciones tenga el acelerograma

6.6. PROCESO DE SOLUCIÓN GENERAL DEL MEF

Para el cálculo de desplazamientos aplicando el MEF, se debe tomar en cuenta el siguiente algoritmo:

1. Lectura de los datos del continuo.
 - 1.1 Coordenadas de los nodos de los elementos finitos.
 - 1.2 Condiciones de frontera de los nodos de los elementos finitos.
 - 1.3 Orientación de los elementos finitos.
 - 1.4 En el caso de análisis estático, lectura de las cargas aplicadas en los puntos nodales de los elementos finitos.
 - 1.5 En el caso de análisis dinámico lectura del archivo de aceleraciones.

- 1.6 Lectura de las características de todos los materiales del continuo.
2. Cálculo de las matrices de rigideces de cada elemento finito, utilizando la ecuación (4.1).
3. Si es análisis dinámico cálculo de las matrices de masas de los elementos finitos, utilizando la ecuación (4.2).
4. Ensamble de las matrices de rigideces del continuo, de acuerdo con lo explicado en el capítulo 5.
5. Si es análisis dinámico ensamble de las matrices de masas de los elementos finitos, de acuerdo con lo explicado en el capítulo 5.
6. En el caso de análisis estático resolver el modelo matemático definido por:

$$\mathbf{K}u = \mathbf{P} \quad (6.41)$$

Donde \mathbf{P} es el vector de cargas aplicadas a los puntos nodales del continuo.

7. En el caso de análisis dinámico resolver el modelo matemático mostrado por la ecuación (2.24), con el método Beta de Newmark generalizado con amortiguamiento de Rayleigh (Sección 6.5).

7. PROGRAMA DE COMPUTADORA

En los últimos años las computadoras han tenido un gran desarrollo, permitiendo así la capacidad de procesar información con una gran velocidad, mayor precisión, tienen mayor capacidad de almacenamiento y acceso rápido a la información.

El MEF es un método matricial, es por ello que se requiere del desarrollo de un programa para efectuar las operaciones necesarias.

7.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El procesamiento de información no sólo requiere de una computadora, además es necesario contar con el software adecuado a las necesidades de cada trabajo. Para poderle indicar a la computadora el tratamiento adecuado de la información, se requiere de un lenguaje de programación.

Debido a que el lenguaje verbal es totalmente diferente al lenguaje de las computadoras, se consideran tres niveles de lenguajes de programación, *alto nivel*, *medio nivel* y *bajo nivel*. Los lenguajes de bajo nivel utilizan la programación en el mismo lenguaje de la computadora, es por ello que para estos lenguajes es necesario conocer las notaciones binaria y hexadecimal. Los lenguajes de medio nivel son lenguajes para interés general, éstos no son tan complejos como los de bajo nivel. Los lenguajes de alto nivel son los que más se asemejan al idioma humano, éstos son los lenguajes más utilizados debido a que para escribir una sentencia no es necesario conocer el lenguaje de la máquina.

Dentro de los lenguajes de alto nivel se puede encontrar una gran variedad, como: APL (A Programming Language), BASIC (Beginners All purpose Symbolic Instruction Code) COBOL (A Programming Language), FORTRAN (Formula Translator), Pascal (Llamado así en honor a Blaise Pascal), RPG (Report Program Generator), entre otros.

De los lenguajes de programación mencionados anteriormente, el FORTRAN, es ideal para aplicaciones científicas debido a que usa notación matemática y tiene una gran precisión numérica.

Para el entorno Windows uno de los primeros lenguajes de programación visual fue Visual Basic, que pretendía facilitar el desarrollo de programas de Windows a todos los programadores sin necesidad de tener que aprender otro lenguaje. Visual Basic no se parece nada, en apariencia, a aquel GwBasic o QuickBasic que trabajaba en ambiente DOS, aunque, por supuesto, sigue siendo BASIC. Eso sí, un Basic muy evolucionado, que incorpora múltiples tipos de datos, la posibilidad de crear funciones y procedimientos, estructuras de control típicas de Pascal o C, orientación a objetos, etc.

La mayor parte de los programadores en un momento u otro han utilizado BASIC, es más, la mayoría de ellos aprendieron a programar con este lenguaje. Por ello Visual Basic abre la puerta a la programación sobre Windows a prácticamente todo el mundo y no sólo a aquellos que conocen C y además conocen a fondo el funcionamiento de Windows.

Visual Basic 5.0 permite desarrollar aplicaciones de 32 bits generando verdadero código nativo, lo que redundará en una mayor velocidad de ejecución.

7.2. ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA

La forma como está hecho el programa es en forma modular (mediante subrutinas), con un menú general con ventanas en cascada recursivo, utilizando el esquema y las utilerías del windows 98.

Dada la complejidad para presentar en forma esquemática un programa de tipo recursivo, se considera que el programa lo componen tres etapas que son:

1. Lectura de datos.
2. Cálculo de desplazamientos.
3. Presentación de resultados.

A continuación se explican los aspectos que realiza cada una de las etapas.

7.2.1. Lectura de datos

Este módulo consta de 1712 líneas y está formado por 7 formularios que contienen los datos necesarios para la captura de datos, los formularios son:

FrmSplash.Frm	Contiene los datos la presentación del programa, así como los datos generales del mismo (versión, plataforma, Nombre).
FrmAbout.Frm	Muestra la información acerca del autor del programa y permite ver los recursos de la computadora en que se está trabajando.

FrmNewmark.Frm	Contiene los valores de las constantes de Newmark para el análisis dinámico.
FrmPrint.Frm	Contiene los elementos necesarios para la impresión de los datos, así como los datos para la configuración de la impresora.
FrmRayleigh.Frm	Contiene los valores de los coeficientes de amortiguamiento de Rayleigh.
FrmTiempo.Frm	Contiene los datos de control de tiempo para la animación de los desplazamientos del continuo.
FrmMainForm.Frm	Contiene los objetos necesarios para la lectura de datos del continuo. Este formulario se comparte con la presentación de resultados.

Este módulo al ser interactivo con el usuario maneja el aspecto gráfico, con la información recibida por teclado, así como de los datos actualizados en archivo, por lo que la secuencia de proceso interactúan las tres partes para cada dato requerido.

7.2.2. Cálculo de desplazamientos

Este módulo consta de 1037 líneas y está formado por las siguientes subrutinas:

Calculacion	Subrutina que controla la secuencia para el cálculo de los desplazamientos de los nodos.
BetaNewmark	Función que resuelve la ecuación de equilibrio dinámico por el método Beta de Newmark con amortiguamiento de Rayleigh.
CalcConstElast	Cálculo de las matrices de constantes elásticas para cada tipo de material dependiendo del tipo de estado plano solicitado.
CalcDFunforGlob	Cálculo de las derivadas parciales de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales para ambos elementos cuadriláteros.

CalcDFunforLoc	Cálculo de las derivadas parciales de las funciones de forma respecto a las coordenadas locales, para ambos elementos cuadriláteros.
CalcFunFor	Cálculo de las funciones de forma para ambos elementos cuadriláteros.
CalcGradLib	Cálculo de la matriz de grados de libertad del continuo.
CalcJacobiano	Cálculo de las matrices Jacobianas de transformación para ambos elementos cuadriláteros.
CalcMasasVerElem	Cálculo de las matrices de masas asociadas a los vértices de los elementos finitos, para ambos elementos cuadriláteros.
CalcRigiElem	Cálculo de las matrices de rigideces para ambos elementos cuadriláteros.
CalcRigiVertElem	Cálculo de las matrices de rigideces asociadas a los vértices de los elementos finitos, para ambos elementos cuadriláteros.
Determinante	Calcula el determinante de la Matriz Jacobiana asociada a cada vértice de los elementos finitos, para ambos elementos cuadriláteros.
EnsambleRig	Ensamble de las matrices de masas y rigideces del continuo.
LimpiaMatriz	Elimina el contenido de una matriz.
LimpiaVector	Elimina el contenido de un vector.
MasasElemTC	Cálculo de la matriz de masas para el elemento triangular cuadrático.
MasasElemTL	Cálculo de la matriz de masas para el elemento triangular lineal.
MulConstMat	Multiplica una constante por una matriz.
MulMat	Multiplica dos matrices.
MulMatVector	Multiplica una matriz por un vector.

