UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL ESTADO DE PUEBLA

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
(Aplicado al análisis estructural)

Trabajo de investigación
que para obtener el Título de

INGENIERO CIVIL

Presentan :

Luis Daniel Bravo Tomás
Carlos Huitzil Huitzil

Puebla, Pue. México Marzo de 1998

UPAEP – Secretaría General
Dirección General de Apoyos Académicos
Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.
Biblioteca Central - **Karol Wojtyla**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UPAEP
aniversario

Puebla de los Angeles, 30 de marzo de 1998

Ing. Mario Jiménez Suárez
Director de la Facultad de Ingeniería Civil
U. P. A. E. P.
Presente

Estimado ingeniero:

Por medio de la presente me es grato informar a usted que los Srs. **Luis Daniel Bravo Tomás** y **Carlos Huitzil Huitzil** han concluido satisfactoriamente su trabajo de investigación denominado "**Método del Elemento Finito (Aplicado al análisis estructural)**", cubriendo los objetivos planteados al inicio del mismo.

Sin otro particular quedo a sus apreciables órdenes.

A T E N T A M E N T E

Ing. Gerardo de Jesús López Arciga
Facultad de Ingeniería Civil

INDICE

ÍNDICE 1
INTRODUCCIÓN 3
1. FUNDAMENTOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO 6
1.1 Introducción 6
1.2 Conceptos de mecánica del medio continuo 7
1.3 Conceptos de mecánica estructural 12
1.3.1 Teorema de Betti 12
1.3.2 Teorema de Maxwell 12
1.3.3 Teoremas de Castigliano 12
1.3.4 Principio del Trabajo Virtual 13
1.4 Métodos aproximados para la solución de sistemas de las ecuaciones de equilibrio 13
1.4.1 Método directo 13
1.4.2 Método de variacional 13
1.4.3 Método de los residuos pesados 14
1.4.4 Método de Rayleig-Ritz 18
1.5 Conceptos numéricos de las ecuaciones del MEF 19
1.5.1 Fundamentos matemáticos 19
1.5.2 Cuadratura de Gauss-Legendre 22
1.5.3 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 23
1.5.4 Criterios de convergencia y estabilidad 24
2. FUNCIONES DE FORMA 25
2.1 Introducción 25
2.2 Elementos finitos unidimensionales 26
2.2.1 Elemento unidimensional 26
2.2.1.1 Coordenadas cartesianas 27
2.2.1.2 Coordenadas normalizadas 28
2.2.2 Elemento barra 30
2.3 Elementos finitos bidimensionales 30
2.3.1 Elemento viga 31

2.3.2 Elemento triangular 35
2.3.2.1 Coordenadas cartesianas 35
2.3.2.2 Coordenadas naturales 37
2.3.3 Elemento cuadrilátero general 38
2.3.4 Elementos isoparamétricos 40
3. APLICACIONES 46
4. MANUAL DEL PROGRAMA 86
CONCLUSIONES 90
REFERENCIAS 91

INTRODUCCIÓN

Durante el estudio de los conceptos de análisis estructural se presentan diversas metodologías para entender el comportamiento de las estructuras. Sin embargo los métodos tienden, hoy en día, a ser más complejos debido tanto al avance en su estudio como al apoyo que reciben de software aplicado.

Uno de los métodos que mayor aproximación tiene al comportamiento real de una estructura es el Método del Elemento Finito (MEF). Sin embargo, en México los ingenieros estructuristas se han encontrado con una serie de problemas en el empleo eficiente del software que utiliza dicho método, debido a que no han tenido la preparación básica en el conocimiento del mismo.

Actualmente el MEF ha tenido un gran desarrollo debido a que con una discretización adecuada permite resolver casos de continuos heterogéneos, para ello se pueden variar tanto la forma como la dimensión de los elementos que se adapten a contornos arbitrarios.

En general el MEF tiene aplicación en los siguientes campos :

- Análisis Estructural
- Mecánica de Suelos
- Mecánica de Rocas

- Dinámica Estructural
- Dinámica de Suelos
- Flujo de Agua en Medios Porosos
- Torsión
- Vibraciones Mecánicas
- Mecánica de Fluidos
- Termoelasticidad
- Hidroelasticidad
- Elasticidad
- Vibración en Piezas Eléctricas
- Conducción de Calor
- Viscoelasticidad
- Dinámica de Gases

Debido a que el presente trabajo está enfocado a ingeniería estructural, se mencionan las aplicaciones del MEF en este campo :

- Estructuras Esqueletales (Plana y Tridimensional)
- Estructuras Muro-Marco
- Armaduras (Plana y Tridimensional)
- Estructura por Subestructuras
- Placas
- Cascarones
- Retícula
- Estados Planos
- Estado de Esfuerzos Tridimensional (Estático, Dinámico, Lineal, No Lineal)

El trabajo está enfocado hacia estados planos de esfuerzos, en el capítulo 1 se plantean los conceptos básicos necesarios para el aprendizaje del MEF.

En el capítulo 2 se plantean las funciones de forma de los elementos finitos, éstas definen la geometría del elemento y de acuerdo a ella su aportación a la estructura.

En el capítulo 3 se ha desarrollado un ejemplo, con el cual se presenta una secuencia para definir las ecuaciones de equilibrio de acuerdo al elemento finito seleccionado

En el capítulo 4 se explica brevemente el programa de aplicación, desarrollado para este trabajo, y sus alcances

El objetivo de este trabajo es desarrollar una referencia para que a nivel licenciatura se adquieran las bases fundamentales del MEF presentando una guía de aprendizaje del mismo, con el fin de obtener la habilidad de realizar una discretización óptima y una interpretación de los resultados obtenidos en el empleo de algún software

1. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

1.1 Introducción.

El Método del Elemento Finito (MEF) es un método matemático para resolver ecuaciones diferenciales de problemas ingenieriles y de física-matemática, cuyos resultados que proporciona al modelo matemático son muy precisos

Desde 1850 las bases matemáticas del MEF estaban prácticamente establecidas, pero no fue sino hasta 1920 cuando se aplicó en la solución de armaduras

En 1932, Hardy Cross introdujo el método de distribución de momentos y en 1960 R W Clough introdujo el término "Elemento Finito" A partir de esta fecha y junto al desarrollo de las computadoras su campo de aplicación creció, apareciendo una serie de programas tales como SAP (Structural Analysis Program), NASTRAN (Nasa Structural Analysis), STRUDL (Structural Design Language), ADINA (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis), entre otros.

De una manera sencilla, la secuencia del MEF es la siguiente

1.- El medio continuo se divide en varias regiones, denominadas elementos finitos, cuya forma será la más conveniente.

