



**UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE PUEBLA**

MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS

*VIBRACIONES EN CIMENTACIONES
PARA MAQUINARIA*

Trabajo de investigación

que para obtener el grado de

MAESTRO EN ESTRUCTURAS

Presenta:

MANUEL CASTILLO ACOSTA

Puebla, Pue.

Enero de 2000



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyła**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jiutepec, Mor., 8 de diciembre de 1999.

MTRO. GERARDO DE JESÚS LÓPEZ ARCIGA
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA EN ESTRUCTURAS
UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL ESTADO DE PUEBLA
P R E S E N T E

Estimado Mtro. López Arciga:

Por este conducto le informo que el **Ing. Manuel Castillo Acosta** concluyó satisfactoriamente la realización de su tesis *Vibraciones en Cimentaciones para Maquinaria*. Los objetivos y alcances de dicha tesis fueron cubiertos plenamente, cumpliendo con los estándares de calidad requeridos para la obtención del grado de maestro en estructuras.

Sin otro particular, me despido de Usted afectuosamente y estoy a sus órdenes para cualquier información adicional.

A T E N T A M E N T E



DR. JAVIER AVILÉS LÓPEZ
Investigador Nacional

*“El hombre superior se centra en la justicia,
el hombre vulgar en el beneficio”*

Confucio

*A Verónica y Javier
Por el tiempo no dedicado a ustedes*

A mis profesores y compañeros

Al Dr. Javier Avilés López

Con respeto, admiración y gratitud

INDICE

INDICE DE FIGURAS	iii
INDICE DE TABLAS	iv
1. INTRODUCCION	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Tipos de maquinaria	6
1.2.1 Maquinaria reciprocante	7
1.2.2 Maquinaria de impacto	7
1.2.3 Maquinaria rotatoria	7
1.3 Justificación	8
1.4 Objetivos	10
2. CIMENTACIONES PARA EQUIPO ROTATORIO	11
2.1 Ecuaciones de equilibrio	11
2.2 Respuesta en estado estacionario	13
2.3 Funciones de impedancia del suelo	14
2.4 Parámetros efectivos del suelo	17
3. PROGRAMA DYNA3	20
3.1 Descripción general	20
3.2 Ejemplos	29
3.2.1 Ejemplo numérico (Resolución manual)	29
3.2.2 Ejemplo numérico (Resolución computarizada)	37
4. ESTUDIO PARAMETRICO	39
4.1 Características del sistema	39
4.2 Parámetros adimensionales	40
4.2.1 Efecto de la relación L/B	41
4.2.2 Efecto de la relación H/B	44
4.2.3 Efecto de la relación β'_s/β_s	47
4.2.4 Efecto de la relación D/B	50

5. AYUDAS DE DISEÑO	53
5.1 Tablas de funciones de impedancia	53
5.2 Ejemplo de aplicación	54
6. CONCLUSIONES	65
7. REFERENCIAS	68

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Modelo del sistema máquina – cimentación – suelo	11
Figura 2.2	Perfil estratificado	18
Figura 2.3	Estrato homogéneo equivalente	18
Figura 3.1	Bloque sometido a vibración horizontal y de rotación respecto al eje Y (cabeceo)	29
Figura 4.1 (a)	Parámetros geométricos y mecánicos. Cimentación	39
Figura 4.1 (b)	Parámetros geométricos y mecánicos. Suelo	40
Figura 4.2	Relación L/B . Amplitud de respuestas horizontales	43
Figura 4.3	Relación L/B . Amplitud de respuestas verticales	43
Figura 4.4	Relación L/B . Amplitud de respuestas de cabeceo	43
Figura 4.5	Relación H/B . Amplitud de respuestas horizontales	46
Figura 4.6	Relación H/B . Amplitud de respuestas verticales	46
Figura 4.7	Relación H/B . Amplitud de respuestas de cabeceo	46
Figura 4.8	Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas horizontales	49
Figura 4.9	Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas verticales	49
Figura 4.10	Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas de cabeceo	49
Figura 4.11	Relación D/B . Amplitud de respuestas horizontales	50
Figura 4.12	Relación D/B . Amplitud de respuestas verticales	50
Figura 4.13	Relación D/B . Amplitud de respuestas de cabeceo	50
Figura 5.1	Datos para el ejemplo de aplicación; cimentación y suelo	54

INDICE DE TABLAS

Tabla 1	Parámetros concentrados equivalentes para el análisis de cimentaciones circulares sobre un semiespacio elástico	5
Tabla 2	Resultados obtenidos, cálculo manual y utilizando DYNA3	38
Tabla 3	Efecto de la relación L/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación	42
Tabla 4	Efecto de la relación H/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación	45
Tabla 5	Efecto de la relación β_s'/β_s . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación	48
Tabla 6	Efecto de la relación D/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación	51
Tabla 1.2.2.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 1$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1/2$	56
Tabla 2.2.2.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1/2$	57
Tabla 3.2.2.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 3$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1/2$	58
Tabla 2.1.2.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 2$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1/2$	59
Tabla 2.3.2.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 4$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1/2$	60
Tabla 2.2.1.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.3$, $D/B = 1/2$	61
Tabla 2.2.3.2	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.8$, $D/B = 1/2$	62
Tabla 2.2.2.1	Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 3$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 0$	63

Tabla 2.2.2.3 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia para $L/B = 2$, $H/B = 3$,
 $\beta_s'/\beta_s = 0.6$, $D/B = 1$

64

1. INTRODUCCION

1.1 Antecedentes

Los métodos modernos de análisis de vibraciones de cimentaciones intentan considerar racionalmente la interacción dinámica entre la cimentación y el suelo de soporte. Tales métodos tienen como base la teoría de propagación de ondas en un sólido elástico o viscoelástico (Gazetas, 1983). Esta teoría ha tenido un desarrollo considerable desde 1904, cuando se publicó el estudio sobre la vibración de un sólido elástico seminfinito, es decir un semiespacio elástico, causada por una carga concentrada (Lamb, 1904). Las numerosas aplicaciones, principalmente en el campo de la sismología y mecánica aplicada, han dado un gran ímpetu al desarrollo de la teoría "elastodinámica". En 1936 se intentó lo que se considera la primera aplicación ingenieril: la respuesta de un disco cilíndrico cargado verticalmente sobre un semiespacio elástico; esto marcó el camino de la dinámica de suelos moderna (Reissner, 1936).

La solución fue solamente una aproximación, ya que se supuso una distribución uniforme de esfuerzos de contacto para simplificarlo matemáticamente. La teoría de Reissner ofreció una

mayor contribución, al revelar la existencia de amortiguamiento por radiación, un fenómeno antes insospechado pero ahora plenamente entendido.

Cada vez que una cimentación se mueve contra el suelo se producen ondas de esfuerzo generadas en la superficie de contacto, que se propagan hacia afuera en forma de ondas de cuerpo y de superficie. Estas ondas acarrearán parte de la energía transmitida por la cimentación al suelo, un fenómeno relacionado a la absorción de energía por un amortiguador viscoso.

Para muchas cimentaciones masivas, la suposición de que la distribución de los esfuerzos de contacto es uniforme no es realista, por eso esta suposición proporciona una ruta de desplazamientos no uniforme en la interfase suelo-cimentación. Para una aproximación más cercana de tales cimentaciones al cuerpo rígido en movimiento, varios autores a mediados de los 50's supusieron distribuciones de esfuerzos de contacto que producen desplazamientos uniformes o lineales en la interfase, bajo fuerzas aplicadas estáticamente o cargas momento respectivamente. Así, se presentan resultados para cimentaciones circulares o rectangulares oscilando verticalmente (Sung, 1953; Quinlan, 1953), mientras que otros investigadores estudiaron tanto cargas horizontales y momentos en una cimentación circular (Arnold y col. 1955; Bycroft, 1956). Estas soluciones son únicamente aproximaciones. En realidad, las distribuciones de presiones que se requieren para mantener desplazamientos uniformes o lineales no son constantes sino que varían con la frecuencia de vibración.

Las primeras soluciones rigurosas aparecieron unos diez años más tarde, cuando el sistema vibratorio suelo-cimentación fue analizado como un problema de valores de frontera mixto, con rutas o modelos de desplazamiento prescritas bajo la base rígida y esfuerzos desvanecientes sobre la porción restante de la superficie.

Introduciendo algunas suposiciones simplificadoras que consideraban los esfuerzos secundarios, se estudiaron todos los posibles modos de oscilación de bases circulares y de cimentaciones corridas sobre un semiespacio, recurriendo a técnicas de transformación integral (Awojobi y col., 1965).

Quizá de igual importancia que los desarrollos teóricos antes mencionados de este periodo fue el descubrimiento hecho de que el ambiente dinámico de una cimentación masiva cargada verticalmente puede ser representado mediante un sistema oscilador de un sólo grado de

libertad "masa-resorte-amortiguador", con coeficientes de rigidez y amortiguamiento dependientes de la frecuencia (Hsieh, 1962; Lysmer, 1965). Lysmer sugirió el uso de los siguientes coeficientes independientes de la frecuencia para aproximar la respuesta en el rango de frecuencias medias y bajas:

$$K_u = \frac{4GR}{1-\nu} \quad (1.1)$$

$$C_u = \frac{3.4R^2}{1-\nu} \sqrt{G\rho} \quad (1.2)$$

donde K_u es la constante del resorte (rigidez), C_u es la constante del amortiguador, R es el radio del disco cargado, G y ν son el módulo de cortante y la relación de Poisson del semiespacio homogéneo respectivamente, mientras que ρ es la densidad de masa del suelo.

El logro de la aproximación de Lysmer, llamada también analogía de Lysmer, en reproducir con buena exactitud la respuesta real del sistema tuvo un profundo efecto en el desarrollo posterior y en las aplicaciones ingenieriles de las teorías del "semiespacio". La analogía de Lysmer se extendió y demostró que todos los modos de vibración pueden ser estudiados mediante sistemas de parámetros concentrados, masa-resorte-amortiguador, si se seleccionan apropiadamente los parámetros independientes de la frecuencia (Richart, 1967; Whitman, 1976). Las oscilaciones de una cimentación cilíndrica, verticales y torsionales, pueden ser representadas por un sistema de un grado de libertad, descrito por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (1.3)$$

en el cual x, \dot{x}, \ddot{x} son el desplazamiento, la velocidad y aceleración, respectivamente, de una masa oscilando verticalmente, $p(t)$ es la fuerza dinámica externa originada por la operación de la máquina. Los parámetros concentrados son la masa equivalente m , el amortiguamiento efectivo c y la rigidez efectiva k (para oscilaciones torsionales m debería ser reemplazada por I_z , el momento polar de inercia de masa y x debería ser interpretada como la rotación alrededor del eje vertical de simetría). Por otra parte, las oscilaciones de traslación horizontal y cabeceo de una cimentación cilíndrica están acopladas y pueden ser representadas por un sistema de

dos grados de libertad caracterizado por la masa efectiva y el momento de inercia de masa, los dos valores efectivos del amortiguamiento y los dos valores efectivos de rigidez para traslación y cabeceo en ambos casos.

Se necesitan diferentes valores de los parámetros de inercia y amortiguamiento para cada uno de esos cuatro modos de excitación. Whitman y Richart (Richart y col., 1970; Whitman, 1976) sugirieron escoger rigideces apropiadas para bajas frecuencias y valores promedio de amortiguamiento sobre el rango de frecuencias a las cuales usualmente se presenta la resonancia. Con el fin de que haya concordancia entre los parámetros concentrados y el sistema real, ellos recomendaron que se añadiera una masa ficticia (o momento de masa de inercia) a la masa de la cimentación dada (o momento de masa de inercia). La necesidad de tal recomendación surgió no de identificar la existencia de cualquier masa de suelo moviéndose en fase con la cimentación, sino del hecho de que en realidad las rigideces decrecen con el incremento de la frecuencia, en lugar de quedar constantes e iguales a las rigideces estáticas, como supone el modelo. En otras palabras, en lugar de decrecer k , el modelo de parámetros concentrados incrementa m para mantener invariable la frecuencia resonante ω_r .

Estos y otros investigadores presentaron expresiones para estos parámetros de los cuatro modos de vibración en total. La tabla 1 presenta estas expresiones, las que tuvieron una popularidad significativa en la década de los 70's (Richart y col., 1970; Whitman, 1976). Principalmente debido a su simplicidad, la aproximación por parámetros concentrados tuvo gran impacto en la aplicación de la teoría del semiespacio; demostró que esa teoría racional puede ser convertida una forma ingenieril manejable, que puede ser utilizada en el ramo con casi ninguna dificultad mayor a la tenida con los procedimientos empíricos de antaño.

Motivados en gran medida por la necesidad de entender el fenómeno asociado con la interacción suelo-estructura cuando se presenta un sismo, el análisis de la respuesta dinámica de cimentaciones fue objeto de considerable interés en los años 70's. Una significativa cantidad de investigación ha conducido a un gran desarrollo de nuevas formulaciones y programas de cómputo, mientras numerosas publicaciones han estudiado la importancia de los parámetros de cimentación crítica, suelo y carga y han presentado gráficas, tablas y expresiones simples disponibles para usarlas directamente en aplicaciones prácticas. Es valioso mencionar algunas de las más importantes contribuciones.

Modo	Vertical	Horizontal	Cabeceo	Torsión
Rigidez	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16GR^3}{3}$
Relación de masa \bar{m}	$\frac{m(1-\nu)}{4\rho R^3}$	$\frac{m(1-\nu)}{8\rho R^3}$	$\frac{3I_x(1-\nu)}{8\rho R^5}$	$\frac{I_z}{\rho R^5}$
Relación de Amortiguamiento	$\frac{0.425}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.29}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.15}{(1+\bar{m})\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.50}{1+2\bar{m}}$
Masa ficticia añadida	$\frac{0.27m}{\bar{m}}$	$\frac{0.095m}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_x}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_z}{\bar{m}}$

Donde I_x, I_z = momentos de masa de inercia con respecto a los ejes horizontal y vertical respectivamente;
 C/C_{cr} = Relación de amortiguamiento donde $C_{cr} = 2(Km)^{1/2}$ ó $C_{cr} = 2(KI)^{1/2}$ para los modos de vibración de traslación o rotación, con $I = I_x$ ó I_z para cabeceo o torsión respectivamente.

Tabla 1. Parámetros concentrados equivalentes para el análisis de cimentaciones circulares sobre un semiespacio elástico.

Técnicas matemáticas, desarrolladas a mediados de los 60's para resolver problemas elastodinámicos de valores de frontera mixto, fueron utilizadas para obtener soluciones numéricas exactas para todos los modos de vibración de cimentaciones corridas y bases sobre un semiespacio (Luco y col., 1968; Karashudi y col., 1968). Además se desarrollaron técnicas para extender las soluciones disponibles del semiespacio para cimentaciones circulares para el rango de alta frecuencia y también para un material viscoelástico con amortiguamiento histerético lineal (Luco y col., 1973; Veletsos y col., 1971). El desarrollo de formulaciones dinámicas de elemento finito con fronteras laterales y con absorción de energía agilizó el estudio de la respuesta de cimentaciones superficiales y enterradas en un suelo estratificado (Wass, 1972; Chang-Liang, 1974; Kausel, 1974; Lysmer y col., 1974). Sin embargo, únicamente el estado plano de esfuerzos y las geometrías axisimétricas pueden ser manejadas con estas formulaciones de elemento finito, y la presencia de una profundidad relativamente

delgada de un material similar a roca no flexible bajo el estrato es requisito inevitable, independientemente que tal roca exista o no realmente.

Por otra parte, se presentaron soluciones analíticas para cimentaciones rectangulares, circulares y cimentaciones corridas sobre la superficie de un semiespacio estratificado o suelo estratificado, con o sin roca rígida como último estrato, respectivamente (Luco, 1974; Gazetas, 1975). Utilizando esas formulaciones, se ofrecieron resultados que establecieron un puente entre los dos perfiles extremos previamente estudiados; el semiespacio y el estrato sobre base rígida (Hadjian y Luco, 1977; Gazetas y Roesset, 1979). Casi simultáneamente se obtuvieron soluciones analíticas aproximadas para cimentaciones circulares enterradas en un semiespacio, por derivaciones de expresiones cerradas para los coeficientes de rigidez y amortiguamiento dinámicos a lo largo de los lados verticales de la cimentación (Novak, 1973). Más tarde estos métodos fueron fácilmente adaptados para estudiar la respuesta dinámica de pilotes (Novak y col., 1978).

En años más recientes, los esfuerzos de la investigación se dedicaron principalmente a la determinación de soluciones: a) para cimentaciones rígidas de forma rectangular y arbitraria, b) para cimentaciones de rigidez finita a la flexión, c) para cimentaciones sobre suelos no homogéneos y anisotrópicos y d) para cimentaciones sobre suelos no lineales (Gazetas, 1983). Aún más, una cantidad sustancial de trabajos de investigación ha sido dedicada al comportamiento dinámico de pilotes simples de fricción y punta enterrados en depósitos de suelo homogéneos y no homogéneos o estratificados, y además se han obtenido soluciones para grupos de pilotes con cargas dinámicas (Sheta y Novak, 1982; El Sharnouby y Novak, 1986).

1.2 Tipos de maquinaria

En la industria existen diversos tipos de maquinaria las cuales son capaces de generar fuerzas desbalanceadas. En general, la maquinaria puede ser clasificada en: maquinaria recíprocante, maquinaria de impacto y maquinaria rotatoria.

1.2.1 Maquinaria reciprocante

En esta categoría se incluyen máquinas de combustión interna, máquinas de vapor, bombas y compresores de pistones. La forma básica de trabajo de este tipo de maquinaria es un pistón que se mueve dentro de un cilindro, una biela y cigüeñal. Este mecanismo convierte un movimiento de traslación en uno de rotación y viceversa; en cuanto a la velocidad de operación, por lo general es menor a 1200 r.p.m.

Las magnitudes de las fuerzas desbalanceadas y momentos dependerán del número de cilindros de la máquina, su tamaño, el desplazamiento del pistón y la dirección de montaje. Las máquinas reciprocantes son muy frecuentes en la práctica y generalmente se utiliza una cimentación de bloque rígido (Prakash y Puri, 1988).

1.2.2 Maquinaria de impacto

En esta categoría se incluyen máquinas como martillos de forja; éstas máquinas constan de una masa que cae, un yunque y un bastidor. Los martillos de forja están divididos en dos grupos, el martinete para estampado y el martillo de forjado propiamente (Barkan, 1962). El yunque y el bastidor están generalmente montados separadamente; El bastidor junto con las guías de la masa contribuyen a la precisión de los golpes requeridos para la forja. Además, el bloque de cimentación que está bajo el yunque sirve como soporte para el martillo entero. Las velocidades de operación de este tipo de maquinaria son usualmente bajas, con un rango de 60 a 150 golpes por minuto, sus cargas dinámicas actúan en pico en periodos muy cortos de tiempo y luego prácticamente cesan. Las fuerzas desbalanceadas ocasionadas por el impacto perduran únicamente una fracción de segundo. Entre dos golpes sucesivos, la cimentación y el yunque vibran libremente. Para este tipo de maquinaria se utiliza usualmente una cimentación masiva de bloque.

1.2.3 Maquinaria rotatoria

En esta categoría encontramos máquinas como turbinas, generadores, ventiladores, cuyas velocidades de operación están dentro de un amplio rango, desde 200 a 3000 r.p.m. y en algunos casos hasta 10000 r.p.m. (Prakash y Puri, 1988).

Por lo general, constan de un rotor montado en silletas y pedestales y todo sobre la cimentación. Las fuerzas desbalanceadas son generadas por la masa del rotor girando a una cierta velocidad y por una excentricidad entre el eje del rotor y los elementos de soporte; esto produce fuerzas armónicas que hacen vibrar el sistema. Este tipo de maquinaria es también muy frecuente en la industria y la cimentación usualmente utilizada es un bloque rígido masivo, superficial o enterrado. Es precisamente este tipo de maquinaria el objeto de estudio del presente trabajo.