RigiElemTC	Cálculo de la matriz de rigideces para el elemento triangular cuadrático.
RigiElemTL	Cálculo de la matriz de rigideces para el elemento triangular lineal.
SustGCSim	Solución de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss Crout para matrices simétricas.
TriangGCSim	Triangulación de una matriz para la solución del sistema de ecuaciones por el método Gauss Crout para matrices simétricas.

Este módulo sigue un procedimiento Top-Down, modular para realizar el proceso como se indica a continuación:

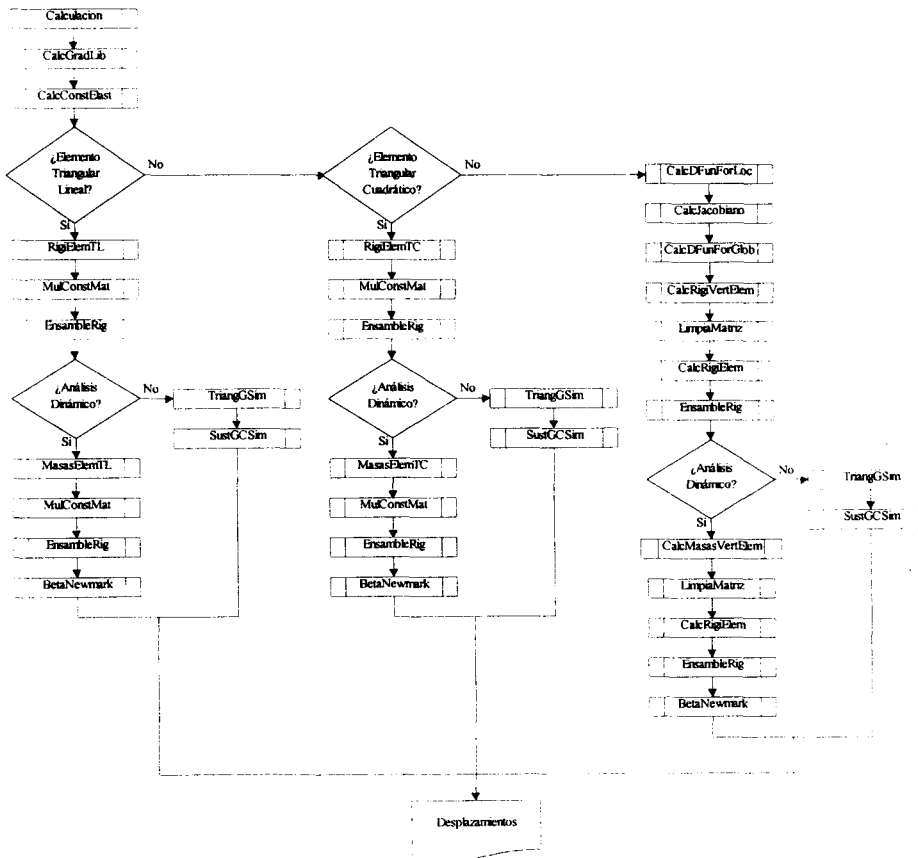


Fig. 7.1 Diagrama de Flujo del módulo de cálculo de desplazamientos.

7.2.3. Presentación de resultados

Este módulo consta de 726 líneas y está formado por las siguientes subrutinas:

DrawEndPicture	Dibuja los desplazamientos de los nodos para el caso de análisis estático.
AnimateSequence	Controla la secuencia de animación de las deformaciones del continuo para el caso de análisis dinámico.
Draw4Sequence	Dibuja los desplazamientos de los nodos para el caso de análisis dinámico.
FillResumen	Llena las matrices de valores máximos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los nodos del continuo.
Timer1_Timer	Controla el tiempo de la animación de deformaciones para el caso de análisis dinámico.
GuardaResultados	Crea un archivo de texto y guarda en él los desplazamientos obtenidos; en el caso de análisis estático sólo guarda los desplazamientos máximos.

Este módulo es de tipo recursivo y maneja el aspecto gráfico, con los resultados obtenidos del análisis.

El programa cuenta con 3475 líneas en total, sin embargo, el módulo de lectura de datos es el que ocupa más líneas debido a que se trata de un módulo interactivo y a la cantidad de información que se debe controlar. El módulo de cálculo de desplazamientos ocupa menos líneas que el módulo de lectura de datos, debido a que se han creado rutinas generalizadas para minimizar el tiempo de máquina y la cantidad de memoria necesitada. El módulo de presentación de resultados es el que ocupa la menor cantidad de líneas a pesar de ser recursivo, esto se debe a que las acciones que puede realizar el usuario en él son mínimas.

En la tabla siguiente se muestra una comparación entre el número de líneas de los tres módulos del programa.

Módulo	Nº de Líneas	Porcentaje
Lectura de datos	1712	49.27 %
Cálculo de desplazamientos	1037	29.84 %
Presentación de resultados	726	20.89 %

Tabla 7.1 Comparación del número de líneas de cada módulo.

7.3. MANUAL DE USUARIO

Se ha desarrollado un programa para automatizar el MEF. Los requerimientos mínimos para la utilización del programa son:

- Microcomputadora con procesador Pentium.
- 4 MB de memoria RAM.
- Sistema operativo 5.0 o superior.
- Windows 95 o superior.

Para la ejecución del programa, es necesario realizar primero la instalación del programa, debido a que se requieren algunos archivos controladores que son grabados en el subdirectorio SYSTEM de Windows.

Para instalar el programa se deben realizar los siguientes pasos:

1. Inserte el diskette de instalación número 1 en la unidad de diskette disponible.
2. Desde Windows seleccione y ejecute el archivo A:\SETUP.
3. Una vez dentro del programa de instalación, se deben responder los datos requeridos.

Al terminar de instalar se crea un grupo de trabajo y dentro de este el icono del MEF. Para iniciar la ejecución del MEF, seleccionar el icono y dar doble click, inmediatamente aparece la pantalla inicial (Fig. 7.2). Se debe hacer previamente la discretización del continuo, es recomendable hacer un resumen con las coordenadas de los nodos y la orientación de los elementos así como el tipo de material correspondiente a cada elemento y las características de los elementos para facilitar el ingreso de los datos solicitados por el programa.

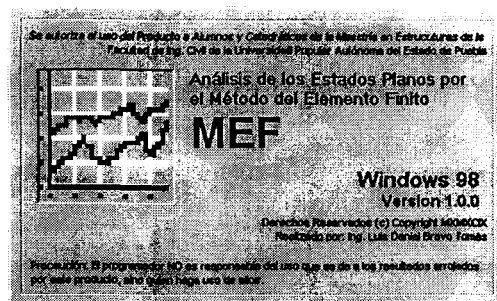


Fig. 7.2 Pantalla de presentación del MEF.

Después de esta pantalla aparece la ventana de datos generales del MEF, en esta ventana se debe seleccionar el tipo de elemento finito que se desea utilizar (Triangular Lineal, Triangular Cuadrático, Cuadrilátero Lineal o Cuadrilátero Cuadrático), el tipo de análisis (Estático o Dinámico) y el tipo de estado plano (Esfuerzos o Deformaciones).

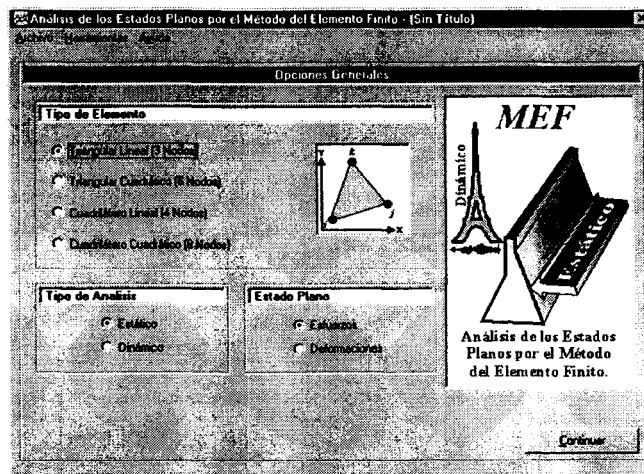


Fig. 7.3 Pantalla de datos generales para el MEF.

Esta pantalla cuenta con un menú con las opciones: Archivo, Herramientas y Ayuda. En el menú archivo se cuenta con: Nuevo proyecto, Abrir proyecto, Guardar proyecto, Imprimir datos del proyecto y Salir; como se puede observar en la figura 7.4.