2.- Todos los elementos en que se dividió el continuo están interconectados por medio de puntos llamados puntos nodales, situados en sus fronteras y definidos por un sistema de coordenadas establecido Los desplazamientos de éstos puntos son los parámetros básicos del problema

3 - Se emplean métodos matemáticos que definen el estado de deformación a partir de las funciones de desplazamientos

4 - Se sustituyen las condiciones de carga y frontera del problema en las funciones de desplazamiento, para obtener un sistema de ecuaciones

5 - Al obtener los valores del sistema de ecuaciones, se sustituyen en el correspondiente a cada elemento finito para así obtener su comportamiento global

La finalidad de este capítulo es dar a conocer los conceptos básicos involucrados en el MEF

1.2 Conceptos de Mecánica del Medio Continuo.

Una estructura queda bien definida cuando se conoce su geometría, el material con que está hecha y las solicitaciones que en ella actúan, debido a estos tres conceptos la estructura presenta un comportamiento que es expresado por una modelación matemática

Las consideraciones en este inciso, para las estructuras, son que están construidas con un material sólido, elástico, lineal e isótropo, gobernadas por las leyes de la teoría de la elasticidad lineal a saber

a) Primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento

Estas ecuaciones indican la existencia de equilibrio debido a las fuerzas internas y externas que actúan en un continuo y escritas en notación indicial son:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \qquad (1\ 1)$$

donde los elementos del tensor de esfuerzos ($\underline{\sigma}$), del vector de fuerzas de cuerpo por unidad de masa ($\underline{f}$) y del vector aceleración ($\underline{a}$) son

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma(x_i, t) \tag{1.2}$$

$$(f_i) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = f(x_i, t) \tag{1.3}$$

$$(a_i) = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right)^T = a(x_i, t) \tag{1 4}$$

b) Tensor de deformaciones

Este arreglo indica el cambio geométrico del cuerpo y expresado en notación indicial es·

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i\,j} + u_{j\,i}) \tag{1 5}$$

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = e(x_i, t) \tag{1 6}$$

c) Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas representan la relación existente entre esfuerzos y deformaciones tomando en cuenta las propiedades mecánicas del material Son también conocidas como Ley de Hooke Generalizada

En notación indicial se escriben de la siguiente manera

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{mm} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} \tag{1 7}$$

o bien

$$e_{kl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{mm} \delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{kl} \tag{1 8}$$

donde λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y δ es la delta de Kronecker Las constantes de Lamé están en función de los módulos de Young o de Elasticidad (E) y la relación de Poisson (υ) mediante las siguientes expresiones.

$$\lambda = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \tag{1 9}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{1 10}$$

donde a G se le denomina módulo de rigidez al cortante.

d) Ecuaciones de campo.

Son las ecuaciones de movimiento o equilibrio dinámico expresadas en función de los componentes del vector de desplazamiento. Llamadas también *Ecuaciones de Campo de Navier*, que escritas en notación indicial son·

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_k}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l^2}+\rho f_k=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \qquad (1\ 11)$$

Como se mencionó anteriormente, la geometría del continuo influye en la forma de las ecuaciones de equilibrio. Considerando la geometría en un plano, el problema matemático se vuelve bidimensional, a esta modelación estructural se le denomina Estado Plano

Para poder definir una estructura como un Estado Plano debe cumplir alguna de las siguientes características

1)Su geometría corresponde a un cuerpo prismático alargado, definiendo así la sección correspondiente a un plano perpendicular al eje, en un Estado Plano de Deformaciones

2)Las cargas que actúan a lo largo del eje son tales que basta con definirlas, también, en un plano perpendicular al eje, en un Estado Plano de Esfuerzos

De acuerdo con lo anterior, la estructura se define en un plano de espesor unitario, originando que las ecuaciones de equilibrio sean independientes de la variable que define el concepto tridimensional, por lo que los desplazamientos son

$$u=u(x,y,t) \qquad (1\ 12a)$$

$$v=v(x,y,t) \qquad (1\ 12b)$$

$$w=0 \qquad (1\ 12c)$$

Estas ecuaciones simplifican todos los arreglos matemáticos descritos anteriormente en el Estado Plano de Esfuerzos

El tensor de deformaciones obtiene la siguiente forma.

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1.13a)$$

$$e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1\ 13b)$$

$$\gamma_{xy}=2e_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.13c)$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{1.13d}$$

Las ecuaciones constitutivas escritas en forma matricial, en el Estado Plano de Deformación, resultan ser·

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{pmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\upsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{1 14}$$

Las *ecuaciones de Cauchy del Movimiento* resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1 15a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1 15b}$$

Y por último, las ecuaciones de campo son

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\upsilon} G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1 16a}$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1-2\upsilon} G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1 16b}$$

Si las estructuras en vez de ser alargadas, son extraordinariamente delgadas para el Estado Plano de Esfuerzo los componentes del tensor de esfuerzos son

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \tag{1 17}$$

Al sustituir estos valores, las ecuaciones de deformación resultan ser

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \upsilon \sigma_{yy}\right) \tag{1 18a}$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \upsilon \sigma_{xx}\right) \tag{1 18b}$$

$$\gamma_{xy} = 2 e_{xy} = \frac{2(1+\upsilon)}{E} \sigma_{xy} \tag{1 18c}$$

$$e_{zz} = \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(e_{xx} + e_{yy}\right) \tag{1 18d}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0 \tag{1 18e}$$

Resumiendo las ecuaciones de equilibrio para este estado plano, el tensor de deformaciones es·

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1 19a}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1 19b}$$

$$\gamma_{xy} = 2\, e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.19c}$$

$$e_{zz} = \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(e_{xx} + e_{yy}\right) \tag{1 19d}$$

Las ecuaciones constitutivas, para el Estado Plano de Esfuerzos, expresadas en forma matricial se transforman en

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\upsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{1 20}$$

Las ecuaciones del movimiento de Cauchy son

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1 21a}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1 21b}$$

Por último las ecuaciones de campo resultan ser

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1+\upsilon}{1\ \ \upsilon} G \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1 22a}$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1+\upsilon}{1\ \ \upsilon} G \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1 22b}$$

Si se tiene resuelto el estado plano de esfuerzos se puede encontrar la solución al estado plano de deformaciones realizando el espesor unitario y efectuando la transformación

$$E = \frac{E}{1-\upsilon^2} \tag{1 23a}$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \tag{1 23b}$$

1.3 Conceptos de mecánica estructural.

Para análisis de estructuras es necesario tener el conocimiento de los fundamentos que aproximan el comportamiento de dichas estructuras, mediante idealizaciones, comprobadas experimentalmente, las cuales se describen a continuación.

1.3.1 Teorema de Betti.

El trabajo de las fuerzas de un sistema debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce otro sistema de cargas es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sistema debido a la aplicación del primer sistema de fuerzas.