1.3 Justificación

Es sabido que en la industria las cimentaciones masivas para maquinaria son sistemas estructurales de gran importancia, los cuales deben ser diseñados de una manera racional. Esto sólo se logra analizando concienzudamente los fenómenos que se presentan en sistemas de este tipo. Lo anterior es necesario para evitar asentamientos diferenciales importantes, vibraciones excesivas que produzcan daños al sistema o a estructuras vecinas y vibraciones intolerables por equipo cercano sensible (Avilés, 1990).

El diseño satisfactorio de una cimentación para maquinaria involucra la aplicación sistemática de principios de mecánica de suelos, dinámica de suelos y teoría de vibraciones. (Prakash y Puri, 1988).

Como se dijo antes, en la industria la maquinaria se desplanta sobre cimentaciones masivas cuya función es transmitir, de la máquina al suelo, las cargas estáticas y dinámicas y también mantener al sistema dentro de los límites permisibles de vibración. Las cargas estáticas son producidas por el peso del equipo y el peso propio de la cimentación; en el caso de equipo rotatorio, las cargas dinámicas son producidas por la rotación de masas desbalanceadas. Dicha rotación origina fuerzas armónicas cuya magnitud es proporcional a la masa desbalanceada, a su excentricidad y al cuadrado de la velocidad angular de operación. De lo anterior se puede entender que equipos mal balanceados y veloces pueden producir fuerzas significativas que generen vibraciones excesivas al sistema.

Usualmente, las cimentaciones masivas se han comportado satisfactoriamente. En general, las fallas se deben a que la potencia y dimensiones de los equipos han crecido notablemente, mientras que aún se emplean las técnicas y criterios tradicionales de diseño basados en el

modelado del conjunto máquina-cimiento como un cuerpo rígido (Avilés y Trueba, 1995). En relación a esto, el costo de construcción de una cimentación para maquinaria es, por lo general, una pequeña parte del costo total del equipo e instalación de éste, pero una falla que resulte de un diseño pobre puede interrumpir la operación de la máquina por largos periodos de tiempo, aumentando con ello las pérdidas (Prakash y Puri, 1988).

Es muy probable que las fallas se deban a que el sistema incursiona en la zona de influencia de la resonancia debido a efectos de interacción en el modo fundamental de vibración, así como una participación significativa de los modos superiores. El incursionar en la zona de resonancia es algo común cuando la frecuencia fundamental del sistema es mayor que la frecuencia de operación del equipo y los elementos de soporte de la máquina son demasiado flexibles; esto origina que la frecuencia crítica fundamental del conjunto rotor-cimiento-suelo se corra hacia frecuencias bajas, acercándose a la frecuencia de operación. Esta incursión también se puede presentar durante los arranques del sistema, siempre que su frecuencia fundamental sea menor que la de operación; esta situación se presenta en tiempos cortos, lo que no representa un peligro de falla importante (Avilés y Trueba, 1996).

Como se puede ver, el fenómeno de interacción entre la maquinaria, la cimentación y el suelo puede llegar a modificar de manera significativa la frecuencia crítica fundamental del sistema. Para el análisis de este fenómeno se requieren formular modelos de interacción que consideren a la maquinaria, la cimentación y el suelo como un conjunto acoplado (Chen y Malanowski, 1981; Stephan, 1984; Walters y Kirby, 1982).

Los altos niveles de vibración normalmente son causados por resonancia entre el rotor y la cimentación o por acoplamiento inadecuado entre los componentes del conjunto. El único camino seguro para prevenir al sistema del daño potencial inducido por tales vibraciones, es diseñar una cimentación que sea relativamente insensible a las fuerzas desbalanceadas del rotor generadas en condiciones de operación normal (Milo y King, 1979).

Una de las herramientas utilizadas para el análisis son los programas de cómputo; en este trabajo se utilizará el programa DYNA3 y un modelo masa-amortiguador-resorte considerando sólo los grados de libertad de interés práctico (los excitados directamente por el rotor), desplazamiento horizontal X , desplazamiento vertical Z y desplazamiento angular respecto al eje ortogonal al plano X - Z (cabeceo). El programa DYNA3 considera de manera apropiada las propiedades de inercia, rigidez y amortiguamiento del suelo en función de la frecuencia de

excitación, utilizando funciones de impedancia o rigideces dinámicas del conjunto cimentación-suelo. Esto es primordial, pues el suelo representa el elemento disipador más importante, y por eso puede llegar a controlar la magnitud de la respuesta del sistema (Gash y col.,1984).

1.4 Objetivos

Los objetivos de este trabajo son: hacer un estudio paramétrico para sistemas máquina-cimentación-suelo, presentar ayudas de diseño, y con base en los resultados obtenidos, proponer algunas recomendaciones. Todo lo anterior será de utilidad para diseñar racionalmente cimentaciones para equipo rotatorio.

2. CIMENTACIONES PARA EQUIPO ROTATORIO

2.1 Ecuaciones de equilibrio

Para establecer las ecuaciones de equilibrio se utiliza un modelo con seis grados de libertad, pero sólo se analizarán los tres de interés práctico contenidos en el plano de la figura 2.1.

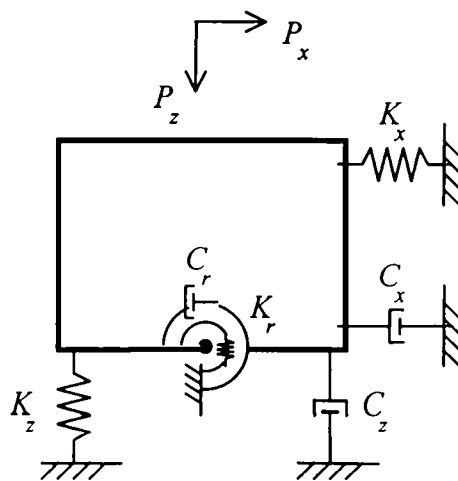


Fig. 2.1 Modelo del sistema máquina – cimentación - suelo

Estableciendo el equilibrio dinámico para los tres grados de libertad del modelo se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales cuya forma en notación matricial es

$$[M]\{x(t)\} + [C]\{x(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.1)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema (Avilés y Trueba, 1995); $\{x(t)\}$ es el vector de desplazamiento del sistema

$$\{x(t)\}^T = \{x, z, r\} \quad (2.2)$$

$\{p(t)\}$ es el vector de fuerzas excitadoras del sistema, compuesto con las fuerzas que actúan en cada uno de los grados de libertad. Se puede ver que las únicas fuerzas diferentes de cero que actúan son las generadas por el rotor, esto es:

$$\{p(t)\}^T = \{p_x, p_z, 0\} \quad (2.3)$$

La matriz de masa es una matriz formada con las masas asociadas a cada uno de los grados de libertad:

$$M = \begin{bmatrix} M_c & 0 & 0 \\ 0 & M_c & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde M_c es la masa de la cimentación, I_c es el momento de inercia de masa de la cimentación.

La matriz de amortiguamiento es una matriz simétrica definida por

$$C = \begin{bmatrix} C_x & 0 & -C_x + C_r \\ 0 & C_z & 0 \\ -C_x + C_r & 0 & C_r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matriz de rigidez es una matriz simétrica definida por

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & K_x + K_r \\ 0 & K_z & K_z + K_r \\ K_x + K_r & K_z + K_r & K_r \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.2 Respuesta en estado estacionario

En la maquinaria rotatoria se generan fuerzas de tipo armónico al girar la masa desbalanceada (rotor) a una velocidad angular constante, por tanto, sólo la respuesta en estado estacionario es de interés y se obtiene empleando la técnica de la respuesta compleja en la frecuencia (Clough y Penzien, 1975).

Se sabe que la magnitud de la fuerza excitadora producida por el rotor es proporcional a la masa desbalanceada m , su excentricidad e y el cuadrado de la velocidad angular de operación ω . Así:

$$Q = me\omega^2 \quad (2.7)$$

Utilizando la respuesta compleja en la frecuencia, la fuerza armónica que actúa en la dirección horizontal se representa como

$$P_x = Qe^{i\omega t} \quad (2.8)$$

donde i es la unidad imaginaria y t es el tiempo. La fuerza armónica vertical se encuentra desfasada 90° de P_x , por lo tanto, esta fuerza se puede escribir como

$$P_z = Qe^{i(\omega t + \pi/2)} = iQe^{i\omega t} \quad (2.9)$$

Entonces el vector de fuerzas excitadoras queda representado de la manera siguiente:

$$\{p(t)\} = \{P(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

donde:

$$\{p(t)\}^T = \{Q, iQ, 0\} \quad (2.11)$$

Debido a la forma armónica de la excitación, la respuesta en estado estacionario se reduce a

$$\{x(t)\} = \{X(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.4 y 2.6 en la 2.1, se obtiene la ecuación que gobierna el movimiento del sistema en el dominio de la frecuencia:

$$[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]]\{X(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (2.13)$$

la cual es una ecuación matricial que representa un sistema complejo de ecuaciones algebraicas que se pueden resolver por cualquier método de eliminación gaussiana (Crandall, 1956).

2.3 Funciones de impedancia del suelo

Para explicar los significados físico y matemático de las rigideces dinámicas o funciones de impedancia, se utilizará la analogía con un oscilador elemental cuya ecuación de movimiento está dada por

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = p(t) \quad (2.14)$$

donde M , C y K son respectivamente la masa, el amortiguamiento y la rigidez del oscilador; $p(t)$ es la fuerza excitadora y $x(t)$ es el desplazamiento resultante. Para una excitación armónica $p(t) = P e^{i\omega t}$, se obtiene en el estado estacionario una respuesta también armónica $x(t) = X e^{i\omega t}$ y por tanto

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)X = P \quad (2.15)$$

Como se sabe, la rigidez dinámica del oscilador es la relación en estado estacionario entre la fuerza (o momento) excitadora y el desplazamiento (o rotación) resultante en la dirección de la fuerza, para una cimentación rígida, carente de masa y excitada armónicamente, esto es:

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{P}{X} = (K + i\omega C - \omega^2 M) \quad (2.16)$$

donde $\tilde{K}(\omega)$ es la rigidez dinámica del oscilador y ω es la frecuencia de excitación. Se puede ver que la rigidez dinámica del oscilador es una función compleja que depende de la frecuencia de excitación; la parte real expresa la rigidez e inercia del sistema y la parte imaginaria la energía disipada por medio de su amortiguamiento.

Se acostumbra presentar la función de impedancia en términos de la rigidez estática y los coeficientes de impedancia dependientes de la frecuencia, de la forma:

$$\tilde{K}(\omega) = K(k + i\omega c) \quad (2.17)$$

donde $k = 1 - \omega^2 / \omega_o^2$ y $c = 2 \zeta_o / \omega_o$, siendo ω_o la frecuencia natural y ζ_o el amortiguamiento del oscilador; este último representa el porcentaje de amortiguamiento con respecto al crítico. Los parámetros k y c se conocen como coeficientes de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Para el oscilador, k decrece con la frecuencia y se hace nula para la frecuencia natural, en tanto que c permanece constante.

La ecuación 2.17 nos dice que la rigidez dinámica $\tilde{K}(\omega)$ se puede expresar como el producto de la rigidez estática K por un factor dinámico complejo $(k + i\omega c)$ que considera las características de inercia y amortiguamiento del sistema; para la frecuencia cero, el factor dinámico se reduce a la unidad real y por tanto la rigidez dinámica coincide con la estática.

Considerando la analogía con el oscilador elemental, se acostumbra expresar la rigidez dinámica del sistema suelo - cimentación para el modo de vibración $m = x, z, r, xr$ mediante una función compleja que depende de la frecuencia de excitación (Gazetas, 1983), de la forma:

$$\tilde{K}_m(\eta_m) = K_m^0(k_m(\eta_m) + i\eta_m c_m(\eta_m))(1 + i2\zeta) \quad (2.18)$$

donde ζ es el amortiguamiento del suelo (amortiguamiento material), K_m^0 es la rigidez estática, en tanto que k_m y c_m son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento (amortiguamiento geométrico) dependientes de la frecuencia normalizada η_m , definida como

$$\eta_m = \frac{\omega R_m}{\beta} \quad (2.19)$$

donde β es la velocidad de ondas de cortante del suelo y R_m el radio de un cimiento circular equivalente a la superficie de desplante de la cimentación, con igual área o igual momento de inercia que la mencionada superficie

$$R_x = R_z = R_{xr} = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2} \quad (2.20)$$

$$R_r = \left(\frac{AI}{\pi}\right)^{1/4} \quad (2.21)$$

donde A es el área de la superficie de desplante de la cimentación e I el momento de inercia de dicha superficie con respecto a su eje centroidal de rotación.

Si K_m representa al resorte y C_m al amortiguador equivalente del suelo, la función de impedancia del conjunto suelo - cimentación se define alternativamente mediante la expresión compleja:

$$\tilde{K}_m(\omega) = K_m(\omega) + i\omega C_m(\omega) \quad (2.22)$$

Por tanto, el resorte y amortiguador se relacionan con la rigidez estática y los coeficientes de impedancia por medio de las siguientes expresiones:

$$K_m = K_m^0(k_m - 2\zeta\eta_m c_m) \quad (2.23)$$

$$\omega C_m = K_m^0(\eta_m c_m + 2\zeta k_m) \quad (2.24)$$

El resorte K_m expresa tanto la rigidez como la inercia del suelo; la dependencia de la frecuencia se debe solamente a la influencia que ésta tiene en la inercia, ya que la rigidez del suelo es esencialmente independiente de la frecuencia. En tanto que el amortiguador C_m expresa los amortiguamientos material y geométrico del suelo; el primero es prácticamente independiente de la frecuencia y se debe a un comportamiento histerético, mientras que el segundo es dependiente de la frecuencia y se debe a comportamiento viscoso producto de la irradiación de ondas.

También se producen impedancias acopladas debidas a la profundidad de enterramiento de la cimentación. Para cimentaciones superficiales o con poca profundidad de enterramiento, las impedancias acopladas son tan pequeñas que se pueden despreciar (Gazetas, 1983).

Para el cálculo tanto de las rigideces estáticas como de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para cimentaciones circulares enterradas en un estrato, se pueden utilizar expresiones que proporcionan resultados aproximados (Kausel y col., 1978; Gazetas, 1983). Para la mayoría de aplicaciones prácticas es suficiente estimar las funciones de impedancia usando esas expresiones; si el caso lo exigiera, se sugiere la utilización de la técnica de elemento finito desarrollada por Tassoulas y Kausel (1983).

2.4 Parámetros efectivos del suelo

La respuesta de un depósito de suelo ante una excitación dinámica es función de diversos factores relacionados con la geometría irregular y la heterogeneidad de los materiales que conforman el depósito. Para fines prácticos, esta complejidad se reduce caracterizando al suelo con los dos parámetros más relevantes que controlan la respuesta dinámica del depósito: la profundidad del perfil estratigráfico y la velocidad efectiva de propagación del suelo. Para lograr esto se recurre a una aproximación que consiste en el reemplazo del perfil real por un estrato equivalente (Ver Fig. 2.2 y 2.3); esta aproximación es ampliamente utilizada en dinámica de cimentaciones.

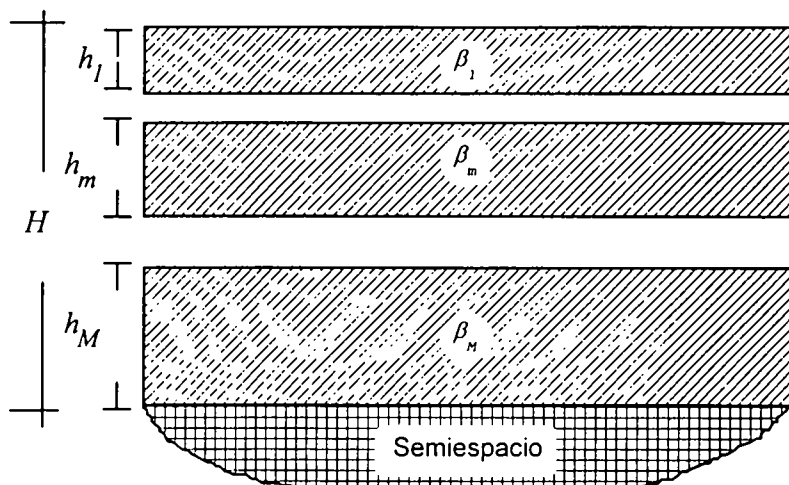


Fig. 2.2 Perfil estratificado

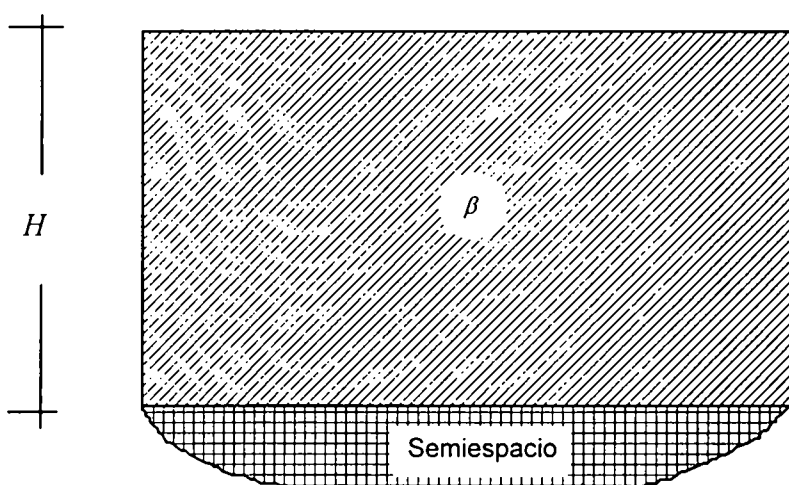


Fig. 2.3 Estrato homogéneo equivalente

El estrato equivalente se caracteriza por la profundidad a la frontera con el semiespacio elástico H y la velocidad de propagación de las ondas de cortante β , las cuales son semejantes a los parámetros representativos del perfil estratificado; β se define como la velocidad efectiva del depósito de suelo y representa una especie de velocidad media.

Los valores efectivos del peso volumétrico γ , el amortiguamiento ζ y la relación de Poisson ν del estrato equivalente se pueden tomar como los promedios de los parámetros correspondientes del depósito de suelo, considerando los diferentes espesores de las capas del depósito de suelo en la estimación de dichos promedios.

Para fines de ingeniería, la velocidad efectiva del sitio puede determinarse con técnicas aproximadas. Una buena aproximación se obtiene utilizando los conceptos de velocidad y lentitud promedios, entendiéndose como lentitud al recíproco de la velocidad.

Por un lado, la velocidad efectiva del sitio puede estimarse suponiendo que el tiempo que tarda una onda de cortante en recorrer un estrato uniforme de espesor H con velocidad β es el mismo que requiere para atravesar el depósito estratificado. El tiempo requerido por una onda de cortante para propagarse desde la frontera hasta la superficie del estrato equivalente es igual a H/β , en tanto que, el tiempo que necesita para atravesar el depósito estratificado es igual a $\sum_m \frac{h_m}{\beta_m}$, siendo h_m y β_m el espesor y la velocidad de cortante del m -ésimo estrato, respectivamente. Igualando ambos tiempos se obtiene que la velocidad efectiva del depósito de suelo es

$$\beta = \frac{H}{\sum_{m=1}^M \frac{h_m}{\beta_m}} \quad (2.25)$$

Cuando las variaciones en la velocidad no son muy grandes, la velocidad efectiva del sitio también se puede determinar integrando el perfil de velocidades y dividiéndolo entre la profundidad del depósito de suelo, esto con el fin de obtener su valor medio, entonces

$$\beta = \frac{\sum_{m=1}^M \beta_m h_m}{H} \quad (2.26)$$

Las ecuaciones 2.25 y 2.26 definen la velocidad efectiva del depósito de suelo en términos del promedio de lentitudes y velocidades del perfil estratificado, respectivamente (Avilés y Trueba, 1995).