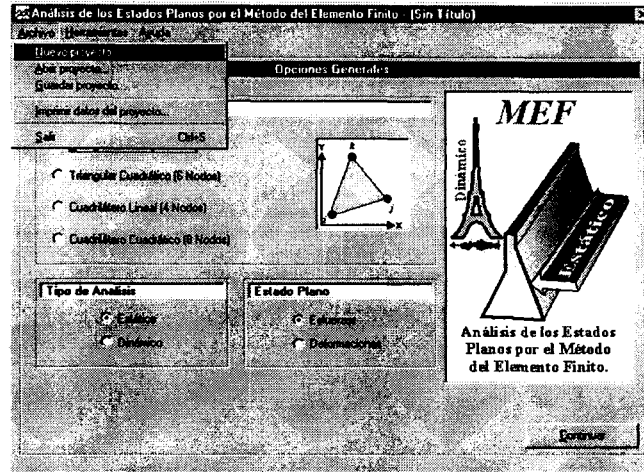


Fig. 7.4 Menú Archivo.

La opción Nuevo proyecto, elimina todo lo que se ha hecho hasta el momento, esta opción puede ser seleccionada en cualquier momento y regresa a la pantalla mostrada en la figura 7.3 para empezar un nuevo proyecto.

La opción Abrir proyecto, lee un archivo de texto que contiene información de algún continuo previamente analizado, siempre busca archivos con extensión MEF.

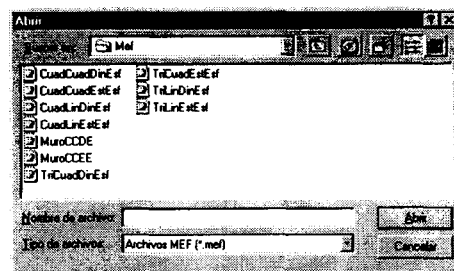


Fig. 7.5 Cuadro de diálogo Abrir.

La opción Guardar proyecto, guarda los datos generales del proyecto en un archivo con extensión MEF.

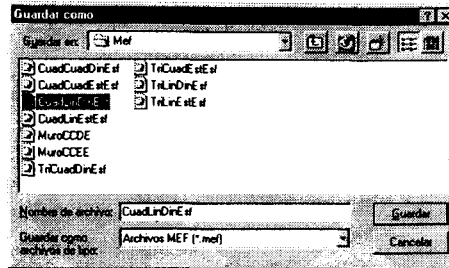


Fig. 7.6 Cuadro de diálogo Guardar como.

La opción Imprimir proyecto, abre un cuadro de diálogo con varias opciones referentes a la impresión de datos, en él se debe seleccionar lo que se desea imprimir, ya sea todo, datos y/o únicamente los resultados del proyecto.

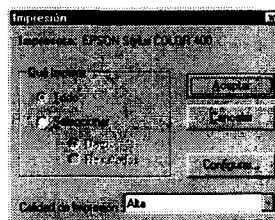


Fig. 7.7 Cuadro de diálogo Impresión.

En el cuadro de diálogo impresión, el botón configurar permite seleccionar el tipo de impresora, tamaño de papel, alimentación de la impresora y la orientación del papel. El botón de propiedades abre el cuadro de diálogo de la impresora seleccionada.

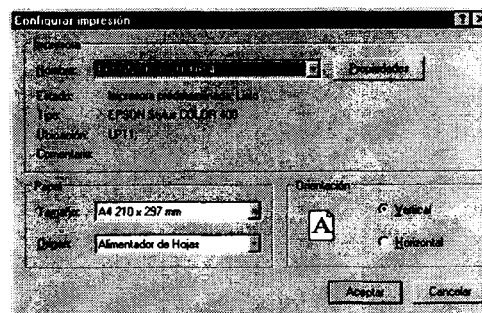


Fig. 7.8 Cuadro de diálogo Configurar impresión.

Una vez seleccionados los datos generales deseados (tipo de elemento finito, tipo de análisis y tipo de estado plano), oprimir el botón continuar. Si se selecciona análisis estático, se visualiza la pantalla mostrada en la figura 7.9, en la cual se deben dar los datos generales de la discretización del continuo.

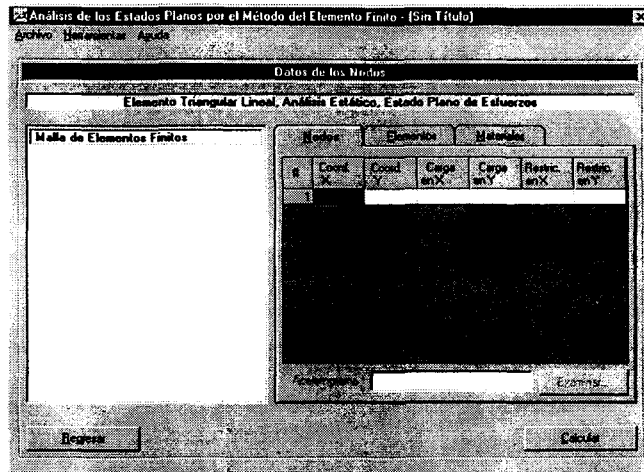


Fig. 7.9 Datos de los Nodos de los Elementos Finitos.

Esta pantalla está dividida en dos partes, un cuadro de dibujo a la izquierda para mostrar gráficamente los datos que se van escribiendo. A la derecha aparecen tres folders con las leyendas Nodos, Elementos y Materiales.

Nótese que la tabla que se ve en la pantalla tiene solo un renglón, y en ningún lado se ha indicado de cuántos nodos, elementos y/o materiales hay en la malla de elementos finitos. Es suficiente con ir agregando los renglones necesarios para cada caso, el programa los toma ordenados así como aparecen en las tablas. Para ello es suficiente teclear <ctrl+A> o utilizar la opción agregar renglón en el menú herramientas, esta acción insertará un renglón inmediatamente después del renglón donde se encuentra ubicado el cursor. En caso que sea necesario eliminar algún renglón se debe teclear <ctrl+E> o utilizar la opción eliminar renglón del menú herramientas, de esta forma se elimina el renglón donde se encuentra ubicado el cursor.

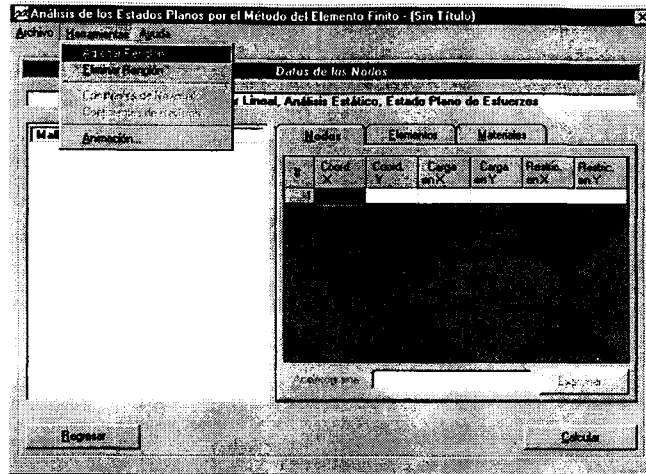


Fig. 7.10 Menú Herramientas.

Inicialmente aparece señalada la carpeta de nodos, en esta carpeta aparece una tabla donde se requieren las coordenadas de los nodos (x, y), cargas en los nodos (dirección x , dirección y) y restricciones de los nodos (1 si el nodo está restringido de movimiento en esa dirección, 0 si el nodo es libre de moverse en esa dirección). Los nodos del continuo se van dibujando al momento de ir dando sus características, Inicialmente aparece el nodo en color gris, si el nodo tiene alguna carga éste cambia automáticamente a color rojo y si tiene alguna restricción cambia a color negro, de esta forma es posible revisar gráficamente los datos que se van introduciendo en el momento.

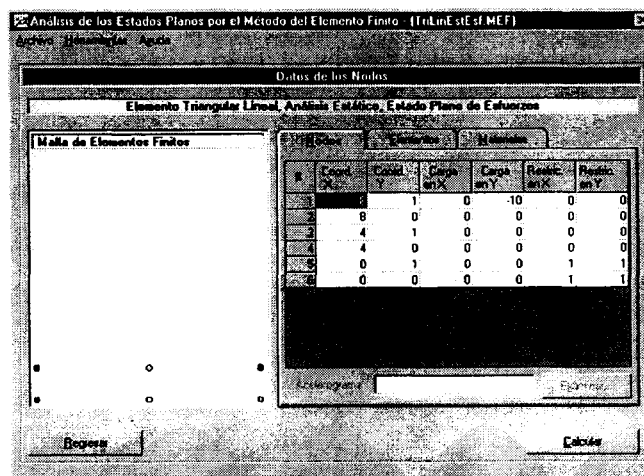


Fig. 7.11 Coordenadas de los Nodos, en tiempo de ejecución.