1.3.2 Teorema de Maxwell.

El desplazamiento de un punto 1 en la dirección AB cuando en el punto 2 actúa una fuerza P en la dirección CD es igual al desplazamiento del punto 2 en la dirección CD cuando en le punto 1 actúa una fuerza P en la dirección AB (Fig. 1.1)

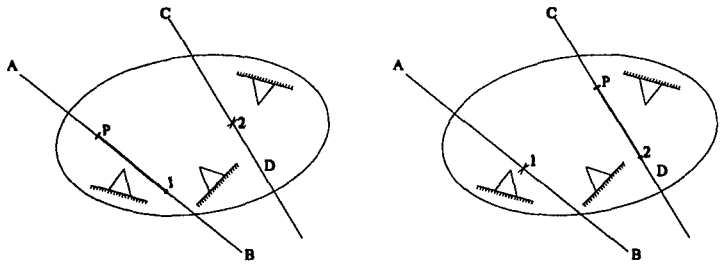

Fig. 1 1 Diagramas de Cuerpo para el Teorema de Maxwell.

1.3.3 Teoremas de Castigliano.

1.-La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a una fuerza que obra en un cuerpo es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y en la dirección de dicha fuerza.

$$\frac{\partial w}{\partial p_i} = \delta_i \qquad (1.24)$$

2.-La derivada parcial del trabajo de deformación con respecto a un momento aplicado en un punto es igual al giro del punto de aplicación del momento y en la dirección de dicho momento.

$$\frac{\partial w}{\partial m} = \theta \tag{1.25}$$

1 3 4 Principio del Trabajo Virtual

La palabra virtual indica que la acción que produce el desplazamiento es independiente del sistema de fuerzas original y se llama trabajo virtual al realizado por el sistema de fuerzas original durante el desplazamiento virtual

La ley del trabajo virtual establece que si un cuerpo deformable está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas y permanece en equilibrio al someter al cuerpo a un pequeño desplazamiento virtual, el trabajo virtual exterior realizado por el sistema de fuerzas externas actuando sobre el cuerpo es igual al trabajo de deformación virtual interno realizado por las fuerzas internas

1.4 Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio.

Existe una amplia variedad de métodos para resolver las ecuaciones de equilibrio, sin embargo, se debe elegir aquel que sea estable y convergente para llegar de forma rápida a la solución

La matriz del elemento tiene diferentes nombres dependiendo del área de aplicación En mecánica estructural se denomina matriz de rigideces y, en general, relaciona desplazamientos nodales con fuerzas nodales En conducción de calor se llama matriz de conductividad y relaciona temperaturas nodales con flujos nodales Existen tres formas para derivar dicha matriz

1 4.1 Método directo

Se basa en razonamientos físicos

1 4 2 Método variacional.

Es aplicable a problemas que se pueden plantear mediante expresiones integrales, como es el caso de las expresiones para la energía potencial

1.4.3 Método de los residuos pesados.

Es particularmente útil cuando se conocen las ecuaciones diferenciales que modelan el problema físico pero no se cuenta con información de aspectos variacionales.

Modelo Discreto Tipo.

En el análisis de las estructuras esqueletales (armaduras, marcos, etc.) se establecen las ecuaciones de equilibrio con base en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de cada una de las barras que las forman. Lo mismo sucede con otros sistemas, no necesariamente estructurales, en donde se puede efectuar una discretización a priori.

En los medios continuos, generalmente, es muy difícil asociarles, a primera vista, un modelo discreto para su representación racional y, por tanto para establecer sus ecuaciones. La forma de realizarlo se indica continuación, con ayuda de la figura 1.2:

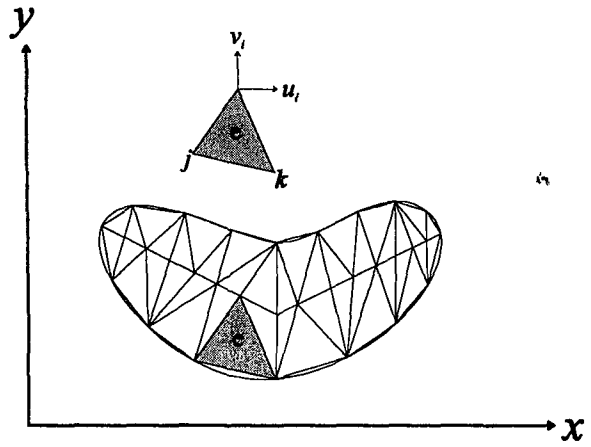

Fig. 1.2 Medio Continuo Dividido en Elementos Finitos

a) El medio continuo se divide en un número finito de regiones, de formas apropiadas, mediante líneas o superficies. A estas regiones se les denominan elementos finitos (de forma triangular en la figura 1.2).

b) Los elementos finitos se supone que están interconectados en un número finito de puntos nodales, situados sobre las fronteras de los elementos. Los desplazamientos de los puntos nodales son las incógnitas básicas del problema.

c) Se define, en forma única, el campo de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito, en función de los desplazamientos en los puntos nodales (interpolación).

d) Con el campo de desplazamientos conocido se pueden definir, también en forma única, los campos de deformaciones y de esfuerzos en función de los desplazamientos de los puntos nodales.

e) Se determina el sistema de fuerzas concentradas en los puntos nodales, que equilibre los esfuerzos en las fronteras y cualquier fuerza concentrada o distribuida que actúe en los puntos del elemento Estas fuerzas equilibrantes también resultan en función de los desplazamientos en los puntos nodales, y su relación conduce al concepto de matriz de rigideces

A fin de ejemplificar el procedimiento para establecer las ecuaciones de equilibrio del modelo discreto tipo de los medios continuos (elemento finito) se hace referencia a la figura 1 2, que corresponde a un estado plano de esfuerzos

De acuerdo con el inciso a), en la figura 1 2 se muestra la región de la estructura, la división en regiones triangulares y la definición de los puntos nodales Desde luego que la geometría de los elementos finitos no es única, ni tampoco la definición de los puntos nodales

La formulación del elemento finito, a diferencia de los métodos de las funciones de prueba tradicionales, aproxima la solución de cada una de las regiones correspondientes a los elementos finitos Entonces, la aproximación en la región global de la estructura es seccionalmente continua Desde luego que esta aproximación debe proporcionar desplazamientos compatibles en las fronteras con los elementos vecinos

En la figura 1 2 el elemento finito, *e*, representa a cualquier elemento en que se dividió la región A él le corresponden los conceptos siguientes

Los componentes del vector desplazamiento asociados a cualquier punto del elemento son dos, u=u(x,y,t) paralelo al eje X y v=v(x,y,t) paralelo al eje Y La representación vectorial es

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{u}(x, y, t) \qquad (1\ 26)$$

De acuerdo con el inciso b), los puntos nodales del elemento finito se etiquetan con las letras i, j, k (en sentido contrario a las manecillas del reloj) que pueden representar a cualquier dígito entero con los que se numeran los puntos nodales de la estructura

Entonces, los vectores de desplazamiento de los puntos nodales son.