3. PROGRAMA DYNA3

3.1 Descripción general

El programa DYNA3 fue desarrollado por Novak y colaboradores (Novak y col.,1992). Este programa es una poderosa herramienta para el análisis dinámico de cimentaciones sometidas a efectos de cargas armónicas, transitorias, aleatorias y de impacto.

El programa DYNA3 calcula la respuesta de cimentaciones rígidas para todos los tipos de cargas dinámicas que pueden ser producidas por máquinas rotatorias o reciprocantes, máquinas que producen golpes, sismos, tráfico y otras fuentes de fuerzas dinámicas. El programa considera diferentes modelos de suelos (estratificado, semiespacio elástico, medio compuesto, etc.). Por otro lado, se pueden analizar cimentaciones de bloque, piloteadas, silos, etc.

Primeramente se utiliza la subrutina IDC para calcular características geométricas de la cimentación por analizar. Para mostrar como trabaja esta subrutina, se explica brevemente el armado del archivo de datos y se presenta el archivo de resultados.

Archivo de datos necesarios para correr la subrutina IDC

```

1 1 0 0 1 2
4540.0 1.85 0.75 2.1
3.7 1.5 1.8 1.85 0.75 0.9 2400.0
1135.0 0. 0. 0. 0. 0. 1.85 0.75 2.1
1.85 0.75 0.

```

En este archivo los datos se organizan en bloques de la manera siguiente:

Primera línea. Identificación del sistema. Número de masas concentradas, número de bloques rectangulares, número de cilindros, número de cuerpos complejos, número de puntos de aplicación de cargas y número de código de datos.

Segunda línea. Datos de masas concentradas. Valor de la masa, coordenadas de localización de la masa.

Tercera línea. Datos del bloque rectangular. Longitud del bloque con respecto al eje "X", longitud del bloque con respecto al eje "Y", longitud del bloque con respecto al eje "Z"; coordenadas del centro de masa del bloque; peso volumétrico del material del bloque.

Cuarta línea. Datos de las fuerzas de excitación. Fuerza aplicada en un punto en la dirección "X", fuerza aplicada en un punto en la dirección "Y", fuerza aplicada en un punto en la dirección "Z"; momento con respecto al eje "X", momento con respecto al eje "Y", momento con respecto al eje "Z"; coordenadas del punto de aplicación de las fuerzas.

Quinta línea. Coordenadas del centro elástico de la base de la cimentación.

Este archivo puede variar, dependiendo de las características de la cimentación por analizar.

Archivo de resultados de la subrutina IDC

```

*****
*          PROPERTIES OF THE SYSTEM TO BE ENTERED FOR          *
*                   ANALYSIS BY DYNA3                          *
*                                                                 *
*****
TOTAL MASS = .2852E+05

```

MASS MOMENTS OF INERTIA

```

-----
I (XX) = .1647E+05
I (YY) = .3932E+05
I (ZZ) = .3185E+05
I (XY) = .0000E+00
I (XZ) = .0000E+00
I (YX) = .0000E+00

```

EXCITATION FORCES

```

-----
FX = .1135E+04
FY = .0000E+00
FZ = .0000E+00
MX = .0000E+00
MY = .1145E+04
MZ = .0000E+00

```

MASS CONSTANTS; C.G. TO BASE CENTER COORDINATES

```

-----
XC = .0000E+00
YC = .0000E+00
ZC = .1091E+01

```

Con los cálculos hechos por la subrutina IDC además otros datos se corre el programa DYNA3 y, de igual modo, se explica brevemente el armado del archivo de datos y se presenta el archivo de resultados.

Archivo de datos necesarios para correr el programa DYNA3.

```

TITLE
BLOQUE RECTANGULAR EN SEMIESPACIO CON CARGA ARMONICA
GRAVITY=9.81
FOUNDATION=HALF-SPACE
RECTANGULAR=3.7,1.5
MASS=0.2852E05,0.1647E05,0.3932E05,0.3185E05,0.,0.,0.
CONSTANTS=0.,0.,1.091
SOIL
CONSTANTS=1
1,0.8,121.0,1760.0,0.33,0.05

```

```
BELOW
121.0,1760.0,0.33,0.05
LOAD=HARMONIC
CONSTANTS
NONQUADRATIC
30.0,0.,0.05,1135.0,0.,0.,0.,0.1145E04,0.
RUN
```

En este archivo los datos se organizan en líneas a través de comandos de la siguiente manera.

TITLE; (Título del problema por analizar).

GRAVITY; (Valor de la aceleración de gravedad).

FOUNDATION; (Tipo de suelo donde se ubicará la cimentación).

RECTANGULAR; (Tipo de cimentación).

MASS; (Datos de masa de la cimentación, calculados por IDC).

CONSTANTS; (Coordenadas del centro de masa respecto al centro de la base calculadas por IDC).

SOIL; (Datos del suelo).

CONSTANTS; (Datos del estrato de suelo lateral al bloque).

BELOW; (Datos del suelo bajo el bloque).

LOAD; (Tipo de carga a la que está sometida la cimentación).

CONSTANTS; (Modo de actuar de la carga; fuerzas de excitación calculadas por IDC.).

RUN; (Comando para ejecutar el programa).

Archivo de resultados del Programa DYNA3

```

*****
*                D Y N A 3                S I M U L A T I O N                *
*                                                                                   *
*                RUN DATE   - 1999/ 7/28                                         *
*                TIME       - 18:56:35                                           *
*                REVISION   - 1991/07/30                                         *
*                                                                                   *
*****

```

BLOQUE RECTANGULAR EN SEMIESPACIO CON CARGA ARMONICA
EJEMPLO DE LA NORMA DE DISEÑO C-2.26 DE C.F.E.

DATA ECHO

GRAVITATIONAL CONSTANT SET TO 9.81

FOUNDATION TYPE - HALF-SPACE

RECTANGULAR FOUNDATION - 3.700 BY 1.500

MASS CONSTANTS

TOTAL MASS OF FOOTING	2.85200E+04
MASS MOMENT ABOUT X-AXIS	1.64700E+04
MASS MOMENT ABOUT Y-AXIS	3.93200E+04
MASS MOMENT ABOUT Y-AXIS	3.18500E+04
CROSS PRODUCT X-Y	0.00000E+00
CROSS PRODUCT X-Z	0.00000E+00
CROSS PRODUCT Y-Z	0.00000E+00

HALF-SPACE PROPIERTIES

X- LOCATION CENTRE OF GRAV.	.00000
Y- LOCATION CENTRE OF GRAV.	.00000
HEIGHT OF CENTRE OF GRAV.	1.09100

SOIL

SOIL CONSTANTS NUMBER OF SIDE LAYERS - 1

LAYER NO.	LAYER DEPHT	SHEAR WAVE VELOCITY	UNIT WEIGHT	POISSON'S RATIO	MATERIAL DAMPING
1	.800	121.00	1760.00	.330	.050

HALF-SPACE SOIL

SHEAR WAVE VELOCITY	UNIT WEIGHT	POISSON'S RATIO	MATERIAL DAMPING
1.21E+02	1760.0	.330	.050

HARMONIC LOAD

MAXIMUM FREQUENCY 30.0000
 MINIMUM FREQUENCY0000
 STEP FREQUENCY0500
 FORCE IN X-DIRECTION 1.14E+03
 FORCE IN Y-DIRECTION 0.00E+00
 FORCE IN Z-DIRECTION 0.00E+00
 MOMENT ABOUT X-AXIS 0.00E+00
 MOMENT ABOUT Y-AXIS 1.15E+03
 MOMENT ABOUT Z-AXIS 0.00E+00

 *
 * D Y N A 3 S I M U L A T I O N *
 *
 * RUN DATE - 1999/ 7/28 *
 * TIME - 18:56:35 *
 * REVISION - 1991/07/30 *
 *

BLOQUE EN SEMIESPACIO CON CARGA ARMONICA NO CUADRATICA
 EJEMPLO DE LA NORMA DE DISEÑO C-2.26 DE C.F.E.

RESULTS

FOOTING RESPONSE AMPLITUDES

FREQ. RAD/SEC	TRANS. X DIRECTION	TRANS. Y DIRECTION	VERTICAL DIRECTION	ROT ABOUT X AXIS	ROT ABOUT Y AXIS	TORSIONAL Z AXIS
25.00	2.34E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.26E-05	0.00E+00
25.05	2.33E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.22E-05	0.00E+00
25.10	2.32E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.17E-05	0.00E+00
25.15	2.31E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.13E-05	0.00E+00
25.20	2.29E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.08E-05	0.00E+00
25.25	2.28E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.03E-05	0.00E+00
25.30	2.27E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.99E-05	0.00E+00
25.35	2.26E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.94E-05	0.00E+00
25.40	2.25E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.89E-05	0.00E+00
25.45	2.23E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.84E-05	0.00E+00
25.50	2.22E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.79E-05	0.00E+00
25.55	2.21E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.74E-05	0.00E+00
25.60	2.20E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.69E-05	0.00E+00
25.65	2.18E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.64E-05	0.00E+00
25.70	2.17E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.59E-05	0.00E+00
25.75	2.16E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.54E-05	0.00E+00

25.80	2.14E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.49E-05	0.00E+00
25.85	2.13E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.43E-05	0.00E+00
25.90	2.12E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.38E-05	0.00E+00
25.95	2.10E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.33E-05	0.00E+00
26.00	2.09E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.28E-05	0.00E+00
26.05	2.08E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.22E-05	0.00E+00
26.10	2.06E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.17E-05	0.00E+00
26.15	2.05E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.12E-05	0.00E+00
26.20	2.04E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.06E-05	0.00E+00
26.25	2.02E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.01E-05	0.00E+00
26.30	2.01E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.96E-05	0.00E+00
26.35	2.00E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.90E-05	0.00E+00
26.40	1.98E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.85E-05	0.00E+00
26.45	1.97E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.80E-05	0.00E+00
26.50	1.96E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.74E-05	0.00E+00
26.55	1.94E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.69E-05	0.00E+00
26.60	1.93E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.64E-05	0.00E+00
26.65	1.92E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.59E-05	0.00E+00
26.70	1.90E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.53E-05	0.00E+00
26.75	1.89E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.48E-05	0.00E+00
26.80	1.88E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.43E-05	0.00E+00
26.85	1.86E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.38E-05	0.00E+00
26.90	1.85E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.33E-05	0.00E+00
26.95	1.84E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.28E-05	0.00E+00
27.00	1.82E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.22E-05	0.00E+00
27.05	1.81E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.17E-05	0.00E+00
27.10	1.80E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.12E-05	0.00E+00
27.15	1.78E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.07E-05	0.00E+00
27.20	1.77E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.02E-05	0.00E+00
27.25	1.76E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.97E-05	0.00E+00
27.30	1.75E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.92E-05	0.00E+00
27.35	1.73E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.88E-05	0.00E+00
27.40	1.72E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.83E-05	0.00E+00
27.45	1.71E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.78E-05	0.00E+00
27.50	1.70E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.73E-05	0.00E+00
27.55	1.69E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.69E-05	0.00E+00
27.60	1.67E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.64E-05	0.00E+00
27.65	1.66E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.60E-05	0.00E+00
27.70	1.65E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.55E-05	0.00E+00
27.75	1.64E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.50E-05	0.00E+00
27.80	1.63E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.46E-05	0.00E+00
27.85	1.62E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.41E-05	0.00E+00
27.90	1.61E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.37E-05	0.00E+00
27.95	1.59E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.33E-05	0.00E+00
28.00	1.58E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.28E-05	0.00E+00
28.05	1.57E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.24E-05	0.00E+00
28.10	1.56E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.20E-05	0.00E+00
28.15	1.55E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.15E-05	0.00E+00
28.20	1.54E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.11E-05	0.00E+00
28.25	1.53E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.07E-05	0.00E+00
28.30	1.52E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.03E-05	0.00E+00
28.35	1.51E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.99E-05	0.00E+00
28.40	1.50E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.95E-05	0.00E+00
28.45	1.49E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.91E-05	0.00E+00

28.50	1.48E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.86E-05	0.00E+00
28.55	1.47E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.83E-05	0.00E+00
28.60	1.46E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.79E-05	0.00E+00
28.65	1.45E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.75E-05	0.00E+00
28.70	1.44E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.71E-05	0.00E+00
28.75	1.43E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.67E-05	0.00E+00
28.80	1.42E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.63E-05	0.00E+00
28.85	1.41E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.59E-05	0.00E+00
28.90	1.40E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.56E-05	0.00E+00
28.95	1.39E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.52E-05	0.00E+00
29.00	1.38E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.48E-05	0.00E+00
29.05	1.37E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.45E-05	0.00E+00
29.10	1.36E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.41E-05	0.00E+00
29.15	1.35E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.37E-05	0.00E+00
29.20	1.34E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.34E-05	0.00E+00
29.25	1.33E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.30E-05	0.00E+00
29.30	1.32E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.27E-05	0.00E+00
29.35	1.31E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.24E-05	0.00E+00
29.40	1.31E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.20E-05	0.00E+00
29.45	1.30E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.17E-05	0.00E+00
29.50	1.29E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.13E-05	0.00E+00
29.55	1.28E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.10E-05	0.00E+00
29.60	1.27E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.07E-05	0.00E+00
29.65	1.26E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.04E-05	0.00E+00
29.70	1.26E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	5.00E-05	0.00E+00
29.75	1.25E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.97E-05	0.00E+00
29.80	1.24E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.94E-05	0.00E+00
29.85	1.23E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.91E-05	0.00E+00
29.90	1.22E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.88E-05	0.00E+00
29.95	1.21E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.85E-05	0.00E+00
30.00	1.21E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.82E-05	0.00E+00

```

*****
*
*           D Y N A 3   S I M U L A T I O N
*
*           RUN DATE - 1999/ 7/28
*           TIME     - 13:56:35
*           REVISION - 1991/07/30
*
*****

```

BLOQUE EN SEMIESPACIO CON CARGA ARMONICA NO CUADRATICA
 EJEMPLO DE LA NORMA DE DISEÑO C-2.26 DE C.F.E.

RESULTS		

		FREQ.

MAX. TRANS. IN X-DIRECTION	- 2.518E-04	23.45
MAX. TRANS. IN Y-DIRECTION	- 0.000E+00	.00
MAX. TRANS. IN Z-DIRECTION	- 0.000E+00	.00
MAX. ROT. ABOUT X AXIS	- 0.000E+00	.00
MAX. ROT. ABOUT Y AXIS	- 9.986E-05	23.45
MAX. ROT. ABOUT Z AXIS	- 0.000E+00	.00

El programa acepta cualquier sistema de unidades, pero los datos deben ser consistentes.

Para mayor información acerca del manejo del programa consultar el Manual del Usuario de DYNA3 (Novak y col. 1992).

Los archivos de datos y de resultados presentados, tanto de IDC como de DYNA3, corresponden a la resolución computarizada del ejemplo numérico resuelto mas adelante, el cual también se resolvió manualmente; esto tuvo el propósito de comparar y verificar la confiabilidad de los resultados obtenidos.

3.2 EJEMPLOS

3.2.1 Ejemplo numérico (Resolución manual)

Se resolvió manualmente el ejemplo de la Fig. 3.1 tomado de la Norma de Diseño C-2.26 para Cimientos de Equipo Rotatorio de la C.F.E. (C.F.E., 1977) y siguiendo los pasos descritos en esta norma, además de utilizar las tablas del Manual de Obras Civiles C.2.2. de C.F.E. (C.F.E., 1983).

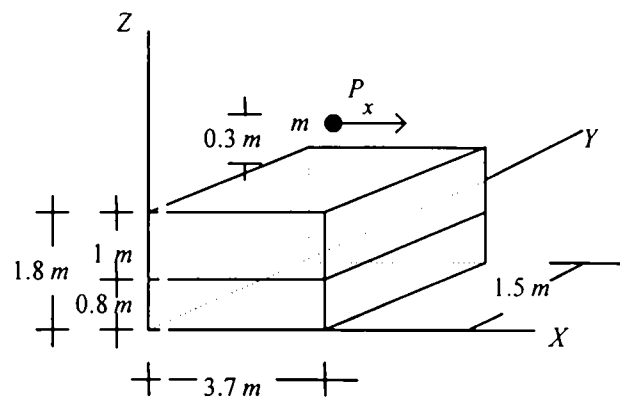


Fig. 3.1 Bloque de cimentación sometido a vibración horizontal y de rotación respecto al eje Y (cabeceo)

Diseñar un cimiento desplantado sobre el terreno, para un motor con cilindro horizontal y fuerza dinámica horizontal.

Datos de la máquina.

Peso total = 4540 Kg

Peso del rotor = 2026 Kg

Velocidad de operación = 250 r.p.m. = 26.2 rad./seg = 4.16 c.p.s.

Ubicación del centro de gravedad. 0.3 m por encima del cimiento.

Momento de inercia de la masa de la máquina respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y que es paralelo al eje de rotación = 278 Kg m/seg²

Fuerza dinámica:

$$P_d = m_c e \omega_0^2$$

según Barkan

$$e = \frac{500}{N^2} ; m_e = 206.68 \text{ Kg} - \text{seg} / m$$

$$e = \frac{500}{250^2} = 0.008 \text{ m} \quad \therefore P_i = (2026 / 9.8) \times 0.008 \times (26.2^2) = 1135.3 \text{ Kg}$$

Esta fuerza ubicada 0.3 m por encima del cimiento es para carga armónica no cuadrática.

Datos del suelo

Módulo de rigidez al corte = $260 \text{ Kg/cm}^2 = 2600000 \text{ Kg/m}^2$

Peso volumétrico = 1760 Kg/m^3

Densidad = $(1760 \text{ Kg/m}^3) / g = 176.6 \text{ Kg seg}^2 / m^4$

Velocidad de propagación de las ondas de cortante:

$$\beta_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{2600000}{179.6}} = 121.0 \text{ m / seg}$$

$$\beta_s = 121.0 \text{ m/seg}$$

Módulo de Poisson = 0.35

Datos de distribución

La cara superior del cimiento está 1.0 m por encima del suelo.

Cimiento supuesto

Concreto de peso volumétrico = 2400 Kg/m^3

Dimensiones: $1.5 \text{ m} \times 3.7 \text{ m} \times 1.8 \text{ m}$; $2c = 1.5 \text{ m}$, $2d = 3.7 \text{ m}$.

3.7 m . en dirección de la fuerza dinámica.

$$\text{Area} = (1.5)(3.7) = 5.6 \text{ m}^2$$

El centro de gravedad común de máquina y cimiento se supone ubicado sobre el eje vertical que pasa por el centroide del área de contacto cimiento-suelo.

De los seis grados de libertad sólo se consideran: horizontal (con respecto al eje "X"), vertical (con respecto al eje "Z") y cabeceo (giro con respecto al eje "Y"). Los dos últimos acoplados en un plano normal al eje de rotación de la máquina.