En la carpeta de elementos, se debe indicar la orientación de ellos y el número de material que les corresponda. Es posible tener tantos materiales como elementos finitos, para ello se le asigna un número a cada material.

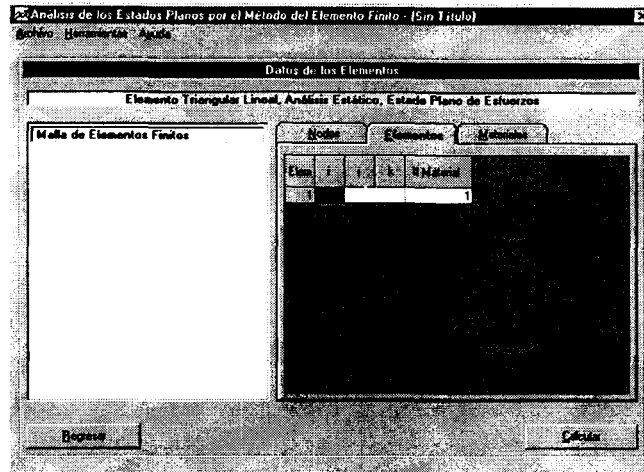


Fig. 7.12 Datos de los Elementos Finitos.

La orientación del elemento se refiere al número del nodo que corresponde a la frontera del elemento, en el momento de dar los datos se dibujan los elementos finitos. Los elementos finitos se dibujan con líneas negras continuas, pero en caso de asignar al elemento un número de material que no existe la línea aparece punteada para indicar de una forma gráfica que se deben revisar los datos.

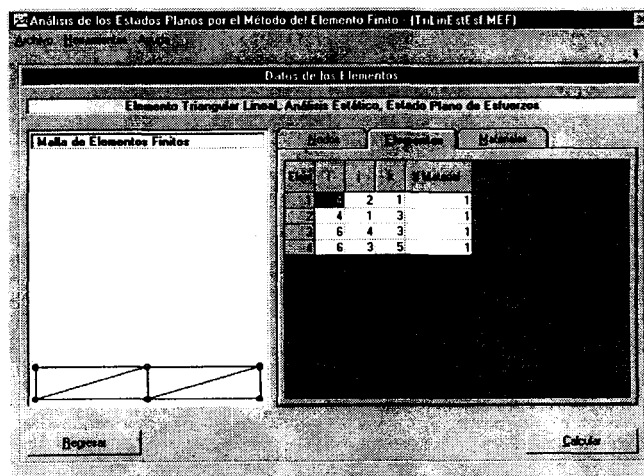


Fig. 7.13 Orientación de los Elementos en tiempo de Ejecución.

En la carpeta de materiales se deben dar las características de los materiales, como son: peso específico, módulo de elasticidad lineal, coeficiente de Poisson y espesor. En el caso de estados planos de deformaciones, el programa toma automáticamente la unidad y no permite cambiar el dato.

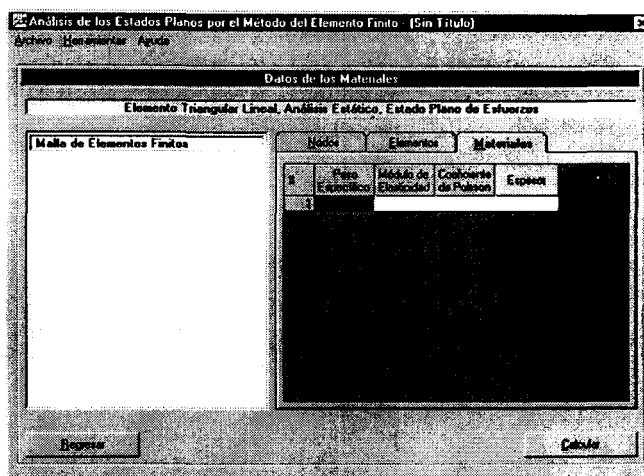


Fig. 7.14 Datos de los Materiales para el Estado Plano de Esfuerzos.

En caso de que aparezcan líneas punteadas al introducir los datos de los elementos, es posible que no se hayan introducido todos los datos de los materiales. Al ir dando los datos de los materiales las líneas punteadas irán desapareciendo, en caso contrario se deben verificar nuevamente los datos de los materiales.

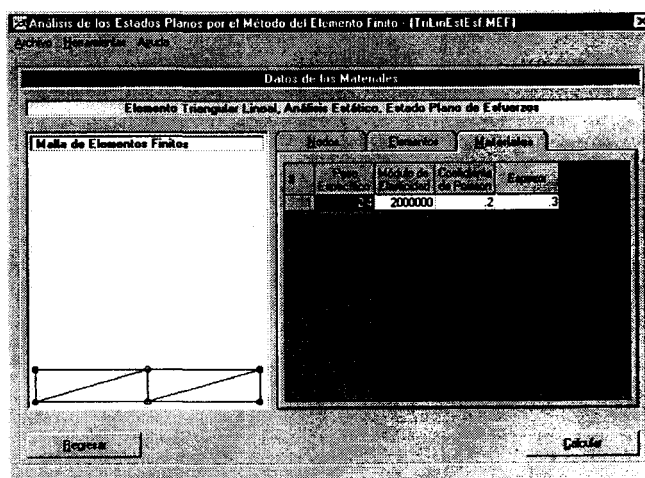


Fig. 7.15 Datos de los Materiales en tiempo de ejecución.

En caso de querer cambiar alguno de los datos generales, seleccionar el botón regresar. Al cambiar alguno de los generales se harán los ajustes pertinentes, sin embargo se deben revisar cuidadosamente los datos antes de continuar. Si todos los datos están correctos, seleccionar calcular para obtener los desplazamientos de los nodos. Al terminal el cálculo de los desplazamientos, aparece un cuadro de diálogo guardar como, que pide al usuario un nombre de archivo con extensión SOL, que guardará los datos del proyecto y los desplazamientos obtenidos.

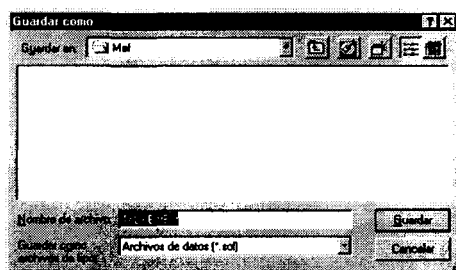


Fig. 7.16 Cuadro de diálogo guardar.(Archivo de datos y soluciones)

El archivo aparentemente está desordenado, debido a que los datos aparecen separados por comas, sin embargo esto es con la intención de poder editarlo con excel y darle el formato deseado para su impresión e interpretación de resultados. Si se selecciona el botón cancelar no se guardará ningún dato.

Los desplazamientos de los nodos se dan en una pantalla de resultados (figura 7.17). Esta pantalla tiene un cuadro de dibujo a la izquierda donde se pueden ver gráficamente las deformaciones que sufrió el continuo ante las cargas que actúan en él; y del lado derecho de la pantalla hay una tabla que contiene los desplazamientos de los nodos, en forma ordenada.

La gráfica de las deformaciones de los nodos se muestra con líneas punteadas de color rojo, y los nodos desplazados en color gris y para resaltar los nodos cargados, éstos se muestran de color rojo menos intenso. La malla inicial sigue mostrándose sin cambio alguno, para dar una mejor perspectiva de las deformaciones.

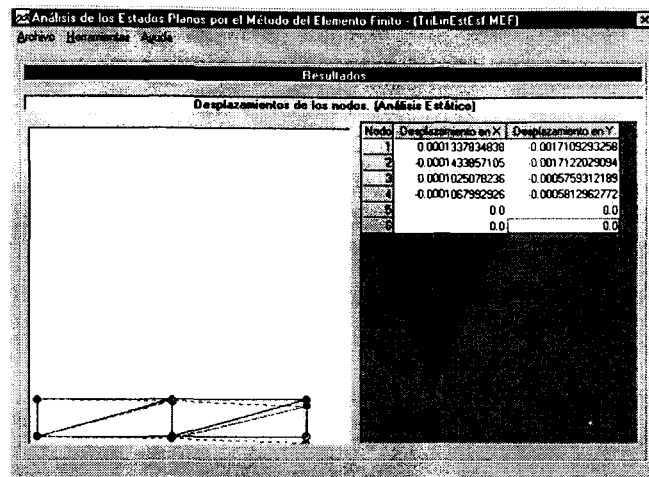


Fig. 7.17 Pantalla de Resultados.