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \underline{u}_i(t);\ \underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \underline{u}_j(t);\ \underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \underline{u}_k(t) \tag{1.27}$$

Con estas ecuaciones se puede formar un solo vector denominado vector de desplazamientos nodales del elemento, indicado a continuación

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \underline{u}^e(t) \tag{1 28}$$

Así mismo, para el elemento triangular de la figura las ecuaciones correspondientes serían

$$\tilde{u} = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k = \tilde{u}(x, y, t) \tag{1.29}$$

$$\tilde{v} = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k = \tilde{v}(x, y, t) \tag{1.30}$$

donde las funciones $N_i=N_i(x,y)$, $N_j=N_j(x,y)$ y $N_k=N_k(x,y)$ reciben el nombre de funciones de forma En el capítulo dos se presentan las expresiones correspondientes a varias geometrías de elementos finitos

Las ecuaciones, del elemento triangular, anteriores se pueden escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \tag{1 31}$$

$$\tilde{\underline{u}} = [\underline{N}_i, \underline{N}_j, \underline{N}_k] \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \end{bmatrix} = \underline{N}\underline{u}^e \tag{1 32}$$

donde

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \underline{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix}, \underline{N}_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{1 33}$$

$$\underline{N}=[\underline{N}_i,\underline{N}_j,\underline{N}_k]=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

El tensor de deformaciones del elemento es

$$\underline{e}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\underline{Lu} \tag{1 35}$$

Al sustituir la ec 1 32 en la ec 1 35 obtenemos

$$\underline{e}=\underline{LNu^e}=\underline{Bu^e} \tag{1 36}$$

en donde, $\underline{B}$ es la matriz de deformaciones, que escrita en forma explícita para el elemento en cuestión es

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1 37}$$

Conociendo la matriz de constantes elásticas, que se obtiene a partir de las propiedades del material del elemento

$$D=\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\upsilon) \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

podemos conocer la matriz de rigideces del elemento en cuestión mediante la siguiente ecuación

$$\underline{K^e}=\int_{\Omega^e}\underline{B}^T\,\underline{DB}d\Omega \tag{1 39}$$

1.4.4 Método de Rayleigh-Ritz.

Es un procedimiento aproximado por medio del cual un sistema continuo se transforma en un sistema discreto

En el método se aproximan las componentes de desplazamiento u, v y w mediante funciones que contienen un número finito de parámetros independientes. La determinación de los parámetros se lleva a cabo considerando que la energía potencial total es mínima para las aproximaciones de los desplazamientos

Características del método.

1 - En general, la precisión del desplazamiento considerado se incrementa cuando se aumenta el número de parámetros que se usan

2 - Los esfuerzos calculados mediante los desplazamientos aproximados pueden diferir substancialmente de sus valores exactos

3 - El equilibrio se satisface mediante la minimización de energía potencial total y no a través de las ecuaciones diferenciales de equilibrio debido a la inexactitud en el valor de los esfuerzos

4 - El método generalmente sobre estima el valor de la rigidez de una estructura

En problemas de elasticidad, la energía potencial total no sólo es estacionaria, sino también mínima Así pues, el método de los elementos finitos busca dicho mínimo con la condición de que satisfaga una determinada configuración de desplazamientos

A mayor número de grados de libertad, la solución aproximada tenderá a la solución exacta, lo cual asegura el equilibrio completo, siempre y cuando los desplazamientos tiendan en el límite, hacia los desplazamientos verdaderos

Es interesante notar que, si bien el equilibrio verdadero requiere que la energía potencial total P sea mínima, una solución aproximada mediante el MEF proporciona siempre una energía aproximada P mayor que la correcta, por lo que, siempre se obtiene una cota superior en el valor de la energía potencial total.

1.5 Conceptos Numéricos de las Ecuaciones del MEF.

1.5.1 Fundamentos Matemáticos.

Una ventaja del MEF, es la relativa facilidad con la que se manejan las condiciones de frontera del problema, ya que contienen derivadas y, en general, la frontera de la región tiene una forma irregular

El MEF incluye las condiciones de frontera como integrales en un funcional que se debe minimizar

Considérese la ecuación diferencial parcial·

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+r(x,y)u(x,y)=f(x,y) \qquad (1\ 40)$$

con (x,y) $\in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es una región plana con frontera L

Las condiciones de frontera que se imponen son de la forma

$$u(x,y)=g(x,y) \qquad (1\ 41)$$

en una porción L_1 de la frontera En la parte restante de la frontera L_2, se requiere que u(x,y) satisfaga

$$p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta_1+q\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta_2+g_1(x,y)u(x,y)=g_2(x,y) \qquad (1\ 42)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos direccionales de la normal de la frontera que apunta hacia afuera en el punto (x,y) (Fig 1 3)

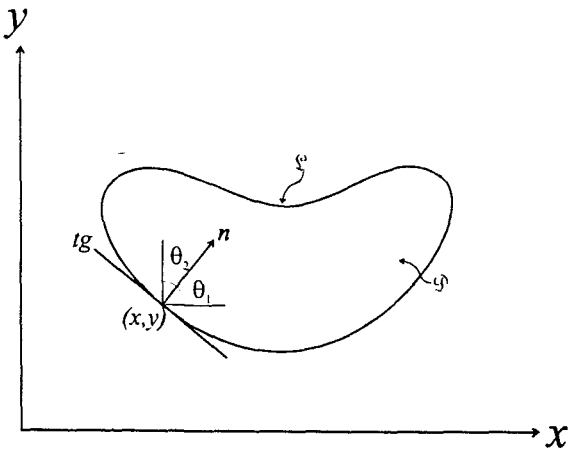

FIGURA 1 3 Región plana

Supóngase que p, q, r y f son funciones continuas en $\mathcal{D}$ U L , que las primeras parciales de p y q son continuas y que g_1 y g_2 son continuas en L_2, además que

$p(x,y)>0$, $q(x,y)>0$, $r(x,y)\leq 0$ y $g_1(x,y)>0$, entonces la solución de la ecuación diferencial parcial minimiza de manera única el funcional.

$$I(w)=\iint_D\left(\frac{1}{2}\left(p(x,y)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+q(x,y)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-r(x,y)w^2\right)+f(x,y)w\right)dxdy+$$

$$+\int_{L_1}\left\{-g_2(x,y)w+\frac{1}{2}g_1(x,y)w^2\right\}dS \qquad (1\ 43)$$

Sobre todas las funciones w que satisfagan las condiciones de frontera en L_1 y que sean continuamente diferenciables dos veces

El primer paso en el procedimiento consiste en dividir la región en un número finito de secciones o elementos, de forma regular, ya sean rectángulos o, más común y simplemente triángulos (Fig 1 4)