1. Vibración horizontal

$$\text{Peso del cemento. } (1.8)(5.6)(2400) = 24192 \text{ Kg}$$

$$\text{Peso total del sistema. } 4540 + 24192 = 28732 \text{ Kg}$$

$$\text{Masa total. } 28732 / 9.8 = 2932 \text{ Kg-seg}^2/m$$

Cálculo de la rigidez del resorte horizontal equivalente, K_x (Tabla 1.6, Pág. 2.2.76 del Manual de Diseño de Obras Civiles).

$$K_x = \frac{32(1-\nu)}{7-8\nu} GR_o$$

$$R_o = \sqrt{\frac{4cd}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(0.75)(1.85)}{3.1416}} = 1.329 \text{ m}$$

$$K_x = \frac{32(1-0.35)}{7-(8 \times 0.35)} \times 2600000 \times 1.329 = 17112457.13$$

$$K_x = 17112457.13 \text{ Kg/m}$$

Cálculo de la frecuencia natural:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{m}} = \frac{1}{6.2831} \sqrt{\frac{17112457.13}{2932}} = 12.1589 \quad \therefore f_n = 12.1589 \text{ c.p.s.}$$

La Norma de Diseño C-2.26 para Cimientos de Equipo Rotatorio establece que, en una cimentación adecuada, la frecuencia natural de vibración debe estar alejada de la zona de resonancia de acuerdo a

$$f_n < 0.6 f_o \quad \text{ó} \quad f_n > 1.4 f_o$$

donde f_n es la frecuencia natural de vibración horizontal de la cimentación y f_o es la frecuencia de operación de la máquina.

Verificando $f_n < 0.6 f_o$ ó $f_n > 1.4 f_o$; sabemos que $f_n = 12.1589$ c.p.s.

$$(0.6)(4.16) = 2.496 \text{ c.p.s.} \quad (1.4)(4.16) = 5.824 \text{ c.p.s.}$$

$$12.1589 > 5.824; \quad f_n > 1.4 f_o, \quad \text{correcto.}$$

2. Vibración de balanceo (cabeceo)

Peso de máquina y cimienta = 28732 Kg

Centro de gravedad del cimienta = 0.75 m, 1.85 m, 0.9 m

Momento de inercia de la masa con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo al eje de balanceo = 3483 Kg-m/seg²

$$\frac{24192}{12 \times 9.8} = (3.7^2 + 1.8^2) = 3483 \text{ Kg-m/seg}^2$$

Momento total de inercia I_b :

$$I_b = 278 + \frac{4540}{9.8} \times (0.3^2 + 1.8^2) + 3483 + \frac{24192}{9.8} \times (0.9^2) = 7804 \text{ Kg-m/seg}^2$$

Cálculo de la rigidez equivalente de balanceo K_r ,

$$R_o = \sqrt[4]{\frac{16cd^3}{3\pi}} = \sqrt{\frac{16(0.75)(1.85^3)}{9.4247}} = 1.685 \text{ m}$$

$$K_r = \frac{8GR_o}{3(1-\nu)} = \frac{8 \times 26000000 \times 1.685}{3(1-0.35)} = 51030337.33 \text{ Kg-m/rad}$$

$$K_r = 51,030,337.33 \text{ Kg-m/rad}$$

Cálculo de la frecuencia natural de balanceo:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_r}{m}} = \frac{1}{6.2831} \sqrt{\frac{51030337.33}{7804}} = 12.87 \quad \therefore f_n = 12.87 \text{ c.p.s.}$$

Del mismo modo que para el caso de la vibración horizontal, en la vibración de cabeceo se debe cumplir el mismo criterio

$$f_n < 0.6 f_o \quad \text{ó} \quad f_n > 1.4 f_o$$

donde f_n es la frecuencia natural de vibración (cabeceo) de la cimentación y f_o es la frecuencia de operación de la máquina.

Verificando $f_n < 0.6 f_o$ ó $f_n > 1.4 f_o$; sabemos que $f_n = 12.87 \text{ c.p.s.}$

$$(0.6)(4.16) = 2.496 \text{ c.p.s.} \quad (1.4)(4.16) = 5.824 \text{ c.p.s.}$$

$$12.87 > 5.824; \quad f_n > 1.4 f_o, \quad \text{correcto.}$$

3. Análisis final

Vibración acoplada horizontal y de balanceo

Masa de la máquina y cimiento = 2932 Kg

Valor de las constantes de rigidez.

$$K_x = 17,112,457.13 \text{ Kg/m} \quad K_r = 51,030,337.33 \text{ Kg-m/rad}$$

Cálculo de las constantes de amortiguamiento C_x y C_r . (Tabla 1.6. del Manual de Diseño de Obras Civiles, C.F.E.):

$$C_i = 2D_i \sqrt{K_i m}$$

$$C_x = 2D_x \sqrt{K_x m}$$

$$D_x = \frac{0.288}{\sqrt{B_x}}$$

$$B_x = \frac{(7-8\nu) m}{32(1-\nu) \rho R_o^3}$$

$$B_x = \frac{7 - (8 \times 0.35)}{32(1 - 0.35)} \times \frac{2932}{179.6} \times (1.329^3) = 1.40439$$

$$D_x = \frac{0.288}{\sqrt{1.40439}} = 0.243020$$

$$C_x = 2 \times 0.243020 \times \sqrt{(17112457.3) \times (2932)} = 108870.0 \text{ Kg} - \text{seg} / \text{m}$$

$$C_r = 2D_r \sqrt{K_r I_j}$$

$$h_1 = \frac{P_m H_m + 0.9 P_c}{P_s} = \frac{(4540 \times 2.1) + (24192 \times 0.9)}{28732} = 1.09 \text{ m}$$

$$h_2 = H_m - h_1 = 2.1 - 1.09 = 1.01 \text{ m}$$

$$h_3 = H_o - h_1 = 1.8 - 1.09 \text{ m}$$

$$I_y = m h_1^2 = 2932 \times (1.09^2) = 3483.5 \text{ Kg} - \text{m} / \text{seg}^2$$

$$I_0 = I_b - I_y = 7804 - 3483.5 = 4320.5 \text{ Kg} - \text{m} / \text{seg}^2$$

$$B_r = \frac{3 \times (1 - 0.35)}{8} \frac{3483.5}{179.59 \times (1.685^5)} = 0.34807$$

$$D_r = \frac{0.15}{(1 + 0.34807) \times \sqrt{0.34807}} = 0.1886$$

$$C_r = 2 \times 0.1886 \times \sqrt{51030337.3 \times 348305} = 159035.4 \text{ Kg} - \text{seg} / \text{rad}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado en el Manual de Diseño de Obras Civiles.

C.F.E:

$$(m\omega_o^2 - K_x)X_1 + C_x\omega_o X_2 + h_1 K_x a_1 - h_1 C_x \omega_o a_2 = -P_x$$

$$C_x\omega_o X_1 - (m\omega_o^2 - K_x)X_2 - h_1 C_x \omega_o a_1 - h_1 K_x a_2 = 0$$

$$h_1 K_x X_1 - h_1 C_x \omega_o X_2 + (I_o\omega_o^2 - K_r - h_1^2 K_x)a_1 + (h_1^2 C_x \omega_o + C_r \omega_o)a_2 = -P_x h_2$$

$$h_1 C_x \omega_o X_1 - h_1 K_x X_2 + (h_1^2 C_x \omega_o + C_r \omega_o)a_1 + (I_o\omega_o^2 - K_r - h_1^2 K_x)a_2 = 0$$

Cálculo de los coeficientes:

$$m\omega_o^2 - K_x = 2932 \times (26.2^2 - 17112457.3) = -15099815.22$$

$$C_x\omega_o = 108870 \times 26.2 = 2852394.0$$

$$h_1 K_x = 1.09 \times 17112457.3 = 18099815.22$$

$$h_1 C_x \omega_o = 1.09 \times 108870 \times 26.2 = 3109109.46$$

$$I_o\omega_o^2 - K_r - h_1^2 K_x = (4320.5 \times 26.2^2) - 51030337.33 - (1.09^2 \times 17112457.3) = -68395883.8$$

$$h_1^2 C_x \omega_o + C_r \omega_o = (1.09 \times 108870 \times 26.2) + (159035.4 \times 26.2) = 7275836.94$$

El sistema queda así

$$(-15099815)X_1 + (2852394.0)X_2 + (18652578.4)a_1 - (3109109.4)a_2 = -1135.0$$

$$(2852394.0)X_1 + (15099815.2)X_2 - (3109109.4)a_1 - (18652578.4)a_2 = 0$$

$$(1852578.4)X_1 - (3109109.4)X_2 - (68395883.8)a_1 + (7275836.9)a_2 = -1146.35$$

$$(3109109.4)X_1 - (18652578.4)X_2 + (7275836.9)a_1 - (68395883.8)a_2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$X_1 = 1.43206 \times 10^{-4} \text{ m} \quad a_1 = 5.71394 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$X_2 = 1.96888 \times 10^{-7} \text{ m} \quad a_2 = 1.25345 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Cálculo de amplitudes, horizontal y de cabeceo.

$$A_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(1.43206 \times 10^{-4})^2 + (1.96888 \times 10^{-7})^2}$$

$$A_x = 1.43206 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$A_c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(5.7139 \times 10^{-5})^2 + (1.2534 \times 10^{-5})^2}$$

$$A_c = 5.84976 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$A_{xt} = 1.433206 \times 10^{-4} + 0.71 \times (5.84976 \times 10^{-5}) = 1.84739 \times 10^{-4} \text{ m}$$

De modo similar al criterio para las frecuencias, la Norma de Diseño C-2.26 para Cimientos de Equipo Rotatorio establece que, en una cimentación adecuada los desplazamientos no deben rebasar al permisible, dado por:

$$A_{xt} < A_a \text{ y } A_a = \frac{0.00061}{f_0}$$

donde A_a es la amplitud máxima de desplazamiento horizontal permisible y f_0 es la frecuencia de operación de la máquina.

Verificando:

$$A_{xt} = 1.84739 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$f_0 = 4.16 \text{ c.p.s.}$$

$$A_a = \frac{0.00061}{4.16} = 1.46634 \times 10^{-4}$$

de aquí $A_{xt} > A_a$. Por tanto el cimiento no es aceptable.

Se debe repetir el análisis aumentando la dimensión del cimiento paralela a la dirección de la carga.

3.2.2 Ejemplo numérico (Resolución computarizada)

Este ejemplo es el mismo que el anterior (Ver fig. 3.1), ahora resuelto con el programa DYNA3.

Diseñar un cimiento desplantado sobre el terreno, para un motor con cilindro horizontal y fuerza dinámica horizontal.

Datos de la máquina

Peso total = 4540 Kg

Peso del rotor = 2026 Kg

Velocidad de operación = 250 r.p.m. = 26.2 rad/seg = 4.16 c.p.s.

Fuerza dinámica:

$$F_t = \frac{m_e e \omega_o^2}{\omega_o^2} = m_e e = 206.68 \times 0.008 = 1.683 \text{ Kg} - \text{seg}^2$$

Para carga armónica cuadrática.

Datos del suelo

Módulo de rigidez al corte = 260 Kg/cm² = 2600000 Kg/m²

Peso volumétrico = 1760 Kg/m³

Densidad = 176.6 Kg seg²/m⁴

Velocidad de propagación de las ondas de cortante = 121 m/seg

Módulo de Poisson = 0.33

Cimiento supuesto

Concreto de peso volumétrico = 2400 Kg/m³

Dimensiones: 1.5 m x 3.7 m x 1.8 m ; 2c = 1.5 m, 2d = 3.7 m

3.7 m en dirección de la fuerza dinámica.

Area = (1.5)(3.7) = 5.55 m²

Para comparar los resultados obtenidos se presenta la tabla 3.

Amplitudes de Respuestas Resonantes				
Método	Horizontal (X)		Cabeceo (Y)	
	Amp. (m)	Frec.(c.p.s.)	Amp. (rad)	Frec.(c.p.s.)
Manual	1.843E-04	12.16	5.849E-04	12.87
Dyna3 N.C.	2.518E-04	3.73	9.986E-05	3.73
Dyna3 C.	2.160E-04	3.94	8.545E-05	3.94
Comparación de Amplitudes de Respuestas de Operación entre carga cuadrática y no cuadrática				
Método	Horizontal (X)		Cabeceo (Y)	
	Amp. (m)	Frec.(c.p.s.)	Amp. (rad)	Frec.(c.p.s.)
Dyna3 N.C.	2.04E-04	4.16	8.06E-05	4.16
Dyna3 C.	2.06E-04	4.16	8.16E-05	4.16
N.C. = Carga no cuadrática C. = Carga cuadrática				

Tabla 2. Resultados obtenidos, cálculo manual y utilizando DYNA3

Se nota que los valores de frecuencias obtenidos manualmente difieren significativamente de los obtenidos con DYNA3. Esto se debe en parte, a que los criterios contenidos en la Norma C-2.26 para Cimientos de Equipo Rotatorio y las tablas del Manual de Obras Civiles, de C.F.E., están rebasados por los modernos criterios de diseño contenidos en el programa DYNA3. No es así con respecto a los valores de amplitud, los cuales son prácticamente del mismo orden de magnitud.

4. ESTUDIO PARAMETRICO

4.1 Características del sistema

El estudio paramétrico se realizó tomando los datos de la máquina especificados en la norma de diseño C-2.26 (C.F.E., 1977) para cimientos de equipo rotatorio (Fig. 4.1 a y b).

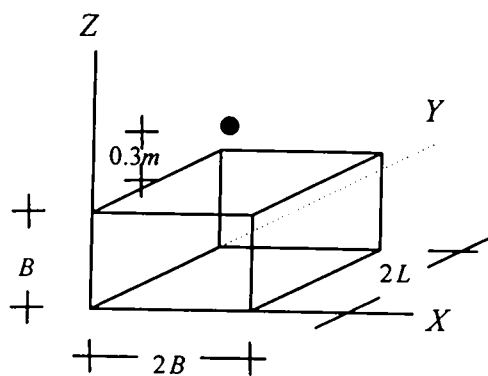


Fig. 4.1 (a) Parámetros geométricos y mecánicos. Cimentación

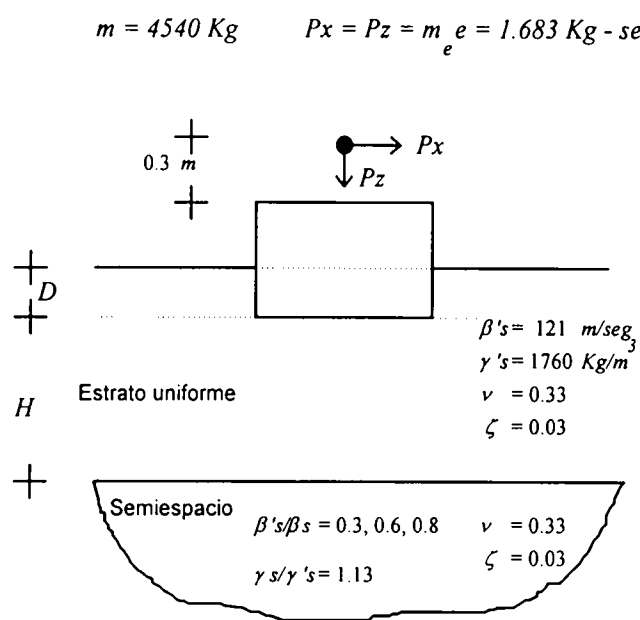


Fig. 4.1 (b) Parámetros geométricos y mecánicos. Suelo

4.2 Parámetros dimensionales

Los parámetros normalizados con respecto a la respuesta dinámica del bloque son:

1. Relación de largo entre semiancho de la cimentación, L/B , la cual se varió entre 1 y 3.
2. Relación de espesor del estrato entre semiancho de la cimentación, H/B , la cual se varió entre 2 y 4.
3. Relación de velocidad de ondas de cortante del estrato entre velocidad de ondas de cortante del semiespacio, β'_s/β_s , la cual se varió entre 0.3 y 0.8.
4. Relación profundidad de enterramiento entre semiancho de la cimentación, D/B , la cual se varió entre 0 y 1.

En las tablas siguientes, los valores con asterisco, cumplieron con la norma C-2.26 de la C.F.E; los porcentajes de incremento aparecen con signo + y los de reducción con signo - .

4.2.1 Efecto de la relación L/B

Esta relación también es llamada relación de aspecto. El estudio se hizo variando $L/B = 1, 2$ y 3 ; en estos casos se mantuvieron constantes $H/B = 3$; $\beta_s'/\beta_s = 0.6$; $D/B = 1/2$.

En la tabla 3 se presentan los valores de frecuencias y amplitudes de respuesta, resonantes y de operación; también los porcentajes de reducción o incremento de esas frecuencias y amplitudes con respecto al valor dado por la relación $L/B = 1$, el cual es tomado como el 100%.

Amplitud de la respuesta horizontal

En la figura 4.2 se aprecia, tomando como condiciones iniciales las obtenidas para $L/B = 1$, la existencia de una clara tendencia a que tanto la amplitud de la respuesta como la frecuencia disminuyan a medida que la relación L/B aumenta. Esto se debe a que cuando esta relación aumenta el bloque se hace más flexible, bajando su frecuencia natural y acercándose a la frecuencia de operación de la máquina, es decir a la zona de resonancia, lo cual aumentaría la amplitud de la respuesta. Esto no sucede porque el área lateral de contacto del bloque y el suelo aumenta a medida que L/B lo hace, incrementando la interacción entre el bloque y el suelo lateral a él, limitando así los desplazamientos.

Amplitud de la respuesta vertical

En la figura 4.3 se aprecia, tomando como condiciones iniciales las obtenidas para $L/B = 1$, la tendencia a disminuir tanto la amplitud de la respuesta como la frecuencia. La disminución de la frecuencia se debe al incremento de la flexibilidad del bloque cuando L/B aumenta; esta disminución no provoca problemas ya que la frecuencia de operación está muy alejada. La disminución de la respuesta se debe al aumento del área de contacto lateral cuando L/B aumenta; esto hace que se incremente el cortante entre las paredes del bloque y el suelo lateral a él, limitando así el desplazamiento.

Amplitud de la respuesta de cabeceo

Considerando como condiciones iniciales las dadas para $L/B = 1$, en la figura 4.4 se nota la disminución de las respuestas y frecuencias cuando L/B aumenta. Al aumentar L/B el bloque

se hace más flexible con lo cual la frecuencia natural baja acercándose a la zona de resonancia, de esto se esperarían incrementos en la amplitud de la respuesta; esto no sucede pues al aumentar L/B el área lateral de bloque aumenta y por lo tanto el área de contacto bloque – suelo también; lo que disminuye el cabeceo.