En este momento el programa espera que el usuario decida qué hacer, para ello se debe seleccionar alguna opción del menú archivo.

Para el caso de análisis dinámico, sólo cambia la pantalla mostrada en la figura 7.9, dejan de aparecer las columnas de cargas en los nodos y se activa el cuadro de texto donde se debe indicar cual es el archivo que contiene al acelerograma.

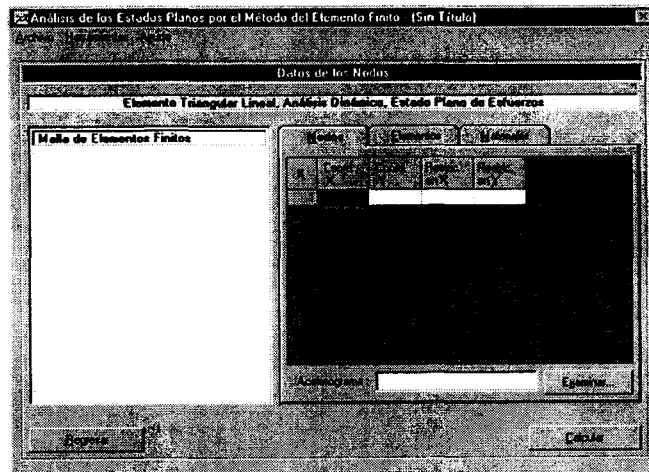


Fig. 7.18 Características de los nodos para análisis dinámico.

Si se conoce la ubicación del archivo se puede escribir la ruta completa, de lo contrario seleccionar el botón examinar y buscar el archivo deseado en el cuadro de diálogo abrir.

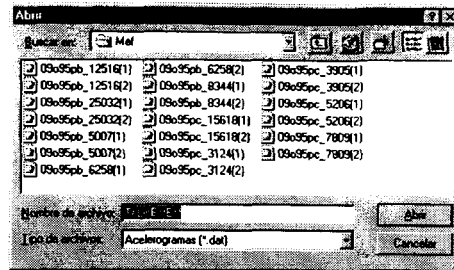


Fig. 7.19 Cuadro de diálogo abrir, para seleccionar acelerograma.

Este cuadro de diálogo busca automáticamente archivos con extensión DAT. El archivo del acelerograma debe estar en formato texto a una columna, y el primer dato que debe contener es el número de puntos del acelerograma seguido del intervalo de tiempo de las aceleraciones, y finalmente las aceleraciones.

El ingreso de los datos se hace de la misma forma que en el análisis estático, como se puede observar en la figura 7.20.

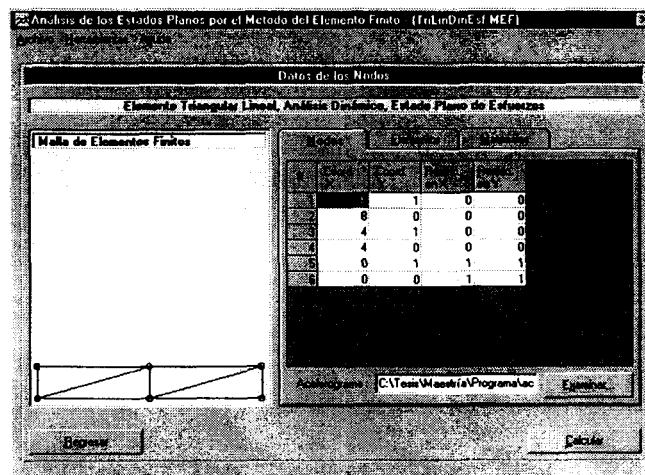


Fig. 7.20 Datos de un ejemplo para análisis dinámico.

Antes de proceder al cálculo de desplazamientos, se deben verificar los valores de las constantes de Newmark y de los coeficientes de Rayleigh. Los valores que hacen que el continuo converja a la solución adecuada son $\gamma = 0.25$ y $\beta = 0$, sin embargo en el menú herramientas se activan automáticamente las opciones constantes de Newmark y coeficientes de Rayleigh. Estas opciones permiten que el usuario elija los valores que desee para las constantes de Newmark y coeficientes de Rayleigh, si no se hace ninguna modificación se asume que se trata de un sistema libre no amortiguado, es decir, que los coeficientes de Rayleigh son cero.

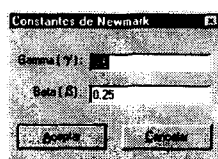


Fig. 7.21 Cuadro de diálogo Constantes de Newmark.



Fig. 7.22 Cuadro de diálogo Coeficientes de Rayleigh.

Una vez que están completos los datos, seleccionar el botón calcular, esta acción efectúa las operaciones necesarias para determinar el comportamiento del continuo ante el evento sísmico aplicado. Al igual que en el análisis estático, al terminar de calcular los desplazamientos de los nodos, se pedirá el nombre del archivo donde se deseen guardar los datos generales del continuo y los valores de desplazamientos obtenidos.

En la figura 7.23 se puede observar que la pantalla de resultados está organizada con dos folders, uno con la leyenda resumen y el otro con la leyenda máximos. El folder de máximos, muestra una tabla del lado izquierdo y un recuadro del lado derecho. La tabla muestra los valores máximos absolutos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los

nodos; En el recuadro de la derecha se simulan las deformaciones del continuo al presionar el botón animar.

	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
1	0.0000532	0.0068956	0.9218095
2	0.0005199	0.0303462	2.198772
3	0.0000493	0.0047822	0.8473399
4	0.0005206	0.0303483	2.1980147
5	0.0000498	0.0050021	0.6827802
6	0.0001965	0.0111251	0.684293
7	0.0000368	0.003522	0.5638157
8	0.0001978	0.0111148	0.6754832

Fig. 7.23 Pantalla de resultados del análisis dinámico. (Máximos)

En el folder resumen, se pueden consultar las historias de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Este folder está organizado con una tabla de datos a la izquierda y a la derecha tres opciones que permiten seleccionar la matriz de datos que se desea visualizar (Fig. 7.24).

	1	2	3	4
1	0.00000000	-0.0000892	-0.00001358	0.00001737
2	0.00000000	-0.00004361	-0.00019191	-0.00031237
3	0.00000000	-0.00001465	-0.00004095	-0.00022972
4	0.00000000	-0.00004379	-0.00019251	-0.00031300
5	0.00000000	-0.00005883	-0.0000752	0.00001511
6	0.00000000	-0.00001951	-0.00007867	-0.00012023
7	0.00000000	-0.00001119	-0.00003107	-0.00002307
8	0.00000000	-0.00001998	-0.00008010	-0.00012152

Fig. 7.24 Pantalla de resultados del análisis dinámico. (Resumen)

Para controlar la animación del comportamiento del continuo ante la carga dinámica, en el menú herramientas está la opción Animación..., esta opción muestra un cuadro de diálogo, donde se debe dar el tiempo deseado para la animación, en segundos.

La animación se suspende cuando ha transcurrido el tiempo deseado y/o cuando se ha simulado toda la historia de desplazamientos correspondiente al acelerograma analizado.



Fig. 7.25 Cuadro de diálogo animación.

Finalmente, se presenta la opción acerca de del menú ayuda, esta opción contiene la información general del programa, así como una opción para verificar información del sistema.

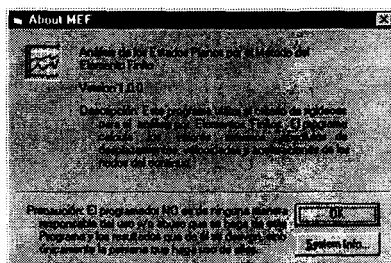


Fig. 7.26 Cuadro de diálogo acerca de...

1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

8.1. ESTÁTICO

Se desea obtener con el método del elemento finito las deformaciones de la viga mostrada en la figura 8.1.

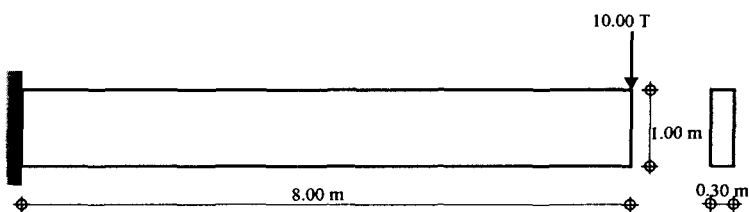


Fig. 8.1 Viga empotrada en la pared.