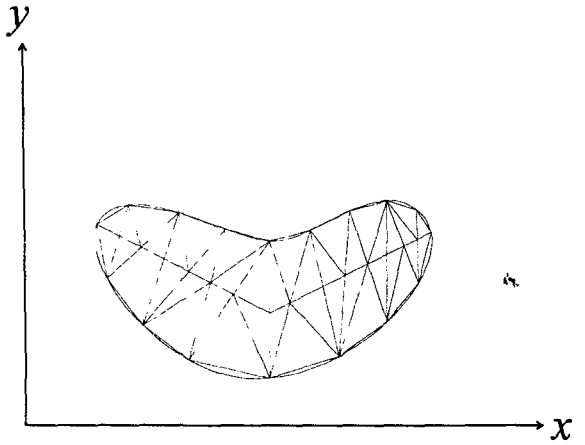

FIGURA 1 4 Región plana dividida en elementos finitos triangulares

El conjunto de funciones usadas para la aproximación es generalmente el conjunto de polinomios segmentarios de grado fijo en x e y, y la aproximación requiere que los polinomios se unan de tal manera que la función resultante sea continua con primeras o segundas derivadas continuas o integrables en la región entera

Los polinomios empleados comúnmente con elementos triangulares son de tipo lineal en x e y son

$$\phi(x,y)=a+bx+cy \qquad (1\ 44)$$

y los polinomios de tipo bilineal en x e y que se usan con elementos rectangulares siendo de la forma

$$\phi(x,y)=a+bx+cy+dxy \qquad (1\ 45)$$

Para los fines de esta discusión, supóngase que la región $\mathcal{D}$ ha sido subdivida en elementos triangulares. El conjunto de triángulos se denota por $\mathcal{D}$ y los vértices se llaman nodos

El MEF busca una aproximación de la forma

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i(x,y) \tag{1 46}$$

donde f_i son polinomios particulares de primer grado, linealmente independientes y g_i son constantes, algunas de estas se emplean para asegurar que se satisfaga la condición de frontera $f(x,y)=g(x,y)$ en L_1 y el resto para minimizar el funcional.

$$I[\phi]=I\left[\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i\right]=\iint_D\left(\frac{1}{2}\left\{p(x,y)\left[\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x,y)\right]^2+q(x,y)\left[\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\frac{\partial\phi_i}{\partial y}(x,y)\right]^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.-r(x,y)\left[\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i(x,y)\right]^2\right\}+f(x,y)\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i(x,y)\right)dydx+\int_{L_2}\left\{-g_2(x,y)\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i(x,y)+\right. \tag{1 47}$$

$$\left.+\frac{1}{2}g_1(x,y)\left[\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\phi_i(x,y)\right]^2\right\}dS$$

Para que ocurra un mínimo $\frac{\partial I}{\partial\gamma_j}=0$ para cada j=1,2, ,n

Así que diferenciando el funcional e igualando a cero se obtiene

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\iint_D\left\{p(x,y)\frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x,y)\frac{\partial\phi_j}{\partial x}(x,y)+q(x,y)\frac{\partial\phi_i}{\partial y}(x,y)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}(x,y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.-r(x,y)\phi_i(x,y)\phi_j(x,y)\right\}dxdy+\int_{L_2}g_1(x,y)\phi_i(x,y)\phi_j(x,y)dS\right]\gamma_i+ \tag{1 48}$$

$$+\iint_D f(x,y)\phi_j(x,y)dxdy-\int_{L_2}g_1(x,y)\phi_j(x,y)dS=0$$

para cada j=1,2, ,n

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse como un sistema lineal.

$$Ac=b \tag{1 49}$$

Donde $A=(a_{ij})$, $c=(g_1, g_2, \ldots, g_n)^T$ y $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ se definen como·

$$\alpha_{ij}=\iint_D\left\{p(x,y)\frac{\partial\phi_i}{\partial x}(x,y)\frac{\partial\phi_j}{\partial x}(x,y)+q(x,y)\frac{\partial\phi_i}{\partial y}(x,y)\frac{\partial\phi_j}{\partial y}(x,y)+\right.$$

$$\left.-r(x,y)\phi_i(x,y)\phi_j(x,y)\right\}dxdy+\int_{L_2}g_1(x,y)\phi_i(x,y)\phi_j(x,y)ds \tag{1 50}$$

para cada i=1,2,. ,n, j=1,2,.. ,m y,

$$\beta_i = -\iint_D f(x,y)\phi_i(x,y)dxdy + \int_{L_2} g_2(x,y)\phi_i(x,y)ds - \sum_{k=n+i}^{m} \alpha_{ik}\gamma_k \qquad (1.51)$$

para cada i=1,2,...,n.

1.5 2 Cuadratura de Gauss-Legendre

La evaluación de integrales numéricas, en muchas ocasiones se torna una tarea un tanto tediosa, debido a la necesidad del empleo de álgebra y/o artificios de integración además del uso de aritmética para encontrar el área deseada bajo una curva cualquiera *f(x)*

Para ello se cuenta con métodos aproximados que dividen la región, de la cuál se desea conocer el área, en partes iguales dependiendo de la variación funcional

Cuanto mayor sea la variación funcional se requerirá de un mayor número de divisiones, lo que nos lleva a un gran número de operaciones

En cambio los métodos de cuadratura sólo requieren de una constante conocida como peso (H_i) y la evaluación de la función en puntos llamados abscisas (a_i) Las abscisas y los pesos deben ser escogidos tomando en cuenta la variación de la función

Particularmente la cuadratura de Gauss-Legendre escoge los puntos de una forma uniforme tomando en cuenta la variación funcional para adquirir una buena aproximación, para ello se deben hacer las siguientes transformaciones

$$x = \frac{\xi(b-a)+a+b}{2} \qquad (1\ 52)$$

$$dx = \frac{b-a}{2}d\xi \qquad (1.53)$$

con lo cual obtenemos la siguiente forma de integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \qquad (1\ 54)$$

donde

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i f(a_i) \qquad (1\ 55)$$

En el caso de integrar en una región las transformaciones necesarias para la cuadratura son las siguientes

$$x = \frac{\xi(b-a)+a+b}{2} \qquad (1\ 56)$$

$$dx = \frac{b-a}{2} d\xi \tag{1.57}$$

$$y = \frac{\eta(d-c)+c+d}{2} \tag{1.58}$$

$$dy = \frac{d-c}{2} d\eta \tag{1 59}$$

con lo cual obtenemos la siguiente forma de integral doble

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\eta d\xi \tag{1 60}$$

donde

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\eta d\xi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H_i H_j f(a_i, a_j) \tag{1 61}$$

1 5 3 Métodos de Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, no todos son eficientes para casos especiales Dentro del álgebra lineal se pueden encontrar métodos directos e iterativos, éstos dada la cantidad de operaciones a realizar son, hoy día, obsoletos

Los métodos más usados dada su versatilidad son los directos (Eliminación Gaussiana Clásica, Gauss, Crout, Gauss-Crout, Cholesky, modificados y eficientes, etc), la eliminación gaussiana prácticamente está en desuso

La forma general de representar un sistema de ecuaciones es

$$Ax = b \tag{1 62}$$

donde

A es la matriz de coeficientes

b es el vector de términos independientes

x es el vector de variables

En su mayoría los métodos realizan las siguientes transformaciones.

$$A = LU \tag{1 63}$$

donde

L y U son matrices triangulares, una superior y la otra inferior, siendo alguna de ellas normalizada (dependiendo del método)

1.5.4 Criterios de Convergencia y Estabilidad.

Las funciones de forma reducen los infinitos grados de libertad del sistema.