Amplitudes de Respuestas Resonantes													
L/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)				
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%	
1	4.91E-04	100	4.69	100	3.58E-04	100	6.76 *	100	2.80E-04	100	4.66	100	
2	2.73E-04	-44	4.56	-3	2.13E-04	-41	6.43 *	-5	1.40E-04	-50	4.51	-3	
3	1.82E-04	-63	4.33	-8	1.46E-04	-59	5.87 *	-13	8.31E-05	-70	4.27	-8	
Amplitudes de Respuestas de Operación													
L/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)				
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%	
1	3.61E-04	100	4.16		7.06E-05 *	100	4.16		2.11E-04	100	4.16		
2	2.32E-04	-36	4.16		5.01E-05 *	-29	4.16		1.23E-04	-42	4.16		
3	1.77E-04	-51	4.16		4.68E-05 *	-34	4.16		8.23E-05	-61	4.16		

Tabla 3. Efecto de la relación L/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación

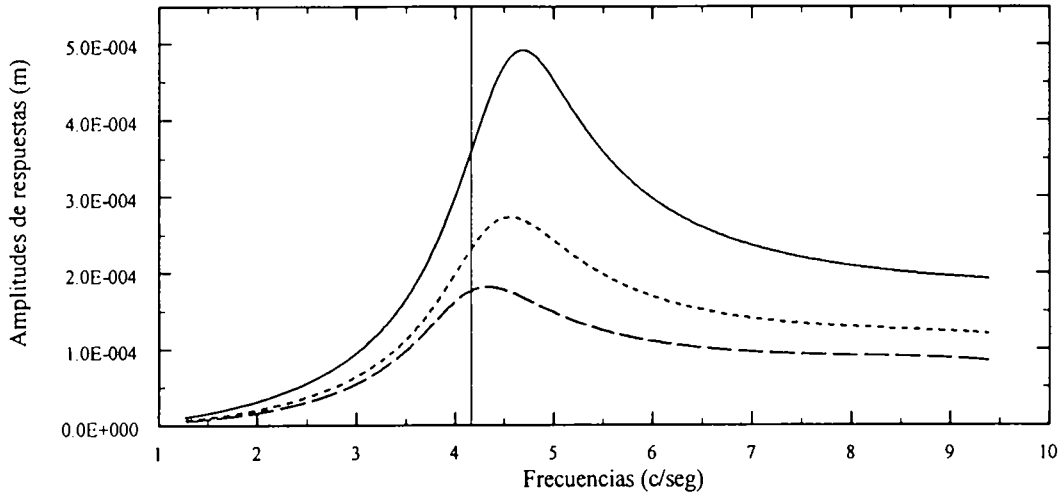


Fig. 4.2 Relación L/B . Amplitud de respuestas horizontales

$L/B = 1$ _____ ; $L/B = 2$; $L/B = 3$ - - - -

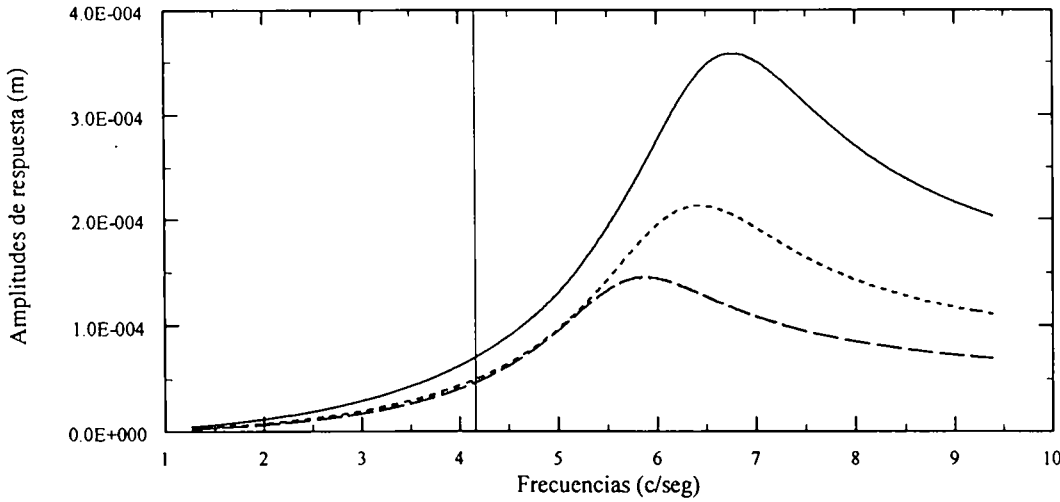


Fig. 4.3 Relación L/B . Amplitud de respuestas verticales

$L/B = 1$ _____ ; $L/B = 2$; $L/B = 3$ - - - -

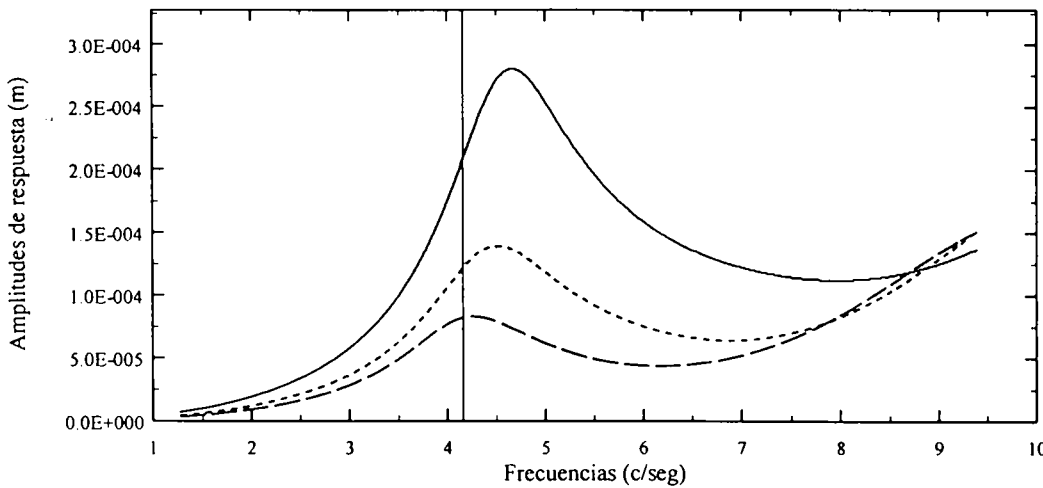


Fig. 4.4 Relación L/B . Amplitud de respuestas de cabeceo

$L/B = 1$ _____ ; $L/B = 2$; $L/B = 3$ - - - -

4.2.2 Efecto de la relación H/B

Esta relación considera el espesor del estrato uniforme en función del semiancho del bloque de cimentación. Se utilizaron las relaciones $H/B = 2, 3$ y 4 ; en los tres casos se mantuvieron constantes $L/B = 2$, $\beta_s'/\beta_s = 0.6$ y $D/B = 1/2$.

En la tabla 4 se presentan los valores de frecuencias y amplitudes de respuestas, resonantes y de operación; también los porcentajes de reducción o incremento de esas frecuencias y amplitudes con respecto al valor dado por la relación $H/B = 2$, el cual es tomado como el 100%.

Amplitud de la respuesta horizontal

Partiendo de los resultados para $H/B = 2$, en la figura 4.5 se puede ver claramente que existe la tendencia a la disminución de la amplitud de la respuesta y la frecuencia. A medida que la relación H/B aumenta, la frecuencia disminuye acercándose a la frecuencia de operación donde se esperaría que la amplitud aumentara, pero sucede lo contrario. Esto se puede explicar ya que sabemos que la energía transmitida del bloque al suelo se disipa debido a los amortiguamientos viscoso y geométrico. Este último será mayor mientras más profundo sea el estrato uniforme, pues el frente de onda abarca mayor área disipando con ello mayor cantidad de energía.

Amplitud de la respuesta vertical

Partiendo de los resultados para $H/B=2$, en la figura 4.6 se aprecia que no existe una tendencia de comportamiento con respecto a la amplitud de la respuesta. Con respecto a la frecuencia el sistema se hace más flexible a medida que H/B aumenta, lo que disminuye el valor de la frecuencia.

Amplitud de respuesta de cabeceo

Tomando como punto de partida los resultados para $H/B = 2$, en la figura 4.7 se nota una tendencia clara a la disminución de la respuesta de cabeceo y la frecuencia con el aumento de H/B . Este comportamiento se puede explicar considerando que al aumentar el espesor del

estrato la energía transmitida al suelo se disipa en mayor cantidad. Al aumentar la relación H/B se presenta disminución en la frecuencia debido a que al ser mayor el espesor del estrato el sistema se hace más flexible.

Amplitudes de Respuestas Resonantes													
H/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)				
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%	
1	3.00E-04	100	4.73	100	2.08E-04	100	7.29 *	100	1.64E-04	100	4.70	100	
2	2.73E-04	-9	4.56	-4	2.13E-04	+2	6.43 *	-12	1.40E-04	-15	4.51	-4	
3	2.53E-04	-16	4.49	-5	1.98E-04	-5	5.98 *	-18	1.26E-04	-23	4.44	-6	
Amplitudes de Respuestas de Operación													
H/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)				
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%	
1	2.12E-04	100	4.16		3.59E-05 *	100	4.16		1.21E-04	100	4.16		
2	2.32E-04	+9	4.16		5.01E-05 *	+39	4.16		1.23E-04	+2	4.16		
3	2.30E-04	+8	4.16		6.07E-05 *	+69	4.16		1.18E-04	-3	4.16		

Tabla 4. Efecto de la relación H/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación

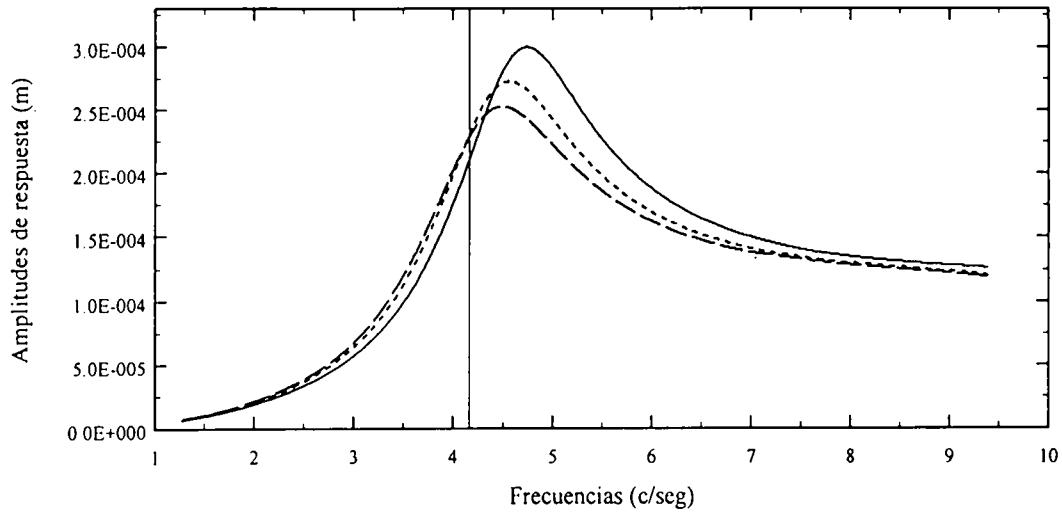


Fig. 4.5 Relación H/B . Amplitud de respuestas horizontales

$H/B = 2$ _____ ; $H/B = 3$; $H/B = 4$ - - - -

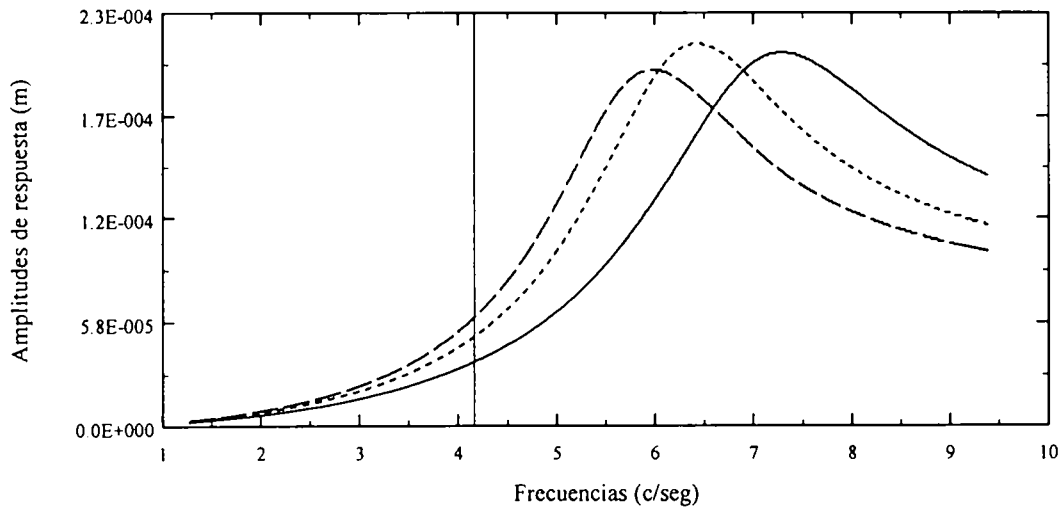


Fig. 4.6 Relación H/B . Amplitud de respuestas verticales

$H/B = 2$ _____ ; $H/B = 3$; $H/B = 4$ - - - -

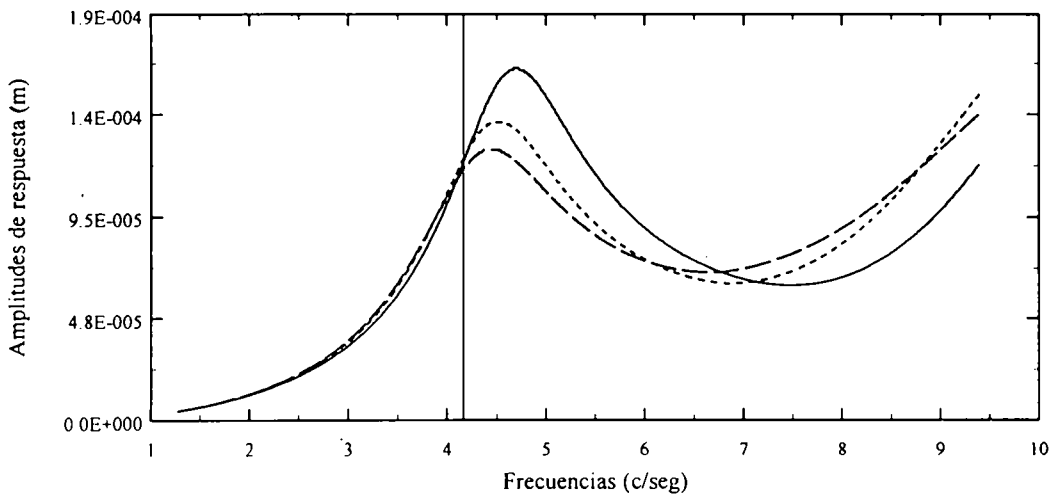


Fig. 4.7 Relación H/B . Amplitud de respuestas de cabeceo

$H/B = 2$ _____ ; $H/B = 3$; $H/B = 4$ - - - -

4.2.3 Efecto de la relación β_s'/β_s

Esta relación considera las velocidades de propagación de ondas de cortante del estrato uniforme y el semiespacio. Se utilizaron los valores $\beta_s'/\beta_s = 0.3, 0.6$ y 0.8 , manteniendo constantes $H/B = 3, L/B = 2, D/B = 1/2$.

En la tabla 5 se presentan los valores de frecuencias y amplitudes de respuestas, resonantes y de operación; también los porcentajes de reducción o incremento de esas frecuencias y amplitudes con respecto al valor dado por la relación $\beta_s'/\beta_s = 0.3$, el cual es tomado como el 100%.

Amplitud de la respuesta horizontal

Considerando como punto de partida los resultados para $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ en la figura 4.8, se observa que existe una clara tendencia a la disminución tanto de la amplitud de la respuesta como de la frecuencia a medida que β_s'/β_s aumenta. La disminución de la frecuencia se debe al aumento de la flexibilidad que se presenta en el sistema cuando aumenta β_s'/β_s . Con respecto a la amplitud de la respuesta, el aumento en la relación β_s'/β_s implica disminución en la velocidad de propagación de las ondas en el semiespacio, esta velocidad tiende a tomar el valor de la velocidad del estrato uniforme, disipándose mayor cantidad de energía.

Amplitud de la respuesta vertical

Partiendo de los resultados para $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ en la figura 4.9 se manifiesta la tendencia a la disminución de la amplitud de la respuesta y la frecuencia. Esto se puede entender del mismo modo que en el punto anterior: si disminuye el valor de la velocidad de propagación de las ondas en el semiespacio de tal forma que tienda al valor de la velocidad de propagación del estrato uniforme, la cantidad de energía disipada será mayor.

Amplitud de la respuesta de cabeceo

Tomando como punto de partida los resultados para $\beta'_s/\beta_s = 0.3$, en la figura 4.10 se aprecia claramente la tendencia a la disminución de la amplitud de la respuesta y la frecuencia, lo cual se explica de la misma manera que en el punto anterior.

Amplitudes de Respuestas Resonantes												
β'_s/β_s	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)			
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%
0.3	3.12E-04	100	4.63	100	2.92E-04	100	6.80 *	100	1.62E-04	100	4.58	100
0.6	2.73E-04	-13	4.56	-1	2.13E-04	-27	6.43 *	-5	1.40E-04	-14	4.51	-1
0.8	2.51E-04	-20	4.54	-2	1.68E-04	-43	6.22 *	-9	1.29E-04	-20	4.49	-2
Amplitudes de Respuestas de Operación												
β'_s/β_s	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)			
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%
0.3	2.37E-04	100	4.16		4.08E-05 *	100	4.16		1.29E-04	100	4.16	
0.6	2.32E-04	-2	4.16		5.01E-05 *	+23	4.16		1.23E-04	-5	4.16	
0.8	2.23E-04	-6	4.16		5.76E-05 *	+41	4.16		1.17E-04	-9	4.16	

Tabla 5. Efecto de la relación β'_s/β_s . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación

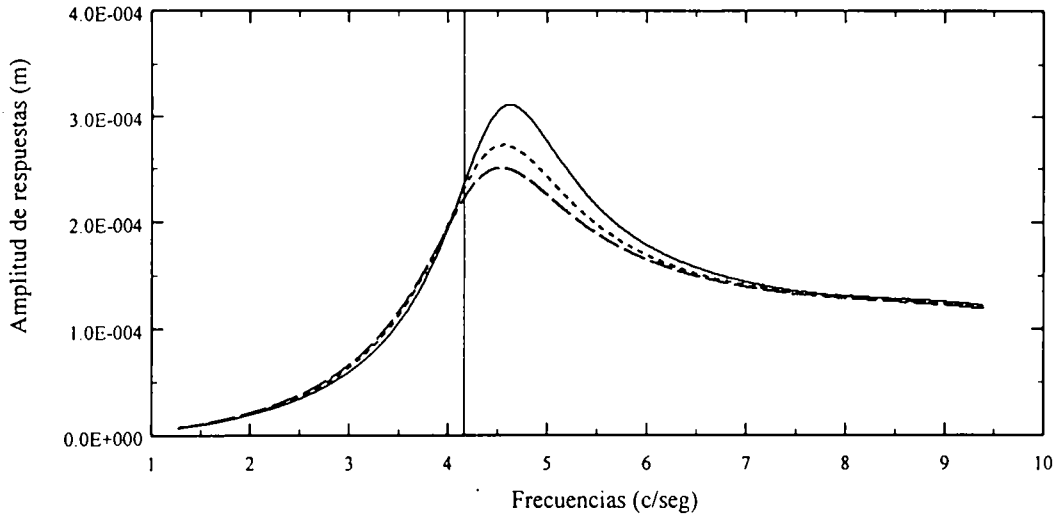


Fig. 4.8 Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas horizontales
 $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ _____ ; $\beta_s'/\beta_s = 0.6$; $\beta_s'/\beta_s = 0.8$ - - - -

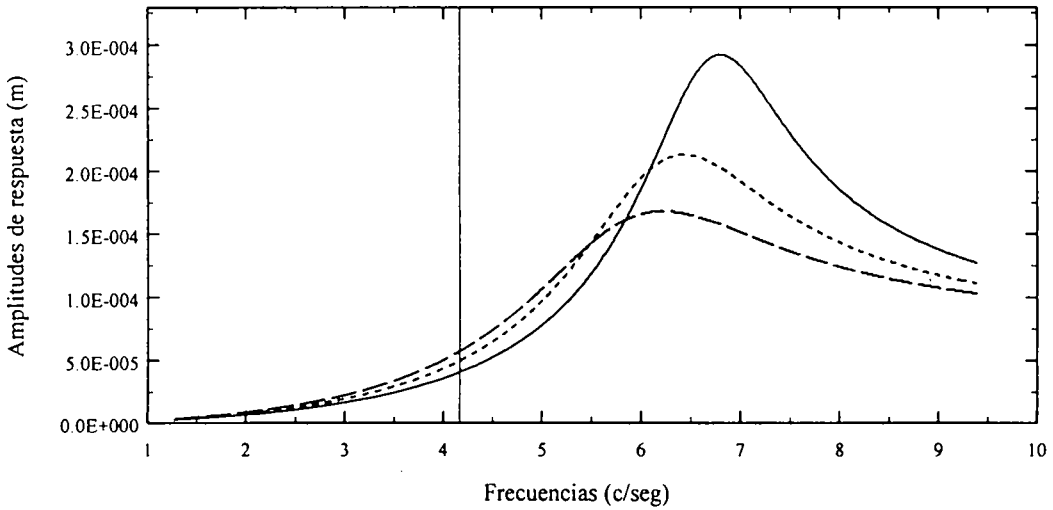


Fig. 4.9 Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas verticales
 $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ _____ ; $\beta_s'/\beta_s = 0.6$; $\beta_s'/\beta_s = 0.8$ - - - -

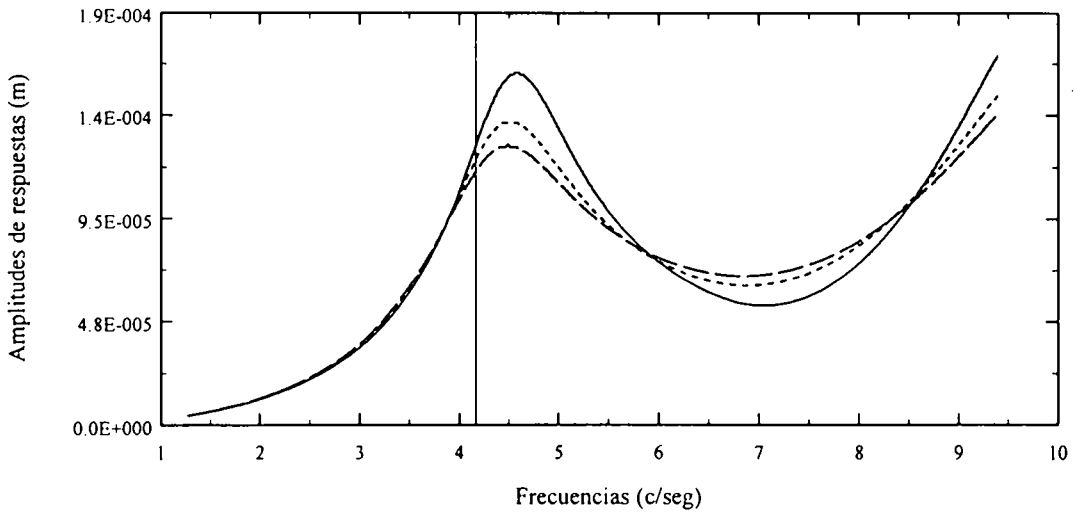


Fig. 4.10 Relación β_s'/β_s . Amplitud de respuestas de cabeceo
 $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ _____ ; $\beta_s'/\beta_s = 0.6$; $\beta_s'/\beta_s = 0.8$ - - - -

4.2.4 Efecto de la relación D/B

Esta relación considera la profundidad de enterramiento en función del semiancho del bloque. Se utilizaron las relaciones: $D/B = 0, \frac{1}{2}$ y 1 , manteniéndose constantes $L/B = 2$, $H/B = 3$ y $\beta_s'/\beta_s = 0.6$.