La viga tiene un espesor de 30 centímetros, es por ello que el modelo estructural corresponde a un estado plano de esfuerzos. (El coeficiente de Poisson del material

empleado es de 0.20, su módulo de elasticidad lineal es $2,000,000 \frac{T}{m^2}$ y su peso específico es $2.4 \frac{T}{m^3}$)

8.1.1. Datos

8.1.1.1. Discretización en elementos triangulares lineales

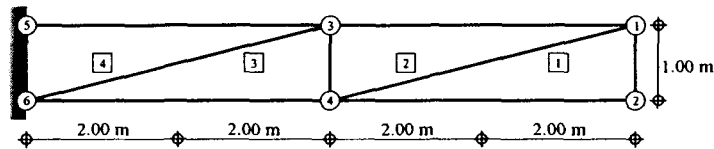


Fig. 8.2 Discretización de la viga en elementos triangulares lineales.

NODO	COORDENADAS	
	x	Y
1	8.0	1.0
2	8.0	0.0
3	4.0	1.0
4	4.0	0.0
5	0.0	1.0
6	0.0	0.0

Tabla 8.1 Coordenadas de los nodos de la malla de elementos finitos.

ELEMENTO	i	j	k
1	4	2	1
2	4	1	3
3	6	4	3
4	6	3	5

Tabla 8.2 Orientación de los elementos de la malla de elementos finitos.

8.1.1.2. Discretización en elementos triangulares cuadráticos

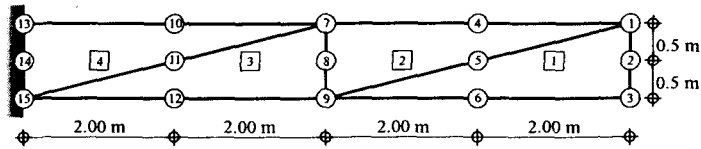


Fig. 8.3 Discretización de la viga en elementos triangulares cuadráticos.

NODO	COORDENADAS		NODO	COORDENADAS	
	x	y		x	y
1	8.0	1.0	9	4.0	0.0
2	8.0	0.5	10	2.0	1.0
3	8.0	0.0	11	2.0	0.5
4	6.0	1.0	12	2.0	0.0
5	6.0	0.5	13	0.0	1.0
6	6.0	0.0	14	0.0	0.5
7	4.0	1.0	15	0.0	0.0
8	4.0	0.5			

Tabla 8.3 Coordenadas de los nodos de la malla de elementos finitos.

ELEMENTO	i	j	k	l	m	n
1	9	6	3	2	1	5
2	9	5	1	4	7	8
3	15	12	9	8	7	11
4	15	11	7	10	13	14

Tabla 8.4 Orientación de los elementos de la malla de elementos finitos.

8.1.1.3. Discretización en elementos cuadriláteros lineales

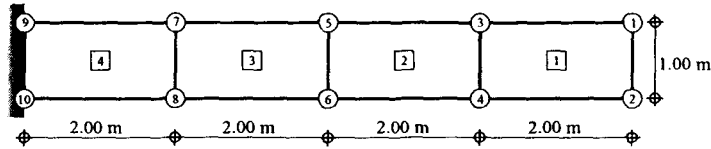


Fig. 8.4 Discretización de la viga en elementos cuadriláteros lineales.

NODO	COORDENADAS		NODO	COORDENADAS	
	x	y		x	y
1	8.0	1.0	6	4.0	0.0
2	8.0	0.0	7	2.0	1.0
3	6.0	1.0	8	2.0	0.0
4	6.0	0.0	9	0.0	1.0
5	4.0	1.0	10	0.0	0.0

Tabla 8.5 Coordenadas de los nodos de la malla de elementos finitos.

ELEMENTO	i	j	k	l
1	4	2	1	3
2	6	4	3	5
3	8	6	3	7
4	10	8	7	9

Tabla 8.6 Orientación de los elementos de la malla de elementos finitos.

8.1.1.4. Discretización en elementos cuadriláteros cuadráticos

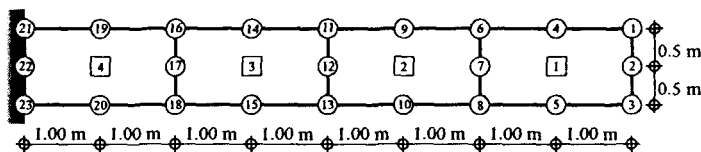


Fig. 8.5 Discretización de la viga en elementos cuadriláteros cuadráticos.

NODO	COORDENADAS		NODO	COORDENADAS	
	x	y		x	y
1	8.0	1.0	13	4.0	0.0
2	8.0	0.5	14	3.0	1.0
3	8.0	0.0	15	3.0	0.0
4	7.0	1.0	16	2.0	1.0
5	7.0	0.0	17	2.0	0.5
6	6.0	1.0	18	2.0	0.0
7	6.0	1.0	19	1.0	1.0
8	6.0	0.0	20	1.0	0.0
9	5.0	1.0	21	0.0	1.0
10	5.0	0.0	22	0.0	0.5
11	4.0	1.0	23	0.0	0.0
12	4.0	0.5			

Tabla 8.7 Coordenadas de los nodos de la malla de elementos finitos.

ELEMENTO	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>
1	8	3	1	6	5	2	4	7
2	13	8	6	11	10	7	9	12
3	18	13	11	16	15	12	14	17
4	23	18	16	21	20	17	19	22

Tabla 8.8 Orientación de los elementos de la malla de elementos finitos.

8.1.2. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos al analizar la viga con diversos tipos de elementos finitos. Posteriormente se muestra una comparación gráfica de los resultados obtenidos, donde se incluye la solución de la viga aplicando los conceptos básicos de resistencia de materiales.

8.1.2.1. Elementos triangulares lineales

NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	x	y
1	1.338E-04	-1.711E-03
2	-1.434E-04	-1.712E-03
3	1.025E-04	-5.759E-04
4	-1.068E-04	-5.813E-04
5	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	0.000E+00

Tabla 8.9 Desplazamientos de los Nodos de la malla mostrada en la fig. 8.2.

8.1.2.2. Elementos triangulares cuadráticos

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	x	y		x	y
1	3.151E-05	-4.419E-04	9	-3.594E-05	-4.162E-05
2	-1.088E-04	-4.351E-04	10	-3.058E-05	-1.107E-06
3	-2.530E-04	-4.353E-04	11	-3.391E-05	-8.042E-06
4	-4.133E-05	-4.517E-06	12	-3.665E-05	-1.192E-05
5	-9.471E-05	-7.900E-06	13	0.000E+00	0.000E+00
6	-1.446E-04	-1.192E-05	14	0.000E+00	0.000E+00
7	-1.021E-04	-3.854E-05	15	0.000E+00	0.000E+00
8	-6.992E-05	-4.017E-05			

Tabla 8.10 Desplazamientos de los Nodos de la malla mostrada en la fig. 8.3.

8.1.2.3. Elementos cuadriláteros lineales

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	x	y		x	y
1	1.183E-03	-1.273E-02	6	-8.859E-04	-3.999E-03
2	-1.180E-03	-1.272E-02	7	5.168E-04	-1.114E-03
3	1.107E-03	-8.065E-03	8	-5.169E-04	-1.114E-03
4	-1.108E-03	-8.068E-03	9	0.000E+00	0.000E+00
5	8.861E-04	-4.000E-03	10	0.000E+00	0.000E+00

Tabla 8.11 Desplazamientos de los Nodos de la malla mostrada en la fig. 8.4.

8.1.2.4. Elementos cuadriláteros cuadráticos

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	x	Y		x	y
1	3.190E-03	-3.415E-02	13	-2.379E-03	-1.067E-02
2	-2.816E-06	-3.411E-02	14	1.930E-03	-6.315E-03
3	-3.169E-03	-3.408E-02	15	-1.930E-03	-6.317E-03
4	3.130E-03	-2.775E-02	16	1.374E-03	-2.963E-03
5	-3.125E-03	-2.776E-02	17	1.412E-07	-2.922E-03
6	2.976E-03	-2.161E-02	18	-1.375E-03	-2.961E-03
7	2.096E-06	-2.159E-02	19	7.269E-04	-7.936E-04
8	-2.979E-03	-2.159E-02	20	-7.272E-04	-7.939E-04
9	2.727E-03	-1.583E-02	21	0.000E+00	0.000E+00
10	-2.729E-03	-1.584E-02	22	0.000E+00	0.000E+00
11	2.381E-03	-1.068E-02	23	0.000E+00	0.000E+00
12	-2.308E-07	-1.066E-02			

Tabla 8.12 Desplazamientos de los Nodos de la malla mostrada en la fig. 8.5.