Para asegurar la convergencia hacia el resultado correcto han de cumplirse determinadas condiciones.

En primer lugar debe ponerse especial cuidado cuando se escojan las funciones de desplazamiento ya que éstas deben ser capaces de representar la distribución real de los desplazamientos tan aproximadamente como sea posible.

Criterio 1.- Toda función de desplazamientos debe elegirse de tal forma que no permita deformaciones de un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido

Por otro lado, a medida que los elementos se hagan más pequeños tanto más prevalecerán en ellos condiciones de deformación constante. Si de hecho existen dichas condiciones, será pues conveniente escoger el tamaño de los elementos que las reproduzcan exactamente, para conseguir un buen grado de aproximación

Criterio 2 - Toda función de desplazamientos tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante, se obtenga realmente dicho estado de deformación constante.

Finalmente, la continuidad de los desplazamientos entre los elementos debe tenerse presente

Criterio 3 - Las funciones de desplazamiento deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas

La elección particular de las funciones de base es muy importante debido a que una elección apropiada puede frecuentemente hacer que la matriz A sea positiva definida y en banda

2. FUNCIONES DE FORMA.

2.1 Introducción.

Las ecuaciones diferenciales del elemento finito se obtienen mediante el uso de los métodos variacionales (Rayleigh-Ritz) o de los residuos pesados (Galerkin), que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos

Las principales diferencias, en relación con el MEF, de dichos métodos son

1)La representación funcional global de una variable se obtiene ensamblando las representaciones funcionales locales, esto es, que las integrales globales en el dominio del continuo (Ω), se establecen en función de un ensamble de las integrales en el dominio (Ω_e) de cada elemento finito aislado

2)Empleando el método de Rayleigh-Ritz, el principio variacional global se construye como un ensamble de los propios variacionales aplicados a cada elemento finito

3)Análogamente, utilizando el método de Galerkin, las funciones de interpolación del elemento finito actúan como funciones de peso en la integral de Galerkin.

El paso más importante en el MEF consiste en la selección de funciones de interpolación adecuadas, debiendo satisfacer los criterios correspondientes para lograr la convergencia de la solución aproximada a la exacta de la ecuación diferencial en cuestión.

La interpolación en elementos finitos se caracteriza por la forma del elemento elegido y el orden de aproximación deseada. Para una buena selección de un elemento finito se debe tomar en cuenta·

a)La geometría del dominio global

b)El grado de aproximación deseado para la solución.

c)La facilidad de integración sobre el dominio del elemento

Las funciones de forma o de interpolación son polinomios de varios grados, que pueden ser integrados en un dominio global unidimensional, bidimensional o tridimensional

Pueden ser polinomios lineales, en donde sólo se requiere conocer los puntos nodales de los extremos de los elementos finitos, para polinomios cuadráticos se adiciona un punto nodal comprendido dentro de la frontera del elemento además de sus extremos

En este capítulo se mencionan diferentes tipos de elementos finitos para obtener sus funciones de forma correspondientes al grado de aproximación deseado

2 2 Elementos Finitos Unidimensionales.

2 2 1 Elemento Unidimensional

La expansión polinómica de la variable unidimensional, $u=u(x)$, se puede indicar como

$$u = a_0 + a_i x^i \qquad (2\ 1)$$

para i=1, 2, , n

2 2.1.1 Coordenadas Cartesianas

a)Interpolación Lineal

En este caso la ec 2 1 resulta ser:

$$u = a_0 + a_1 x \qquad (2.2)$$

Evaluando la ec 2 2 en los puntos nodales y despejando las constantes, para expresarlas en función de los desplazamientos, obtenemos.

$$a_0 = u_1 \qquad (2\ 3a)$$

$$a_1 = \frac{1}{l}(u_2 - u_1) \qquad (2\ 3b)$$

por último, sustituyendo las ecs 2 3a y 2.3b en la ec 2 2 resulta

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1 + \frac{x}{l}u_2 = N_i u_i \qquad (2\ 4)$$

donde i=1, 2, y N_i se denominan funciones de interpolación y sus expresiones son

$$N_i = 1 - \frac{x}{l} \qquad (2\ 5a)$$

$$N_2 = \frac{x}{l} \qquad (2\ 5b)$$

b)Interpolación Cuadrática

En este caso la ec 2 1 resulta ser

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (2\ 6)$$

y para poder cuantificar las tres constantes, se requiere conocer el valor de u en otro punto adicional a los extremos, en la mayoría de los casos se selecciona el centro del elemento, por lo tanto, las condiciones de frontera serán

$$u\big|_{x=0} = u_1 \qquad (2\ 7a)$$

$$u_{x=\frac{l}{2}} = u_2 \qquad (2\ 7b)$$

$$u_{x=l} = u_3 \qquad (2\ 7c)$$

por lo tanto, los valores de las constantes, expresadas en función de los desplazamientos son

$$a_0 = a_1 \qquad (2\ 8a)$$

$$a_1 = \frac{1}{l}(-3u_1 + 4u_2 - u_3) \tag{2.8b}$$

$$a_2 = \frac{2}{l^2}(u_1 - 2u_2 + u_3) \tag{2.8c}$$

y la ec 2.6 se puede escribir como·

$$u = \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]u_1 + 4\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)u_2 + \frac{x}{l}\left[-1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right]u_3 \tag{2 9}$$

ó

$$u = N_i u_i \tag{2 9a}$$

donde i=1, 2, 3, y las funciones de interpolación son

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \tag{2 10a}$$

$$N_2 = 4\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2 10b}$$

$$N_3 = \left(\frac{x}{l}\right)\left[-1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{2 10c}$$