En la tabla 6 se presentan los valores de frecuencias y amplitudes de respuestas, resonantes y de operación; también los porcentajes de disminución o incremento de esas frecuencias y amplitudes con respecto al valor dado por la relación $D/B = 0$, el cual es tomado como el 100%.

Amplitud de la respuesta horizontal

Partiendo de lo obtenido para $D/B = 0$, en la figura 4.11 se ve clara la tendencia a la disminución de la amplitud de la respuesta cuando D/B aumenta, notándose que también existe tendencia a que la frecuencia aumente a medida que aumenta D/B . Lo anterior era de esperarse, pues mientras más enterrado esté el bloque la interacción del suelo con las paredes laterales del bloque es mayor, limitando los desplazamientos; al aumentar el enterramiento, el sistema se hace más rígido lo que hace que su frecuencia aumente.

Amplitud de la respuesta vertical

Partiendo de lo obtenido para $D/B = 0$ en la figura 4.12 se aprecia la tendencia a la disminución de la amplitud de la frecuencia y un aumento del valor de la frecuencia. El aumento en el valor de la frecuencia se debe a que al aumentar D/B el sistema se hace más rígido. La disminución en la respuesta vertical sucede porque al estar más enterrado el bloque aumenta la interacción (cortante) del suelo con las paredes laterales del bloque, limitando el desplazamiento.

Amplitud de la respuesta de cabeceo

Tomando como punto de partida los resultados para $D/B = 0$, en la figura 4.13 se aprecia la tendencia a la disminución de la amplitud de la respuesta, y a la vez un aumento del valor de la frecuencia a medida que D/B aumenta. Es entendible que lo anterior sucediera, pues al aumentar la profundidad de enterramiento, la interacción que existe entre las paredes laterales del bloque y el suelo aumenta, limitando el cabeceo.

Amplitudes de Respuestas Resonantes												
D/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)			
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%
0	5.92E-04	100	3.88	100	3.35E-04	100	6.02 *	100	3.03E-04	100	3.87	100
1/2	2.73E-04	-54	4.56	+36	2.13E-04	-36	6.43 *	+7	1.40E-04	-54	4.51	+17
1	1.62E-04	-73	5.63	+45	1.61E-04	-52	6.84 *	+14	7.97E-05	-74	5.51	+42
Amplitudes de Respuestas de Operación												
D/B	Horizontal (X)				Vertical (Z)				Cabeceo (Y)			
	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (m)	%	Frec.(c.p.s.)	%	Amp. (rad)	%	Frec.(c.p.s.)	%
0	4.32E-04	100	4.16		6.14E-05 *	100	4.16		2.11E-04	100	4.16	
1/2	2.32E-04	-46	4.16		5.01E-05 *	-18	4.16		1.23E-04	-42	4.16	
1	9.63E-05	-78	4.16		4.20E-05 *	-32	4.16		5.11E-05	-76	4.16	

Tabla 6. Efecto de la relación D/B . Frecuencias y amplitudes de respuestas resonantes y de operación

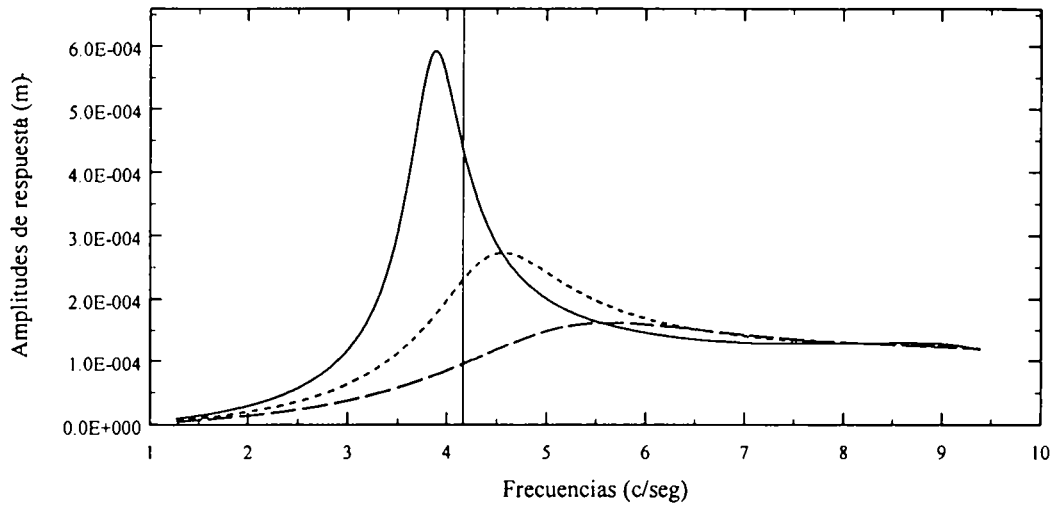


Fig. 4.11 Relación D/B . Amplitud de respuestas horizontales

$D/B = 0$ _____ ; $D/B = 1/2$; $D/B = 1$ - - - -

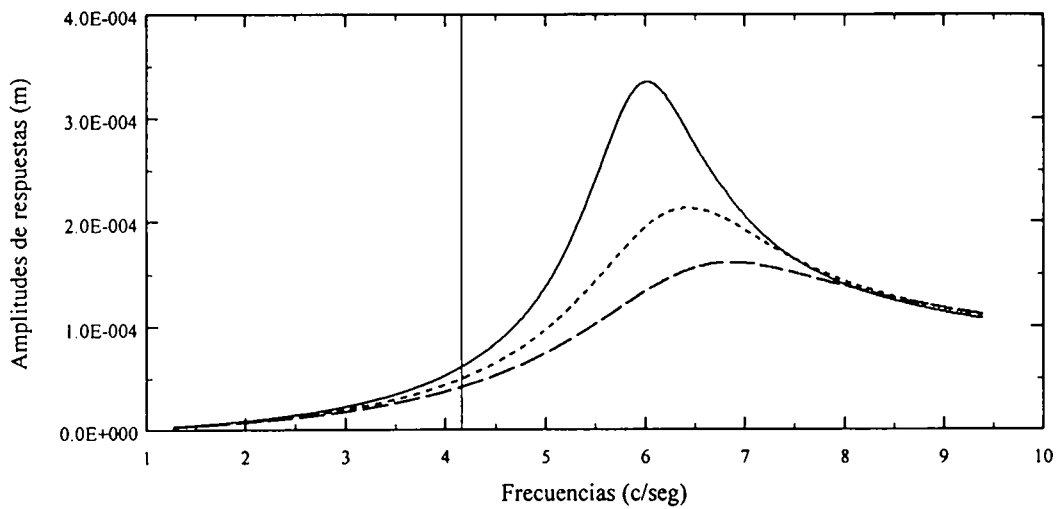


Fig. 4.12 Relación D/B . Amplitud de respuestas verticales

$D/B = 0$ _____ ; $D/B = 1/2$; $D/B = 1$ - - - -

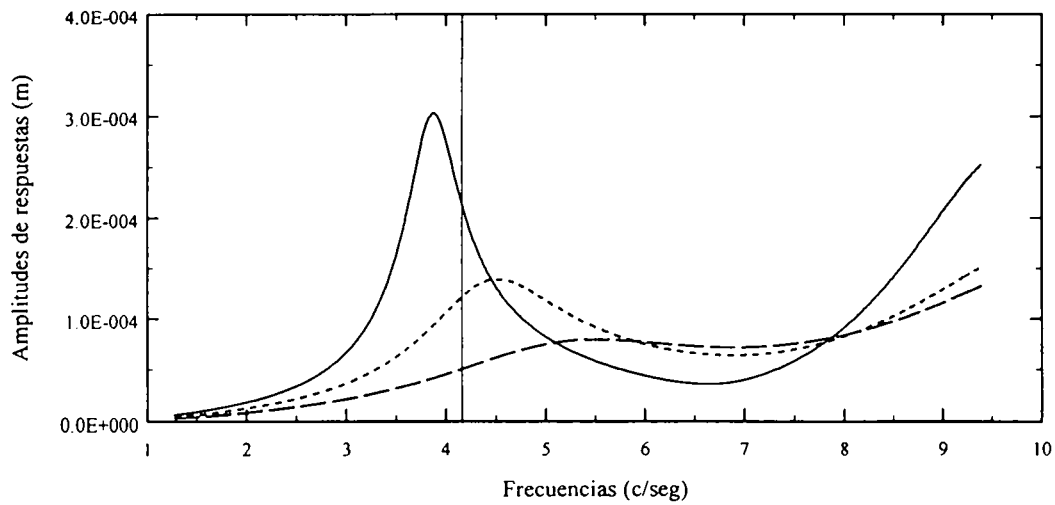


Fig. 4.13 Relación D/B . Amplitud de respuestas de cabeceo

$D/B = 0$ _____ ; $D/B = 1/2$; $D/B = 1$ - - - -

5. AYUDAS DE DISEÑO

Para que el diseño de cimentaciones de maquinaria sea más práctico racional es necesario contar con ayudas de diseño; éstas se presentan a continuación en forma de tablas.

5.1 Tablas de funciones de impedancia

En problemas de interacción dinámica suelo-estructura, es necesario conocer la magnitud de la rigidez de la cimentación y la variación de ésta con la frecuencia de excitación. Para ello, se presentan las funciones de impedancia obtenidas con el programa DYNA3. Cabe aclarar que los resultados no son rigurosos; ya que el programa utiliza expresiones aproximadas para el cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Con base en esto, se presentan los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para los modos de traslación horizontal, rotación y acoplamiento de cimentaciones rectangulares enterradas en un estrato homogéneo sobre semiespacio elástico. Las rigideces y amortiguamientos están normalizados para ser utilizados en situaciones generales.

Los parámetros que consideramos variables son: la longitud del bloque L , el espesor del estrato H , la velocidad de propagación de las ondas de cortante β_s' y la profundidad de enterramiento D .

El rango de variación de los parámetros se delimitó de tal forma que cubra una gama de casos representativos; si el problema a resolver se sale de esos rangos, es necesario utilizar DYNA3. En las tablas i, j, k, l ($i = 1 \dots 3$), ($j = 1 \dots 3$), ($k = 1 \dots 3$), ($l = 1 \dots 3$) se presentan las funciones de impedancia para cimentaciones con paredes en contacto total con el terreno y los valores siguientes: $L/B = 1$ ($i = 1$), 2 ($i = 2$), 3 ($i = 3$); $H/B = 2$ ($j = 1$), 3 ($j = 2$), 4 ($j = 3$); $\beta_s'/\beta_s = 0.3$ ($k = 1$), 0.6 ($k = 2$), 0.8 ($k = 3$); $D/B = 0$ ($l = 1$), $1/2$ ($l = 2$), 1 ($l = 3$).

Para todos los casos se consideró un amortiguamiento del suelo $\zeta = 0.03$.

5.1 Ejemplo de aplicación

Determinar las rigideces estáticas y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del sistema suelo - cimentación mostrado en la figura 5.1, para una frecuencia de excitación $f=34$ Hz. ($\omega = 68\pi$ rad/seg).

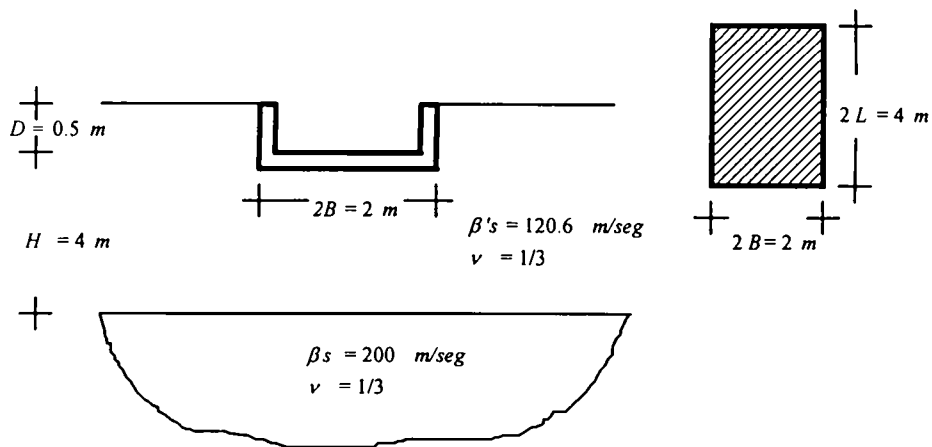


Fig. 5.1 Datos para el ejemplo de aplicación. Cimentación y suelo

Datos

Los parámetros geométricos y mecánicos que se requieren son:

$$\text{Cimentación} \quad D = 0.5 \text{ m} \quad 2B = 2 \text{ m} \quad 2L = 4 \text{ m}$$

$$\text{Suelo} \quad \beta'_s = 120.6 \text{ m/seg} \quad \nu = 1/3 \quad H = 4 \text{ m}$$

Resultados

Como $L/B = 2$, $H/B = 4$, $\beta'_s/\beta_s = 0.60$ y $D/B = 1/2$, se debe utilizar la tabla 2.3.2.2. Para obtener los coeficientes de impedancia es necesario calcular la frecuencia normalizada

$$\eta = \frac{\omega R}{\beta'_s}$$

$$\text{Para } \frac{L}{B} = 2; \quad R = \left(\frac{2B \times 2L}{\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 4}{3.1416} \right)^{1/2} = 1.596; \quad \eta = \frac{68 \times \pi \times 1.596}{120.6} = 2.8271$$

$$\text{Para } \frac{\eta}{2 \times \pi} = \frac{2.8271}{2 \times 3.1416} = 0.449 \approx 0.45 \quad \text{se encuentran los siguientes valores}$$

$$\frac{K_x^0}{GR} = 6.4500 \quad k_x = 0.9420 \quad c_x = 0.9168$$

$$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.5317 \quad k_r = 0.9472 \quad c_r = 0.2742$$

$$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.5177 \quad k_{xr} = 0.9356 \quad c_{xr} = 0.7207$$

Tabla 1.2.2.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 6.9149$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.9565$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -3.0469$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.2210	1.0013	1.1732	1.0033	2.2144
0.050	1.0045	1.4966	1.0003	0.6236	1.0039	1.2980
0.075	1.0056	1.2551	0.9990	0.4456	1.0045	0.9924
0.100	1.0068	1.1343	0.9973	0.3604	1.0050	0.8396
0.125	1.0054	1.0839	0.9946	0.3171	1.0031	0.7717
0.150	1.0012	1.0711	0.9906	0.2952	0.9982	0.7488
0.175	0.9970	1.0619	0.9865	0.2813	0.9933	0.7325
0.200	0.9928	1.0550	0.9823	0.2723	0.9884	0.7203
0.225	0.9886	1.0497	0.9782	0.2665	0.9836	0.7107
0.250	0.9844	1.0454	0.9740	0.2627	0.9787	0.7031
0.275	0.9801	1.0419	0.9698	0.2604	0.9738	0.6969
0.300	0.9752	1.0539	0.9646	0.2639	0.9685	0.7090
0.325	0.9725	1.0554	0.9591	0.2686	0.9643	0.7195
0.350	0.9696	1.0559	0.9536	0.2730	0.9600	0.7281
0.375	0.9665	1.0562	0.9482	0.2772	0.9555	0.7355
0.400	0.9631	1.0565	0.9428	0.2812	0.9510	0.7419
0.425	0.9595	1.0566	0.9374	0.2851	0.9463	0.7476
0.450	0.9557	1.0568	0.9321	0.2887	0.9415	0.7527
0.475	0.9517	1.0570	0.9269	0.2922	0.9367	0.7572
0.500	0.9476	1.0571	0.9217	0.2955	0.9318	0.7613
0.525	0.9433	1.0573	0.9165	0.2987	0.9268	0.7650
0.550	0.9389	1.0575	0.9114	0.3017	0.9217	0.7684
0.575	0.9367	1.0593	0.9067	0.3059	0.9202	0.7730
0.600	0.9389	1.0639	0.9024	0.3126	0.9256	0.7801
0.625	0.9410	1.0683	0.8982	0.3187	0.9311	0.7866
0.650	0.9430	1.0723	0.8940	0.3245	0.9364	0.7926
0.675	0.9450	1.0761	0.8899	0.3299	0.9418	0.7983
0.700	0.9468	1.0796	0.8858	0.3350	0.9470	0.8035
0.725	0.9486	1.0830	0.8818	0.3398	0.9523	0.8084
0.750	0.9503	1.0862	0.8779	0.3443	0.9575	0.8130
0.775	0.9519	1.0892	0.8739	0.3486	0.9627	0.8173
0.800	0.9534	1.0920	0.8701	0.3526	0.9678	0.8214
0.825	0.9549	1.0948	0.8662	0.3564	0.9729	0.8252
0.850	0.9564	1.0974	0.8625	0.3600	0.9780	0.8288
0.875	0.9598	1.0955	0.8603	0.3635	0.9855	0.8209
0.900	0.9631	1.0939	0.8582	0.3669	0.9930	0.8135
0.925	0.9663	1.0923	0.8562	0.3700	1.0005	0.8065
0.950	0.9695	1.0909	0.8541	0.3730	1.0079	0.7999
0.975	0.9727	1.0896	0.8521	0.3759	1.0153	0.7937
1.000	0.9759	1.0884	0.8502	0.3786	1.0228	0.7878