8.1.3. Resumen de los desplazamientos del nodo 1

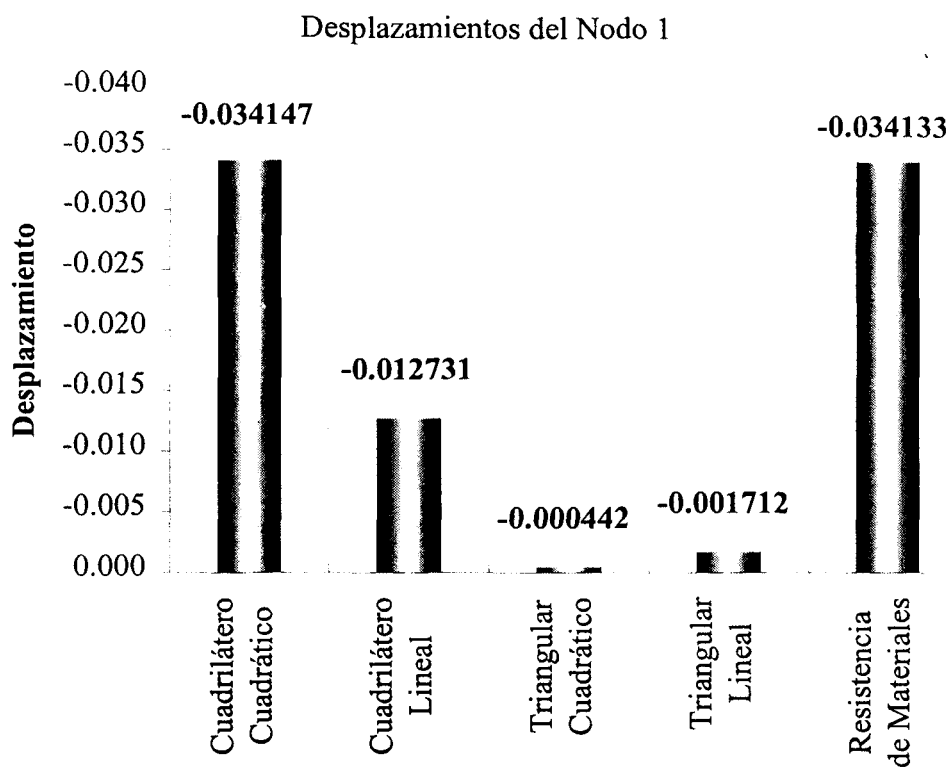


Fig. 8.5 Desplazamientos del Nodo 1 con los cuatro tipos de elemento finito.

La barra de la derecha en la fig. 8.5 representa la deflexión máxima de una viga en cantiliver ante una carga puntual aplicada en el extremo libre, calculada con la ecuación:

$$\delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (8.1)$$

Donde:

- P Carga puntual aplicada a la viga.
- L Longitud de la viga.
- E Módulo de elasticidad lineal, del material de la viga.
- I Momento de inercia de la sección transversal de la viga.

8.2. DINÁMICO

Se desea obtener con el método del elemento finito las deformaciones de la viga mostrada en la figura 8.6.

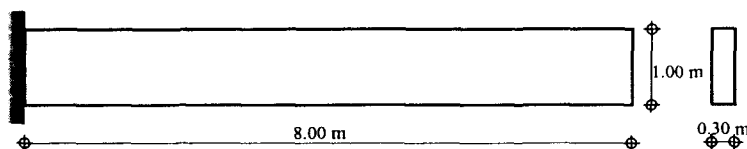


Fig. 8.6 Viga empotrada en la pared.

La viga tiene un espesor de 30 centímetros, es por ello que el modelo estructural corresponde a un estado plano de esfuerzos. (El coeficiente de Poisson del material empleado es de 0.20, su módulo de elasticidad lineal es $2,000,000 \text{ T/m}^2$ y su peso específico es 2.4 T/m^3)

8.2.1. Datos

El criterio utilizado es dejar fija la discretización de elementos finitos y variar la historia de aceleraciones. La discretización a tomar en consideración es la mostrada en la figura 8.5, las coordenadas de sus nodos y la orientación de sus elementos se pueden consultar en las tablas 8.7 y 8.8 respectivamente.

En el análisis se hacen variar las aceleraciones, para ello se utiliza un acelerograma con 25032 aceleraciones. Se toman en cuenta únicamente las aceleraciones en el sentido horizontal. De cada historia de aceleraciones se obtienen 3 diferentes, variando el incremento de tiempo.

NOTA: Los ejemplos fueron ejecutados en una computadora con las siguientes características:

- Pentium II a 350 MHz.
- 64 MB de memoria en RAM
- 1.2 GB de espacio libre en disco duro.

En las figuras siguientes se muestran los acelerogramas para el análisis.

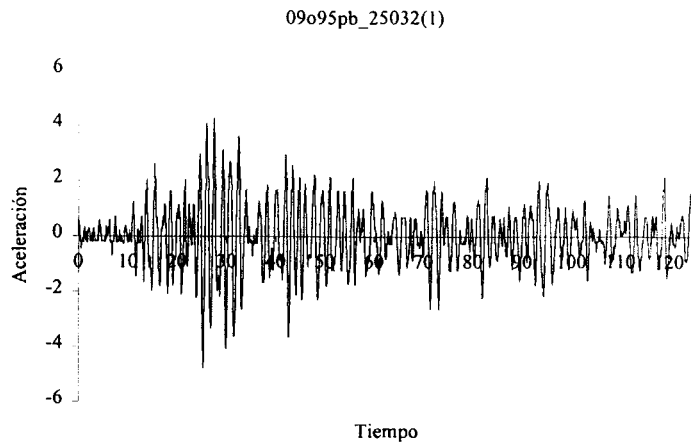


Fig. 8.7 Acelerograma 09o95pb_25032(1), $\Delta t = 0.005$.

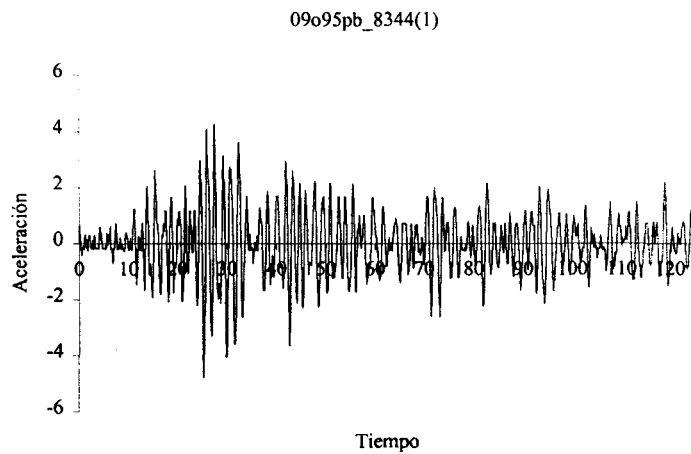


Fig. 8.8 Acelerograma 09o95pb_8344(1), $\Delta t = 0.015$.

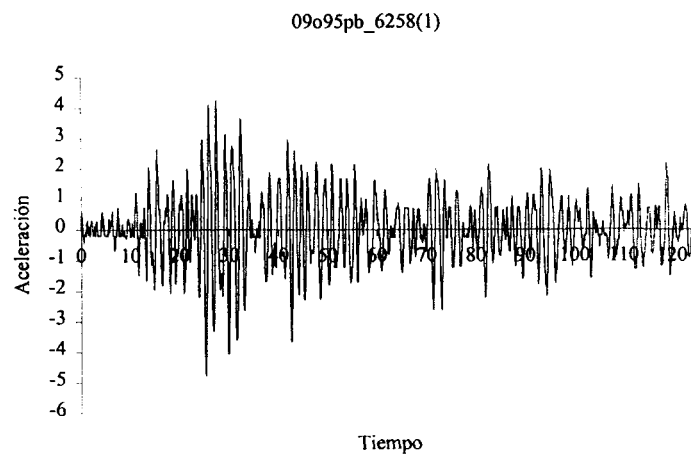


Fig. 8.9 Acelerograma 09o95pb_6258(1), $\Delta t = 0.020$.