2 2 1 2 Coordenadas Normalizadas

a)Interpolación Lineal

Si el sistema de referencia se selecciona con el origen en el centro del elemento, se define una nueva variable adimensional como se indica a continuación

$$\xi = \frac{x}{h} \tag{2 11}$$

donde

$$h = \frac{1}{2}l \tag{2 12}$$

y de acuerdo con la ec 2 11, se puede indicar el siguiente comportamiento de la variable ξ

$$\xi = 0 \tag{2.13a}$$

$$\xi = -1 \tag{2 13b}$$

$$\xi = 1 \tag{2 13c}$$

Con base en la variable ξ y para el caso lineal, la ecuación 2 1 se reduce a:

$$u = a_0 + a_1\xi \tag{2 14}$$

en donde las condiciones de frontera están dadas por

$$u\big|_{\xi=-1} = u_1 \tag{2 15a}$$

$$u\big|_{\xi=1} = u_2 \tag{2.15b}$$

Siguiendo la secuencia empleada en las interpolaciones de coordenadas cartesianas, las constantes expresadas en función de los desplazamientos son

$$a_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \tag{2 16a}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \tag{2 16b}$$

por lo tanto, la ec 2 14 se puede escribir como

$$u = \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2 = N_i u_i \tag{2 17}$$

donde i=1, 2, y las funciones de interpolación son

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{2 18a}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{2 18b}$$

b)Interpolación Cuadrática

Empleando la misma convención que en la interpolación lineal, la ec 2 1 queda expresada de la siguiente manera

$$u = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \tag{2 19}$$

Con las condiciones de frontera, dadas a continuación

$$u\big|_{\xi=-1} = u_1 \tag{2 20a}$$

$$u\big|_{\xi=0} = u_2 \tag{2 20b}$$

$$u\big|_{\xi=1} = u_3 \tag{2 20c}$$

y siguiendo con el procedimiento empleado anteriormente, las funciones de interpolación son.

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \tag{2 21a}$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \tag{2 21b}$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \tag{2 21c}$$

2 2 2 Elemento Barra

Un problema unidimensional en elasticidad está dado por el equilibrio de fuerzas en una barra en términos de los esfuerzos normales σ, el área A y la fuerza de cuerpo axial f La fuerza en la barra está dada por $\sigma(x)A(x)$ y el cambio en dicha fuerza está equilibrado por la fuerza de cuerpo externa

$$\frac{d[\sigma(x)A(x)]}{dx} + f(x)A(x) = 0 \tag{2 22}$$

Considerando la ecuación constitutiva que relaciona los esfuerzos con las deformaciones se tiene que

$$\sigma(x) = E(x)\xi(x) \tag{2 23}$$

donde

$$\xi(x) = \frac{du(x)}{dx} \tag{2.24}$$

por lo que

$$\sigma(x) = E(x)\frac{du(x)}{dx} \tag{2 25}$$

por lo tanto, la ec 2 22 queda expresada como

$$\frac{d\left[E(x)A(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right]}{dx} + f(x)A(x) = 0 \tag{2 26}$$

que es una ecuación diferencial de 2° orden en términos del desplazamiento.

2.3 Elementos Finitos Bidimensionales.

Las geometrías más usadas para estos elementos son el triángulo y el cuadrilátero general; se bosquejan las funciones de interpolación asociadas al triángulo y al rectángulo con lados lineales.

En la expansión polinómica de los elementos finitos se busca el máximo orden del polinomio completo correspondiente a un número mínimo de grados de libertad. Para determinar el número de términos que se presentan en un polinomio de dos variables, es conveniente utilizar el triángulo de Pascal.

2.3.1 Elemento Viga.

Los elementos finitos están relacionados directamente con el análisis matricial de estructuras.

El método de rigideces puede considerarse como el antecesor del MEF.

Para el caso del elemento viga, el modelo matemático que lo representa está dado por la ecuación diferencial que relaciona la carga aplicada, w(x), sobre la viga y su correspondiente deflexión, v(x), esto es (fig. 2.1):

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} = w(x) \tag{2.27}$$

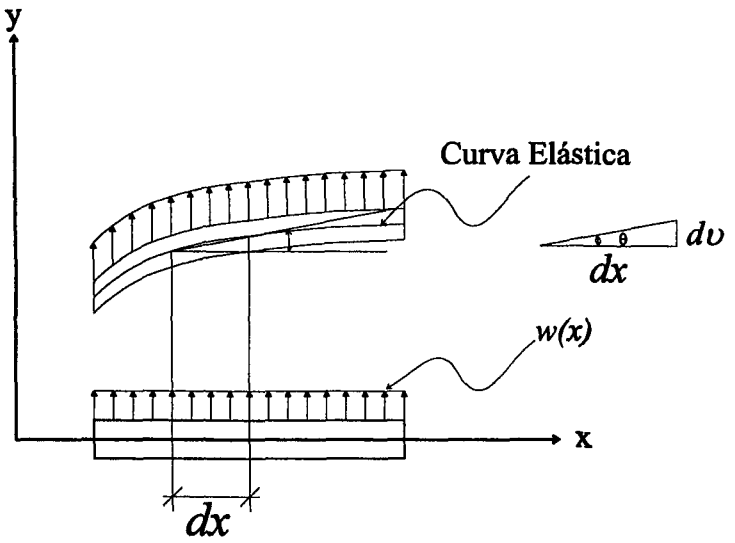

Fig. 2.1 Elemento diferencial de una viga cargada transversalmente

En general, E (módulo de elasticidad lineal del material constituyente del elemento) e I (momento de inercia de la sección transversal del elemento) se consideran constantes para cualquier elemento finito. Nótese, además, que la carga $w(x)$ es positiva en dirección del eje y positivo.

La ec. 2.27, junto con la integración del modelo matemático conduce al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4}=\frac{dV(x)}{dx}=w(x) \qquad \text{carga} \qquad (2.28a)$$

$$EI\frac{d^3v(x)}{dx^3}=\frac{dM(x)}{dx}=V(x) \qquad \text{fuerza cortante} \qquad (2.28b)$$

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2}=M(x) \qquad \text{momento flexionante} \qquad (2.28c)$$

$$EI\frac{dv(x)}{dx}=\theta(x) \qquad \text{pendiente} \qquad (2.28d)$$

$$v(x) \qquad \text{deflexión} \qquad (2.28e)$$

Antes de construir la matriz de rigideces del elemento viga se calcularán las fuerzas y momentos de reacción para los casos en los que se conocen los giros y desplazamientos nodales en una viga doblemente empotrada.