Tabla 2.2.2.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$L/B = 2 \quad H/B = 3 \quad \beta_s'/\beta_s = 0.6 \quad D/B = 1/2$						
$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 6.7185$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.5426$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.5793$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.1922	1.0015	1.4475	1.0033	2.3944
0.050	1.0041	1.3770	1.0009	0.7518	1.0037	1.3419
0.075	1.0050	1.1051	0.9999	0.5238	1.0041	0.9910
0.100	1.0058	0.9692	0.9988	0.4127	1.0045	0.8155
0.125	1.0048	0.9052	0.9972	0.3517	1.0032	0.7285
0.150	1.0018	0.8783	0.9947	0.3167	0.9999	0.6883
0.175	0.9988	0.8591	0.9917	0.2932	0.9967	0.6596
0.200	0.9957	0.8447	0.9886	0.2767	0.9935	0.6380
0.225	0.9927	0.8334	0.9855	0.2649	0.9903	0.6213
0.250	0.9897	0.8245	0.9824	0.2562	0.9871	0.6079
0.275	0.9867	0.8171	0.9793	0.2498	0.9838	0.5969
0.300	0.9818	0.8193	0.9759	0.2466	0.9788	0.5963
0.325	0.9780	0.8126	0.9724	0.2445	0.9738	0.5936
0.350	0.9740	0.8067	0.9681	0.2439	0.9686	0.5914
0.375	0.9698	0.8015	0.9632	0.2443	0.9633	0.5895
0.400	0.9654	0.7969	0.9584	0.2450	0.9579	0.5878
0.425	0.9609	0.7928	0.9535	0.2459	0.9525	0.5863
0.450	0.9562	0.7892	0.9487	0.2469	0.9470	0.5850
0.475	0.9514	0.7860	0.9439	0.2480	0.9414	0.5838
0.500	0.9465	0.7831	0.9391	0.2492	0.9358	0.5828
0.525	0.9415	0.7805	0.9344	0.2504	0.9301	0.5818
0.550	0.9364	0.7782	0.9297	0.2517	0.9244	0.5810
0.575	0.9312	0.7802	0.9251	0.2538	0.9187	0.5844
0.600	0.9260	0.7876	0.9205	0.2568	0.9129	0.5933
0.625	0.9207	0.7944	0.9160	0.2600	0.9073	0.6022
0.650	0.9154	0.8007	0.9116	0.2635	0.9019	0.6116
0.675	0.9099	0.8066	0.9070	0.2672	0.8965	0.6204
0.700	0.9045	0.8121	0.9008	0.2733	0.8911	0.6286
0.725	0.8989	0.8173	0.8947	0.2790	0.8856	0.6362
0.750	0.8933	0.8221	0.8886	0.2843	0.8801	0.6433
0.775	0.8877	0.8267	0.8826	0.2894	0.8745	0.6500
0.800	0.8820	0.8310	0.8766	0.2941	0.8690	0.6563
0.825	0.8763	0.8351	0.8706	0.2987	0.8634	0.6622
0.850	0.8710	0.8394	0.8648	0.3030	0.8583	0.6682
0.875	0.8698	0.8465	0.8596	0.3078	0.8570	0.6770
0.900	0.8685	0.8533	0.8545	0.3123	0.8557	0.6854
0.925	0.8672	0.8597	0.8494	0.3166	0.8546	0.6934
0.950	0.8658	0.8658	0.8451	0.3210	0.8556	0.7018
0.975	0.8644	0.8717	0.8409	0.3252	0.8566	0.7098
1.000	0.8630	0.8772	0.8367	0.3292	0.8577	0.7174

Tabla 3.2.2.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 6.5163$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.4338$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.3056$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.1857	1.0016	1.6036	1.0033	2.4996
0.050	1.0040	1.3295	1.0011	0.8252	1.0037	1.3738
0.075	1.0047	1.0440	1.0004	0.5690	1.0040	0.9984
0.100	1.0054	0.9013	0.9995	0.4434	1.0043	0.8106
0.125	1.0041	0.8345	0.9981	0.3735	1.0028	0.7177
0.150	1.0008	0.8056	0.9964	0.3319	0.9995	0.6737
0.175	0.9976	0.7849	0.9939	0.3038	0.9962	0.6426
0.200	0.9943	0.7695	0.9914	0.2837	0.9929	0.6192
0.225	0.9910	0.7574	0.9888	0.2689	0.9896	0.6010
0.250	0.9877	0.7478	0.9863	0.2578	0.9863	0.5865
0.275	0.9844	0.7399	0.9836	0.2493	0.9829	0.5746
0.300	0.9791	0.7420	0.9807	0.2445	0.9777	0.5740
0.325	0.9746	0.7370	0.9778	0.2408	0.9725	0.5714
0.350	0.9700	0.7326	0.9748	0.2383	0.9671	0.5700
0.375	0.9652	0.7288	0.9716	0.2366	0.9615	0.5687
0.400	0.9602	0.7254	0.9676	0.2359	0.9559	0.5676
0.425	0.9551	0.7224	0.9637	0.2355	0.9503	0.5666
0.450	0.9499	0.7197	0.9599	0.2355	0.9446	0.5657
0.475	0.9446	0.7173	0.9560	0.2356	0.9388	0.5649
0.500	0.9392	0.7152	0.9521	0.2359	0.9330	0.5642
0.525	0.9337	0.7133	0.9483	0.2363	0.9271	0.5635
0.550	0.9281	0.7116	0.9445	0.2368	0.9212	0.5630
0.575	0.9225	0.7152	0.9408	0.2384	0.9153	0.5679
0.600	0.9168	0.7233	0.9370	0.2409	0.9095	0.5774
0.625	0.9111	0.7309	0.9333	0.2433	0.9036	0.5862
0.650	0.9054	0.7378	0.9297	0.2457	0.8977	0.5947
0.675	0.8995	0.7443	0.9262	0.2486	0.8922	0.6042
0.700	0.8937	0.7503	0.9227	0.2514	0.8866	0.6131
0.725	0.8877	0.7560	0.9192	0.2540	0.8810	0.6214
0.750	0.8818	0.7613	0.9153	0.2569	0.8754	0.6291
0.775	0.8758	0.7663	0.9105	0.2601	0.8698	0.6364
0.800	0.8697	0.7710	0.9058	0.2632	0.8642	0.6432
0.825	0.8636	0.7754	0.9012	0.2662	0.8585	0.6496
0.850	0.8587	0.7806	0.8967	0.2691	0.8540	0.6567
0.875	0.8573	0.7881	0.8928	0.2725	0.8526	0.6661
0.900	0.8558	0.7953	0.8889	0.2757	2.7478	57.1377
0.925	0.8543	0.8021	0.8850	0.2787	0.8499	0.6835
0.950	0.8528	0.8085	0.8811	0.2816	0.8485	0.6915
0.975	0.8513	0.8147	0.8775	0.2845	0.8479	0.6994
1.000	0.8497	0.8205	0.8745	0.2875	0.8490	0.7076

Tabla 2.1.2.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$L/B = 2 \quad H/B = 2 \quad \beta_s'/\beta_s = 0.6 \quad D/B = 1/2$

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 7.4347$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.7657$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.8413$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0031	2.0387	1.0015	1.4135	1.0031	2.2332
0.050	1.0038	1.2731	1.0008	0.7339	1.0035	1.2480
0.075	1.0046	1.0179	1.0000	0.5112	1.0038	0.9195
0.100	1.0053	0.8902	0.9989	0.4026	1.0042	0.7552
0.125	1.0052	0.8292	0.9975	0.3428	1.0037	0.6729
0.150	1.0041	0.8024	0.9953	0.3083	1.0023	0.6338
0.175	1.0029	0.7832	0.9929	0.2852	1.0009	0.6059
0.200	1.0018	0.7688	0.9903	0.2689	0.9995	0.5849
0.225	1.0007	0.7577	0.9877	0.2572	0.9981	0.5687
0.250	0.9995	0.7487	0.9851	0.2485	0.9967	0.5556
0.275	0.9984	0.7414	0.9825	0.2422	0.9953	0.5450
0.300	0.9963	0.7376	0.9798	0.2379	0.9929	0.5385
0.325	0.9955	0.7247	0.9770	0.2344	0.9909	0.5289
0.350	0.9945	0.7135	0.9736	0.2323	0.9887	0.5209
0.375	0.9933	0.7037	0.9699	0.2311	0.9864	0.5139
0.400	0.9920	0.6951	0.9661	0.2304	0.9841	0.5078
0.425	0.9906	0.6875	0.9624	0.2300	0.9817	0.5024
0.450	0.9890	0.6808	0.9587	0.2299	0.9792	0.4976
0.475	0.9873	0.6748	0.9551	0.2300	0.9767	0.4933
0.500	0.9855	0.6694	0.9515	0.2302	0.9741	0.4894
0.525	0.9836	0.6645	0.9479	0.2306	0.9715	0.4859
0.550	0.9816	0.6601	0.9443	0.2311	0.9688	0.4828
0.575	0.9790	0.6570	0.9407	0.2319	0.9655	0.4808
0.600	0.9755	0.6554	0.9370	0.2330	0.9615	0.4803
0.625	0.9720	0.6539	0.9333	0.2343	0.9576	0.4806
0.650	0.9684	0.6527	0.9298	0.2360	0.9539	0.4819
0.675	0.9647	0.6515	0.9262	0.2379	0.9501	0.4831
0.700	0.9610	0.6504	0.9213	0.2404	0.9464	0.4843
0.725	0.9572	0.6495	0.9165	0.2428	0.9426	0.4854
0.750	0.9534	0.6486	0.9117	0.2451	0.9387	0.4865
0.775	0.9495	0.6478	0.9070	0.2473	0.9349	0.4874
0.800	0.9456	0.6471	0.9023	0.2494	0.9310	0.4884
0.825	0.9416	0.6465	0.8976	0.2514	0.9271	0.4893
0.850	0.9375	0.6462	0.8930	0.2534	0.9231	0.4904
0.875	0.9325	0.6477	0.8882	0.2556	0.9183	0.4933
0.900	0.9275	0.6492	0.8835	0.2578	0.9134	0.4961
0.925	0.9225	0.6506	0.8788	0.2598	0.9087	0.4988
0.950	0.9174	0.6519	0.8749	0.2621	0.9060	0.5021
0.975	0.9124	0.6532	0.8710	0.2643	0.9033	0.5052
1.000	0.9073	0.6545	0.8672	0.2664	0.9005	0.5082

Tabla 2.3.2.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$L/B = 2 \quad H/B = 4 \quad \beta_s'/\beta_s = 0.6 \quad D/B = 1/2$

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 6.4500$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.5317$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.5177$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.2171	1.0015	1.4434	1.0033	2.4015
0.050	1.0042	1.4011	1.0009	0.7498	1.0037	1.3490
0.075	1.0051	1.1290	0.9999	0.5225	1.0042	0.9981
0.100	1.0060	0.9929	0.9988	0.4118	1.0046	0.8226
0.125	1.0040	0.9356	0.9971	0.3522	1.0024	0.7423
0.150	0.9991	0.9190	0.9942	0.3200	0.9972	0.7147
0.175	0.9943	0.9072	0.9908	0.2984	0.9921	0.6949
0.200	0.9894	0.8983	0.9874	0.2835	0.9870	0.6801
0.225	0.9845	0.8915	0.9840	0.2728	0.9818	0.6686
0.250	0.9796	0.8859	0.9806	0.2650	0.9767	0.6594
0.275	0.9747	0.8814	0.9771	0.2594	0.9716	0.6519
0.300	0.9690	0.8945	0.9735	0.2584	0.9657	0.6627
0.325	0.9650	0.8999	0.9701	0.2595	0.9608	0.6751
0.350	0.9607	0.9043	0.9660	0.2621	0.9559	0.6869
0.375	0.9563	0.9081	0.9612	0.2653	0.9509	0.6970
0.400	0.9517	0.9114	0.9565	0.2683	0.9459	0.7059
0.425	0.9469	0.9142	0.9518	0.2713	0.9408	0.7138
0.450	0.9420	0.9168	0.9472	0.2742	0.9356	0.7207
0.475	0.9369	0.9191	0.9425	0.2770	0.9303	0.7270
0.500	0.9317	0.9212	0.9379	0.2797	0.9250	0.7326
0.525	0.9264	0.9231	0.9333	0.2823	0.9196	0.7377
0.550	0.9210	0.9248	0.9288	0.2848	0.9142	0.7423
0.575	0.9186	0.9285	0.9248	0.2876	0.9116	0.7487
0.600	0.9204	0.9347	0.9215	0.2908	0.9131	0.7574
0.625	0.9222	0.9405	0.9188	0.2938	0.9160	0.7653
0.650	0.9239	0.9459	0.9170	0.2967	0.9216	0.7725
0.675	0.9255	0.9509	0.9150	0.2998	0.9272	0.7792
0.700	0.9270	0.9555	0.9114	0.3053	0.9327	0.7855
0.725	0.9285	0.9599	0.9079	0.3104	0.9382	0.7914
0.750	0.9299	0.9640	0.9044	0.3153	0.9437	0.7968
0.775	0.9313	0.9679	0.9009	0.3199	0.9491	0.8020
0.800	0.9326	0.9716	0.8975	0.3242	0.9546	0.8068
0.825	0.9339	0.9751	0.8941	0.3283	0.9600	0.8113
0.850	0.9354	0.9779	0.8908	0.3321	0.9656	0.8151
0.875	0.9387	0.9764	0.8878	0.3350	0.9729	0.8145
0.900	0.9419	0.9750	0.8849	0.3377	0.9802	0.8139
0.925	0.9451	0.9738	0.8819	0.3402	0.9875	0.8130
0.950	0.9483	0.9727	0.8792	0.3398	0.9954	0.8047
0.975	0.9515	0.9716	0.8765	0.3395	1.0032	0.7970
1.000	0.9547	0.9706	0.8739	0.3392	1.0111	0.7896

Tabla 2.2.1.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 7.2019$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.5426$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.7172$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0026	1.7359	1.0014	1.3097	1.0026	1.8378
0.050	1.0034	1.1299	1.0007	0.6825	1.0029	1.0563
0.075	1.0042	0.9278	0.9998	0.4774	1.0033	0.7956
0.100	1.0050	0.8268	0.9987	0.3777	1.0037	0.6653
0.125	1.0040	0.7698	0.9971	0.3208	1.0024	0.5910
0.150	1.0012	0.7351	0.9945	0.2858	0.9991	0.5455
0.175	0.9983	0.7104	0.9914	0.2622	0.9957	0.5130
0.200	0.9955	0.6918	0.9883	0.2457	0.9924	0.4886
0.225	0.9927	0.6773	0.9852	0.2338	0.9891	0.4697
0.250	0.9899	0.6658	0.9820	0.2251	0.9858	0.4545
0.275	0.9870	0.6563	0.9789	0.2186	0.9825	0.4421
0.300	0.9805	0.6524	0.9751	0.2146	0.9756	0.4359
0.325	0.9742	0.6396	0.9710	0.2114	0.9678	0.4268
0.350	0.9678	0.6285	0.9662	0.2094	0.9597	0.4191
0.375	0.9612	0.6189	0.9609	0.2082	0.9516	0.4123
0.400	0.9544	0.6104	0.9557	0.2075	0.9433	0.4064
0.425	0.9475	0.6029	0.9505	0.2071	0.9350	0.4012
0.450	0.9404	0.5962	0.9453	0.2070	0.9267	0.3966
0.475	0.9332	0.5903	0.9401	0.2071	0.9182	0.3924
0.500	0.9259	0.5849	0.9350	0.2074	0.9098	0.3887
0.525	0.9185	0.5801	0.9299	0.2078	0.9012	0.3853
0.550	0.9110	0.5758	0.9248	0.2084	0.8927	0.3823
0.575	0.9010	0.5798	0.9193	0.2106	0.8817	0.3879
0.600	0.8874	0.5942	0.9133	0.2149	0.8673	0.4043
0.625	0.8737	0.6076	0.9072	0.2194	0.8525	0.4204
0.650	0.8599	0.6199	0.9009	0.2243	0.8372	0.4369
0.675	0.8461	0.6314	0.8944	0.2291	0.8218	0.4522
0.700	0.8323	0.6421	0.8860	0.2347	0.8065	0.4665
0.725	0.8183	0.6521	0.8776	0.2401	0.7911	0.4797
0.750	0.8044	0.6614	0.8692	0.2452	0.7756	0.4922
0.775	0.7903	0.6702	0.8609	0.2499	0.7602	0.5038
0.800	0.7763	0.6784	0.8526	0.2544	0.7447	0.5147
0.825	0.7622	0.6862	0.8443	0.2587	0.7292	0.5250
0.850	0.7495	0.6949	0.8364	0.2630	0.7152	0.5360
0.875	0.7479	0.7125	0.8304	0.2691	0.7118	0.5564
0.900	0.7463	0.7292	0.8244	0.2748	0.7085	0.5756
0.925	0.7446	0.7450	0.8185	0.2803	0.7052	0.5940
0.950	0.7429	0.7600	0.8132	0.2868	0.7036	0.6147
0.975	0.7412	0.7743	0.8079	0.2931	0.7019	0.6344
1.000	0.7395	0.7879	0.8027	0.2990	0.7003	0.6531

Tabla 2.2.3.2 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$\frac{\eta}{2\pi}$	$L/B = 2 \quad H/B = 3 \quad \beta_s'/\beta_s = 0.8 \quad D/B = 1/2$					
	$\frac{K_x^0}{GR} = 6.3783$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 6.4944$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.4853$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0042	1.7391	1.0016	1.5459	1.0043	3.0719
0.050	1.0050	1.0552	1.0010	0.8012	1.0047	1.6863
0.075	1.0059	0.8271	1.0000	0.5570	1.0051	1.2242
0.100	1.0068	0.7130	0.9989	0.4377	1.0055	0.9932
0.125	1.0064	0.6641	0.9974	0.3742	1.0048	0.8863
0.150	1.0047	0.6488	0.9951	0.3407	1.0033	0.8457
0.175	1.0030	0.6379	0.9922	0.3186	1.0017	0.8167
0.200	1.0012	0.6297	0.9893	0.3032	1.0002	0.7950
0.225	0.9995	0.6234	0.9863	0.2922	0.9987	0.7781
0.250	0.9977	0.6183	0.9833	0.2842	0.9972	0.7646
0.275	0.9960	0.6141	0.9803	0.2784	0.9957	0.7535
0.300	0.9935	0.6138	0.9772	0.2750	0.9934	0.7494
0.325	0.9927	0.6070	0.9741	0.2721	0.9918	0.7413
0.350	0.9917	0.6011	0.9704	0.2713	0.9902	0.7341
0.375	0.9905	0.5959	0.9661	0.2718	0.9884	0.7279
0.400	0.9891	0.5914	0.9619	0.2725	0.9865	0.7224
0.425	0.9875	0.5873	0.9577	0.2734	0.9846	0.7175
0.450	0.9858	0.5838	0.9535	0.2745	0.9826	0.7132
0.475	0.9840	0.5806	0.9494	0.2757	0.9805	0.7094
0.500	0.9820	0.5777	0.9453	0.2769	0.9784	0.7059
0.525	0.9799	0.5751	0.9412	0.2782	0.9762	0.7028
0.550	0.9777	0.5728	0.9372	0.2795	0.9740	0.7000
0.575	0.9756	0.5719	0.9332	0.2812	0.9718	0.6994
0.600	0.9735	0.5728	0.9293	0.2833	0.9697	0.7016
0.625	0.9713	0.5736	0.9254	0.2854	0.9679	0.7038
0.650	0.9690	0.5744	0.9218	0.2875	0.9662	0.7060
0.675	0.9667	0.5752	0.9180	0.2900	0.9646	0.7081
0.700	0.9643	0.5759	0.9133	0.2948	0.9629	0.7101
0.725	0.9619	0.5766	0.9087	0.2993	0.9612	0.7119
0.750	0.9594	0.5773	0.9041	0.3036	0.9595	0.7137
0.775	0.9568	0.5779	0.8995	0.3077	0.9578	0.7153
0.800	0.9542	0.5785	0.8950	0.3115	0.9560	0.7169
0.825	0.9516	0.5791	0.8905	0.3152	0.9542	0.7184
0.850	0.9491	0.5799	0.8861	0.3187	0.9526	0.7201
0.875	0.9482	0.5817	0.8819	0.3223	0.9525	0.7234
0.900	0.9473	0.5835	0.8778	0.3258	0.9524	0.7266
0.925	0.9463	0.5852	0.8738	0.3291	0.9523	0.7297
0.950	0.9453	0.5868	0.8701	0.3321	0.9533	0.7321
0.975	0.9443	0.5883	0.8665	0.3350	0.9543	0.7344
1.000	0.9433	0.5898	0.8629	0.3377	0.9553	0.7366