8.2.2. Resultados

En este inciso se muestran los resultados obtenidos con los acelerogramas anteriores.

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	X	y		x	y
1	0.003904	0.042073	13	0.003103	0.015075
2	0.000136	0.042080	14	0.002511	0.009659
3	0.003987	0.042080	15	0.002646	0.009657
4	0.003875	0.034790	16	0.002024	0.004914
5	0.003959	0.034787	17	0.000060	0.004865
6	0.003744	0.027599	18	0.002066	0.004918
7	0.000129	0.027595	19	0.001190	0.001440
8	0.003825	0.027604	20	0.001213	0.001441
9	0.003426	0.021030	21	0.000000	0.000000
10	0.003504	0.021030	22	0.000000	0.000000
11	0.002935	0.015067	23	0.000000	0.000000
12	0.000103	0.015073			

Tabla 8.13 Desplazamientos máximos absolutos del acelerograma de la figura 8.7

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	X	y		x	y
1	0.003467	0.042833	13	0.003202	0.015231
2	0.000374	0.042839	14	0.002577	0.009422
3	0.003681	0.042841	15	0.002745	0.009426
4	0.003462	0.035734	16	0.001947	0.004640
5	0.003675	0.035731	17	0.000148	0.004589
6	0.003412	0.028651	18	0.002086	0.004646
7	0.000350	0.028649	19	0.001100	0.001315
8	0.003625	0.028657	20	0.001172	0.001322
9	0.003261	0.021722	21	0.000000	0.000000
10	0.003481	0.021722	22	0.000000	0.000000
11	0.003003	0.015223	23	0.000000	0.000000
12	0.000271	0.015217			

Tabla 8.14 Desplazamientos máximos absolutos del acelerograma de la figura 8.8

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	x	y		x	y
1	0.004426	0.053267	13	0.003921	0.019105
2	0.000265	0.053275	14	0.003299	0.011764
3	0.004665	0.053279	15	0.003380	0.011765
4	0.004418	0.044539	16	0.002496	0.005752
5	0.004645	0.044534	17	0.000106	0.005684
6	0.004343	0.035814	18	0.002554	0.005755
7	0.000247	0.035813	19	0.001394	0.001616
8	0.004539	0.035822	20	0.001424	0.001619
9	0.004130	0.027250	21	0.000000	0.000000
10	0.004276	0.027249	22	0.000000	0.000000
11	0.003821	0.019099	23	0.000000	0.000000
12	0.000192	0.019089			

Tabla 8.15 Desplazamientos máximos absolutos del acelerograma de la figura 8.9

8.2.3. Resumen de soluciones

En las figuras siguientes se pueden observar los promedios de desplazamientos del nodo 3, para los acelerogramas en cuestión.

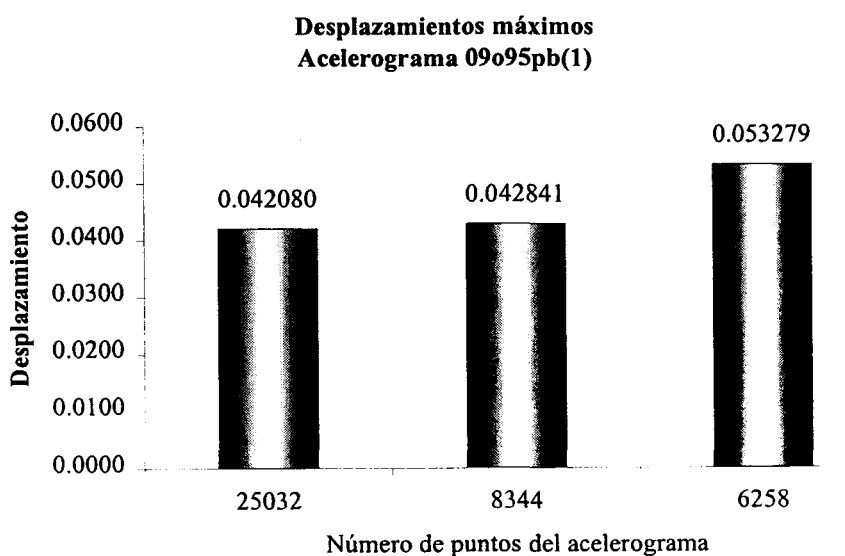


Fig. 8.10 Desplazamientos máximos, acelerograma 09o95pb(1).

9. CONCLUSIONES

Con base en el trabajo realizado se presentan recomendaciones relacionadas con el desarrollo del programa que permitan un trabajo eficiente al elaborar este tipo de sistema y por otro lado se comparan los resultados obtenidos, en el caso estático para diferentes tipos de elementos con el mismo problema y en el caso dinámico se utilizó un solo elemento que es el que da un mejor comportamiento en el caso estático y se hizo variar el número de puntos del acelerograma para conocer la capacidad del programa al respecto.

En relación a la programación del MEF, se propone el siguiente plan de trabajo:

- Estudiar el modelo matemático y resolverlo a partir de un ejemplo.
- Definir la finalidad del programa.
- Elaborar el algoritmo general del modelo.

- Elaborar un calendario de trabajo.
- Elegir un lenguaje de programación.
- Desarrollar el sistema.
- Información general del sistema y manual de usuario.

Durante la etapa del desarrollo del sistema se propone lo siguiente:

- Crear una rutina para cada cálculo que sea necesario, dependiendo del tipo de elemento finito.
- Hacer una rutina general para que, de acuerdo a los datos leídos por el programa, ésta llame a las demás rutinas de forma ordenada.
- Finalmente crear el ambiente de salida de datos.

En relación con el análisis estático, en la figura 8.5 se puede observar que el elemento cuadrilátero cuadrático es que tiene un mejor comportamiento al tener una mayor aproximación con la solución obtenida al aplicar los conceptos de resistencia de materiales.

En relación con el caso dinámico, al hacer variar el número de puntos del acelerograma se puede observar la capacidad del programa, al realizar el cálculo con un acelerograma de 25032 puntos. Dicha capacidad se ve limitada únicamente por la capacidad de la computadora en que se esté trabajando.

Los desplazamientos mostrados son un promedio de las historias de desplazamientos obtenidas. En la figura 8.10 se puede observar que conforme se disminuye el número de puntos considerados, los desplazamientos son cada vez mayores; esto ocurre debido a que el método empleado es aproximado.

10. REFERENCIAS

- K. Chopra, Anil. (1995), *Dynamics of structures, theory and applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, N.J.
- W. Clough, Ray, Penzien, Joseph. (1993), *Dynamics of structures*, Second edition, Mc Graw Hill, USA.
- W. Weaver, JR, S. P. Timoshenko, D. H. Young. (1990), *Vibration problems in Engineering, second edition*, Wiley interscience, USA.
- Craig, Roy R. (1981), *Structural Dynamics, an introduction to computer methods*, John Wiley and Sons, INC, New York.
- Irvine, Max, (1990), *Structural dynamics for the practising engineer*, UNWIN HYMAN, Great Britain.
- Bazán Zurita, Enrique, Meli Piralla Roberto. (1992), *Manual de diseño sísmico de edificios*, LIMUSA, México.

- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., (1995), *El método de los elementos finitos, formulación básica y problemas lineales, Volumen 1*, Cuarta edición, Mc Graw Hill, Cimne Barcelona, Barcelona España.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., (1995), *El método de los elementos finitos, Mecánica de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad, Volumen 2*, Cuarta edición, Mc Graw Hill, Cimne Barcelona, Barcelona España.
- N. Reddy, J. (1993), *An introduction to the finite element method*, Mc Graw Hill, Texas A & M University.
- Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K, *Finite elements and approximation*, Wiley, USA.
- Cook, R., Malkus, D. and Plesha, M. *Concepts and applications of finite element analysis*, Wiley, USA.
- R. Buchanan, George, *Theory and problems of finite element analysis*, Schaum's outline series, Mc Graw Hill.
- Livesley, R. K. (1994), *Elementos finitos, introducción para ingenieros*, LIMUSA, México.
- Burden L. Richard and Douglas Faires J. (1985), *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- I. Grossman Stanley. (1996), *Álgebra lineal*, quinta edición, Mc Graw Hill. México.
- Bravo, L. y Huitzil, C. (1998), *Método del elemento finito (aplicado al análisis estructural)*, Tesis profesional UPAEP.