Tabla 2.2.2.1 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 5.6040$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 5.3131$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.3755$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.1932	1.0026	2.0552	1.0033	2.3970
0.050	1.0033	1.0969	1.0026	1.0279	1.0033	1.1988
0.075	1.0033	0.7313	1.0026	0.6853	1.0033	0.7993
0.100	1.0033	0.5485	1.0026	0.5140	1.0033	0.5995
0.125	1.0011	0.4599	1.0022	0.4155	1.0014	0.4995
0.150	0.9964	0.4197	1.0008	0.3546	0.9975	0.4521
0.175	0.9918	0.3910	0.9989	0.3113	0.9935	0.4183
0.200	0.9872	0.3695	0.9971	0.2788	0.9896	0.3929
0.225	0.9826	0.3527	0.9952	0.2535	0.9857	0.3732
0.250	0.9779	0.3393	0.9933	0.2333	0.9818	0.3574
0.275	0.9733	0.3284	0.9915	0.2167	0.9778	0.3445
0.300	0.9664	0.3291	0.9892	0.2049	0.9719	0.3430
0.325	0.9585	0.3336	0.9868	0.1959	0.9650	0.3459
0.350	0.9506	0.3374	0.9833	0.1893	0.9580	0.3486
0.375	0.9427	0.3407	0.9791	0.1841	0.9510	0.3510
0.400	0.9347	0.3436	0.9748	0.1797	0.9441	0.3531
0.425	0.9268	0.3462	0.9706	0.1757	0.9371	0.3549
0.450	0.9189	0.3484	0.9664	0.1722	0.9301	0.3565
0.475	0.9110	0.3505	0.9622	0.1691	0.9231	0.3580
0.500	0.9031	0.3523	0.9580	0.1662	0.9161	0.3593
0.525	0.8952	0.3539	0.9538	0.1637	0.9092	0.3605
0.550	0.8873	0.3555	0.9495	0.1614	0.9022	0.3616
0.575	0.8795	0.3617	0.9453	0.1602	0.8953	0.3671
0.600	0.8717	0.3741	0.9411	0.1605	0.8884	0.3784
0.625	0.8639	0.3854	0.9370	0.1610	0.8817	0.3896
0.650	0.8561	0.3959	0.9330	0.1621	0.8752	0.4012
0.675	0.8483	0.4057	0.9286	0.1637	0.8688	0.4119
0.700	0.8405	0.4147	0.9223	0.1682	0.8623	0.4219
0.725	0.8328	0.4231	0.9160	0.1724	0.8559	0.4312
0.750	0.8250	0.4310	0.9098	0.1763	0.8494	0.4399
0.775	0.8172	0.4383	0.9035	0.1799	0.8430	0.4480
0.800	0.8094	0.4452	0.8972	0.1834	0.8365	0.4556
0.825	0.8016	0.4516	0.8909	0.1866	0.8301	0.4628
0.850	0.7945	0.4582	0.8847	0.1897	0.8242	0.4700
0.875	0.7922	0.4681	0.8794	0.1934	0.8225	0.4802
0.900	0.7898	0.4774	0.8740	0.1969	0.8207	0.4898
0.925	0.7875	0.4863	0.8687	0.2002	0.8191	0.4990
0.950	0.7852	0.4946	0.8643	0.2038	0.8199	0.5086
0.975	0.7828	0.5026	0.8600	0.2071	0.8208	0.5177
1.000	0.7805	0.5101	0.8556	0.2103	0.8216	0.5264

Tabla 2.2.2.3 Rigideces estáticas y coeficientes de impedancia.

$L/B = 2 \quad H/B = 3 \quad \beta_s'/\beta_s = 0.6 \quad D/B = 1$

$\frac{\eta}{2\pi}$	$\frac{K_x^0}{GR} = 7.8331$		$\frac{K_r^0}{GR^3} = 7.7721$		$\frac{K_{xr}^0}{GR^2} = -2.3755$	
	k_x	c_x	k_r	c_r	k_{xr}	c_{xr}
0.025	1.0033	2.1916	1.0008	1.0321	1.0033	2.3970
0.050	1.0047	1.5774	0.9997	0.5630	1.0033	1.1988
0.075	1.0062	1.3726	0.9981	0.4135	1.0033	0.7993
0.100	1.0076	1.2701	0.9962	0.3435	1.0033	0.5995
0.125	1.0075	1.2238	0.9938	0.3082	1.0014	0.4995
0.150	1.0056	1.2064	0.9905	0.2908	0.9975	0.4521
0.175	1.0037	1.1940	0.9867	0.2809	0.9935	0.4183
0.200	1.0019	1.1846	0.9829	0.2754	0.9896	0.3929
0.225	1.0000	1.1774	0.9789	0.2727	0.9857	0.3732
0.250	0.9981	1.1716	0.9750	0.2719	0.9818	0.3574
0.275	0.9963	1.1668	0.9710	0.2724	0.9778	0.3445
0.300	0.9928	1.1699	0.9668	0.2751	0.9719	0.3430
0.325	0.9919	1.1553	0.9626	0.2777	0.9650	0.3459
0.350	0.9907	1.1424	0.9577	0.2813	0.9580	0.3486
0.375	0.9892	1.1311	0.9524	0.2855	0.9510	0.3510
0.400	0.9874	1.1212	0.9471	0.2897	0.9441	0.3531
0.425	0.9853	1.1124	0.9418	0.2939	0.9371	0.3549
0.450	0.9829	1.1046	0.9366	0.2980	0.9301	0.3565
0.475	0.9803	1.0976	0.9314	0.3020	0.9231	0.3580
0.500	0.9776	1.0914	0.9263	0.3059	0.9161	0.3593
0.525	0.9746	1.0857	0.9212	0.3097	0.9092	0.3605
0.550	0.9715	1.0807	0.9162	0.3135	0.9022	0.3616
0.575	0.9682	1.0796	0.9113	0.3177	0.8953	0.3671
0.600	0.9649	1.0834	0.9064	0.3227	0.8884	0.3784
0.625	0.9614	1.0870	0.9016	0.3277	0.8817	0.3896
0.650	0.9578	1.0903	0.8970	0.3328	0.8752	0.4012
0.675	0.9540	1.0934	0.8922	0.3381	0.8688	0.4119
0.700	0.9502	1.0964	0.8861	0.3451	0.8623	0.4219
0.725	0.9463	1.0993	0.8802	0.3518	0.8559	0.4312
0.750	0.9422	1.1020	0.8742	0.3581	0.8494	0.4399
0.775	0.9381	1.1045	0.8683	0.3641	0.8430	0.4480
0.800	0.9339	1.1070	0.8625	0.3698	0.8365	0.4556
0.825	0.9297	1.1094	0.8568	0.3752	0.8301	0.4628
0.850	0.9258	1.1121	0.8511	0.3805	0.8242	0.4700
0.875	0.9253	1.1172	0.8461	0.3859	0.8225	0.4802
0.900	0.9247	1.1222	0.8411	0.3911	0.8207	0.4898
0.925	0.9241	1.1269	0.8362	0.3961	0.8191	0.4990
0.950	0.9235	1.1314	0.8320	0.4011	0.8199	0.5086
0.975	0.9228	1.1358	0.8279	0.4059	0.8208	0.5177
1.000	0.9221	1.1399	0.8238	0.4105	0.8216	0.5264

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se hizo una reseña del desarrollo de las investigaciones relativas al problema dinámico de interacción suelo-estructura, con aplicación a cimentaciones para maquinaria; también se presentaron los fundamentos teóricos necesarios para el estudio de ese problema.

Para mostrar la forma de trabajo del programa DYNA3 se resolvió un problema extraído de la norma C. 2-26 de la C.F.E. para cimientos de equipo rotatorio, el cual también se resolvió manualmente encontrándose diferencias de resultados entre la solución manual y la computarizada.

El trabajo aquí presentado aporta el estudio del problema considerando al bloque de cimentación enterrado en un estrato homogéneo y éste a su vez sobre un semiespacio elástico.

Al hacer el estudio paramétrico, se observaron ciertas tendencias de comportamiento del sistema al variar los parámetros críticos del problema, como son:

1. Relación de largo entre semiancho de la cimentación, L/B , la cual se varió entre 1 y 3.
2. Relación de espesor del estrato entre semiancho de la cimentación, H/B , la cual se varió entre 2 y 4.
3. Relación de velocidad de ondas de cortante del estrato entre velocidad de ondas de cortante del semiespacio, β_s'/β_s , la cual se varió entre 0.3 y 0.8.
4. Relación profundidad de enterramiento entre semiancho de la cimentación, D/B , la cual se varió entre 0 y 1.

Debido a que el programa DYNA3 utiliza expresiones aproximadas en el cálculo de las constantes de rigidez y amortiguamiento, los resultados contenidos en las tablas de funciones de impedancia son también aproximados.

De los resultados obtenidos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La mayoría de las cimentaciones analizadas con DYNA3, estarían fuera de la norma de diseño vigente en nuestro país.
- Al incrementarse la relación L/B , la amplitud de las respuestas disminuyen en todos los casos; las frecuencias comienzan siendo mayores que la frecuencia de operación, para después disminuir acercándose a ésta.
- Al incrementarse la relación H/B , la amplitud de las respuestas disminuyen en todos los casos; las frecuencias comienzan siendo mayores que la frecuencia de operación, para después disminuir acercándose a ésta.
- Al incrementarse la relación β_s'/β_s , la amplitud de las respuestas disminuyen en todos los casos; las frecuencias comienzan siendo mayores que la frecuencia de operación, para después disminuir acercándose a ésta.

- Al incrementarse la relación D/B , la amplitud de las respuestas disminuyen en todos los casos. Con respecto a las frecuencias, en vibración vertical la frecuencia aumenta alejándose de la frecuencia de operación; en vibración horizontal y de cabeceo la frecuencia aumenta, rebasando incluso la frecuencia de operación.
- Las tablas de funciones de impedancia se pueden utilizar para calcular las constantes de rigidez y amortiguamiento de forma suficientemente aproximada.

Finalmente, con base en el estudio realizado es posible hacer las siguientes recomendaciones:

- Revisar y actualizar las normas de diseño para cimentaciones, debido a que los criterios de análisis y diseño contenidas en ésta han sido rebasados.
- No considerar como solución definitiva el hacer más larga la cimentación para disminuir la amplitud de respuesta, pues aunque esto sucede, puede ser riesgoso al acercarse la frecuencia crítica a la zona de resonancia.
- No suponer que si el estrato homogéneo es más profundo, el funcionamiento del sistema será mejor, ya que si bien la respuesta disminuye, la frecuencia crítica se acerca a la zona de resonancia.
- No asumir que la menor velocidad de propagación en el semiespacio produce un mejor funcionamiento del sistema, debido a la disminución de las respuestas, pues también la frecuencia crítica se acerca a la zona de resonancia.
- Considerar adecuado el aumento en la profundidad de enterramiento de la cimentación; con esto el funcionamiento del sistema mejora, al lograr una significativa disminución de las respuestas. Además, la frecuencia crítica aumenta alejándose de la zona de resonancia.
- Utilizar un método riguroso de elementos finitos para mejorar la precisión en el cálculo de las funciones de impedancia.

7. REFERENCIAS

1. **Arnold, R. N. Bycroft, G. N. y Warburton, G. B.** Forced vibrations of body on and infinite elastic solid. *J. Appl. Mech. ASME*, 22. pp 391,1955.
2. **Avilés, J.** Vibraciones de Cimentaciones para Maquinaria de Rotación *Instituto de Investigaciones Eléctricas*. Reporte N° IIE/42/2843/P01/90JAL, febrero 1990.
3. **Avilés, J. y Trueba, V.** Análisis de sistemas Maquinaria - Cimentación - Suelo para Equipo rotatorio: Aplicación a ventiladores de Tiro inducido. *Instituto de Investigaciones Eléctricas*. Reporte N° IIE/42/10072/P01/FJAL/VTL, julio 1995.
4. **Avilés, J. y Trueba, V.** Contornos de frecuencias críticas y sensibilidad para diseño de sistemas ventilador - cimentación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 12, 3, pp. 251-268. 1996.
5. **Awojobi, A. D. y Grootenhuis, P.** Vibration of Rigid Bodies on Elastic Media, *Proc. Royal Soc. Lond.*, A287, pp 27. 1965.
6. **Barkan, D. D.** *Dynamics of Bases and Foundations* , Mc. Graw Hill, 1962.

7. **Bycroft, G. N.** Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and an elastic stratum, *Phil. Trans. Royal Soc, Lond.*, A248, pp 327. 1956.
8. **Clough, R.W. y Penzien J.** *Dynamics of Structures*, Mc. Graw-Hill, Inc. Nueva York, 1975.
9. **Crandall, S. H.** *Engineering Analysis. A Survey of Numerical Procedures*, Mc. Graw-Hill, Inc. Nueva York. 1956.
10. **Chang-Liang, V.** Dynamic response of Structure in Layered Soils, *Ph. D. thesis, MIT*, 1974.
11. **Chen, H. M. y Malanoski, S. B.** Fan/foundations interactions, A simplified calculation procedure. *Journal of Engineering for Power.*, ASME, Vol. 103, pp. 805 - 810, 1981.
12. 'Diseño Estructural de Cimentaciones', *Manual de Diseño de Obras Civiles*, Capitulo C.2.2., C.F.E., 1993.
13. **El Sharnouby, H. y Novak, M.** Flexibility coefficients and interaction factors for pile group analysis, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 23, No. 4, pp. 441-450, 1986.
14. **Gash, R. Maurer, J. y Sarfeld, W.** The influence of the elastic half-space on stability and unbalance response of a simple rotor- bearing - foundation system, *IMechE*, C300/84, pp. 1-12, 1984.
15. **Gazetas, G.** Dynamic Stiffness Functions of Strip and Rectangular Footings on Layered Soil, *S.M. Thesis, MIT*, 1975.
16. **Gazetas, G. Roesset, J. M.** Vertical vibration of machine foundations, *J. Geotech. Div., ASCE*, 105, GT12, pp 1435. 1979.
17. **Gazetas, G.** 'Analysis of Machine Foundations Vibrations: state of art.' *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Vol. 2, N° 1, pp. 2-42, 1983.
18. **Hadjian, A. H. y Luco, J. E.** On the importance of Layering on Impedance Functions. *Proc. 6th WCEE*, New Delhi, 1977.
19. **Hsieh, T. K.** Foundation Vibrations. *Proc. Inst. Civil Engrs.*, 22, pp 211. 1962.
20. **Karashudi, P. Kerr L. M. y Lee, S. L.** Vibratory motion of a body on an elastic half plane, *J. Appl. Mech. ASME*. 35E, pp 697. 1968.
21. **Kausel, E.** Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media, *Research Rep. R743-11, MIT*, 1974.
22. **Kausel, E. Whitman, R. Morray, J. y Elsabee F.** The spring method for embedded foundations, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 48, pp 377-392, 1978.

23. Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philos. Trans. Soc. London, Ser. A* 203, pp 1-42, 1904.
24. Luco, J. E. Impedance functions for a rigid foundations on a layered medium, *Nuclear Engineering and Design.* 31, pp 204. 1974.
25. Luco, J. E. y Westman, R. A. Dynamic response of circular footings, *J. Engng. Struct. Dyn.*, 2, pp 87. 1973.
26. Luco, J. E. y Westman, R. A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic halfspace, *J. Appl. Mech. ASME.* 35E, pp 697. 1968.
27. Lysmer, J. Udaka, T. Seed, H. B. y Hawng, R. LUSH a Coputer Program for Complex response analysis of Soil-Structure Systems, *Report No. EERC 74-4, University of California, Berkeley*, 1974.
28. Lysmer, J. Vertical Motions of Rigid Footings, *Ph. D. thesis, University pof Michigan* , Ann Arbor, 1965.
29. Milo, F.G. y King, J. P. Minimize fan/foundation vibration. *Power*, mayo 1979. pp. 104-106, 1979.
30. 'Norma de Diseño C - 2.26 Para cimentaciones de equipo rotatorio', C.F.E., 1977.
31. Novak, M. Vibrations of Embedded Footings and Structures, *ASCE Natl. Struct. Engrg. Meet.*, Reprint 2029, 1973.
32. Novak, M. y col. DYNA3. A Computer Program for Calculations of Foundation. Response to Dynamics Loaded. User Manual. *Geotechnical Reserch Center. The University of Western Ontario.* Reporte GEOP 90-92, junio 1992.
33. Novak, M. y Aboul-Ella, F. Impedance functions for piles in layered media, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE*, 1978.
34. Prakash, S. y Puri, V. K. *Foundation for Machines: Analysis and Design.* Ed. John Wiley and Sons, 1988.
35. Quinlan, P. M. The Elastic Theory of Soils Dynamic, Symp. on Dyn. Test of Soils, *ASTM STP No. 156*, pp 3-34, 1953.
36. Reissner, E. Stationare, axialsymmetrische, durch eine schut-telnde Masse erregte Schiwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ing. Arch.*, pp 7-381, 1936.
37. Richart, F. E. Woods, R. D. y Hall, J. R. *Vibrations of soils and Foundations*, Prentice-Hall, 1970.

38. **Richart, F. E. y Whitman, R. V.** Comparison of footing vibration test with teory, *J, Soil Mech. Fdn. Engrg. Div.*, 1967.
39. **Richart, F. E., Woods R. D. y Hall, J. R.** *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice Hall, 1970.
40. **Sheta, M. y Novak, M.** Vertical vibrations of pile groups. *Journal of Geotechnical Engineering Div., ASCE*, Vol. 108, No. GT4, Abril, pp 570-590, 1982.
41. **Stephan, C. U.** Applications of modal Analysis to the design of a fan foundation system. *Sound and Vibration.*, diciembre, pp. 14 - 19. 1984.
42. **Sung, T. Y.** Vibration in Semi-infiniti Solid Due to Periodic Surface Loading, *Sc.D. thesis, Harvard University*, 1953.
43. **Tassoulas, J. L. y Kausel, E.** Elements for the numerical analysis for wave motions in layered strata. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 1005-1032, 1983.
44. **Veletsos, A. S. y Wei Y. T.** Lateral and rocking vibrations of footings, *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 9. SM9, pp 1227. 1971.
45. **Walters, D. B. y Kirby, J. B.** Design of a fan foundations. *Journal of the Energy Division, ASCE*, Vol. 108, N° EY1, pp. 23 - 36. 1983.
46. **Whitman, R. V.** Soil-plattaform Interaction. *Proc. Conf. on Behav. of Offshore Struc.*, NGL, Oslo, 1, pp 817. 1976.