Los modelos físicos que se utilizarán se muestran en la figura 2.2:

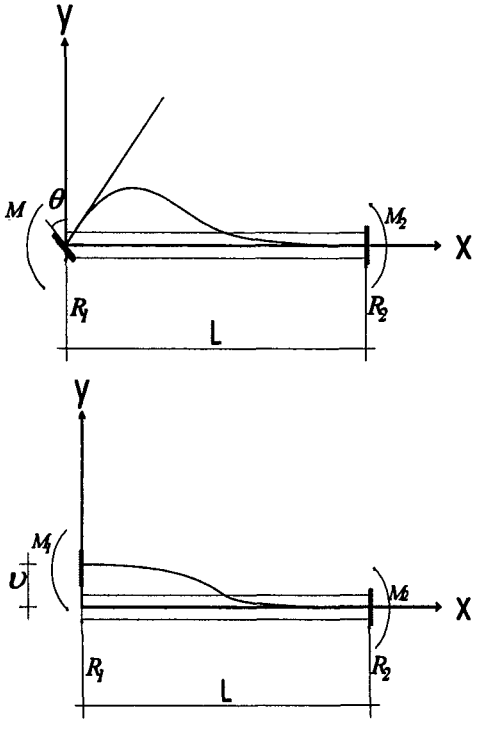

Fig. 2.2 Modelos físicos de una viga doblemente empotrada conociendo giros y desplazamientos nodales

Para el caso de la figura 2 2a la ecuación que representa el modelo es

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4}=0 \qquad (2\ 29)$$

integrando cuatro veces se tiene que

$$EI\frac{d^3v(x)}{dx^3}=C_1 \qquad (2.30a)$$

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2}=C_1x+C_2 \qquad (2\ 30b)$$

$$EI\frac{dv(x)}{dx}=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3 \qquad (2\ 30c)$$

$$EIv(x)=C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4 \qquad (2\ 30d)$$

Como se observa, son necesarias, cuatro condiciones de frontera para determinar el valor de las cuatro constantes de integración Tales condiciones son

$$\frac{d^3v(0)}{dx^3}=V(0)=R_1 \qquad (2\ 31a)$$

$$\frac{d^2v(0)}{dx^2}=-M_1 \qquad (2.31b)$$

$$\frac{dv(0)}{dx}=\theta_1 \qquad (2\ 31c)$$

$$v(0)=0 \qquad (2\ 31d)$$

Una vez aplicadas las condiciones anteriores se llega a las ecuaciones siguientes

$$EI\frac{dv(x)}{dx}=R_1\frac{x^2}{2}-M_1x+\theta_1 \qquad (2\ 32a)$$

$$EIv(x)=R_1\frac{x^3}{6}-M_1\frac{x^2}{2}+\theta_1x \qquad (2\ 32b)$$

Si a las ecuaciones 2.32a y 2.32b se le aplican las condiciones de frontera v(L)=0 y θ(L)=0 se establece finalmente que

$$R_1 = \frac{6EI}{L^2}\theta_1 \qquad (2.33a)$$

$$M_1 = \frac{4EI}{L}\theta_1 \qquad (2.33b)$$

Mediante las condiciones de equilibrio se encuentran los valores de R_2 y M_2

$$R_2 = -\frac{6EI}{L^2}\theta_1 \qquad (2\ 33c)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L}\theta_1 \qquad (2.33d)$$

Para el caso de la figura 2 2b se tiene como modelo la siguiente ecuación

$$EI\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = 0 \qquad (2.34)$$

y por lo tanto, las ecuaciones 2 30a a 2 30d son aplicables a este modelo.

Las condiciones de frontera para este caso son:

$$\frac{d^3 v(0)}{dx^3} = R_1 \qquad (2\ 35a)$$

$$\frac{d^2 v(0)}{dx^2} = -M_1 \qquad (2\ 35b)$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \qquad (2\ 35c)$$

$$v(0) = v_1 \qquad (2\ 35d)$$

Finalmente, los valores de R_1, M_1, R_2 y M_2 son

$$R_1 = \frac{12EIv_1}{L^3} \qquad (2\ 36a)$$

$$M_1 = \frac{6EIv_1}{L^2} \qquad (2\ 36b)$$

$$R_2 = \frac{12EIv_1}{L^3} \qquad (2\ 36c)$$

$$M_2 = \frac{6EIv_1}{L^2} \qquad (2.36d)$$

Para construir la matriz de rigideces del elemento viga consideremos que las fuerzas y momentos de reacción en una viga doblemente empotrada son funciones de v_1 y v_2 (desplazamientos) y θ_1 y θ_2 (giros), es decir.

$$R_i = f_i(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \qquad (2\ 37)$$

por lo que los valores de R_1, M_1, R_2 y M_2 son.

$$R_1 = \frac{12EIv_1}{L^3} + \frac{6EI\theta_1}{L^2} - \frac{12EIv_2}{L^3} + \frac{6EI\theta_2}{L^2} \qquad (2.38a)$$

$$M_1 = \frac{6EIv_1}{L^2} + \frac{4EI\theta_1}{L} - \frac{6EIv_2}{L^2} + \frac{2EI\theta_2}{L} \qquad (2.38b)$$

$$R_2 = -\frac{12EIv_1}{L^3} - \frac{6EI\theta_1}{L^2} + \frac{12EIv_2}{L^3} - \frac{6EI\theta_2}{L^2} \qquad (2\ 38c)$$

$$M_2 = \frac{6EIv_1}{L^2} + \frac{2EI\theta_1}{L} - \frac{6EIv_2}{L^2} + \frac{4EI\theta_2}{L} \qquad (2\ 38d)$$

que en forma matricial queda expresado como·

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (2\ 39a)$$

ó

$$[f] = [K][v] \qquad (2\ 39b)$$

donde [f] es el vector de fuerzas, [K] es la matriz de rigideces y [v] es el vector de desplazamientos

2 3 2 Elemento Triangular

El elemento triangular ha caído en desuso debido a que da como resultado estructuras demasiado rígidas

2.3 2 1 Coordenadas Cartesianas

La representación polinómica más simple de la función $u = u(x, y)$ es la lineal cuya expresión es $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$, las condiciones de frontera en los puntos nodales son

$$u\Big|_{\substack{x=x_i\\y=y_i}} = u_i \quad , \quad u\Big|_{\substack{x=x_j\\y=y_j}} = u_j \quad , \quad u\Big|_{\substack{x=x_k\\y=y_k}} = u_k \tag{2 40}$$

Al hacer que las condiciones satisfagan la ecuación lineal se obtiene el siguiente modelo analítico de desplazamiento

$$u = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(a_i + b_i x + c_i y\right)u_i + \left(a_j + b_j x + c_j y\right)u_j + \left(a_k + b_k x + c_k y\right)u_k\right\} \tag{2 41}$$

donde

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{2 42a}$$

$$b_i = y_j - y_k = y_{jk} \tag{2 42b}$$

$$c_i = x_k - x_j = x_{kj} \tag{2 42c}$$

y los coeficientes a_j, a_k, b_j, b_k, c_j, c_k, se obtienen mediante permutación cíclica de los subíndices en las ecuaciones anteriores

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2A_{ijk} \tag{2 43}$$

Todas estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera

$$u = \underline{N}\underline{u} \tag{2 44}$$

donde

$$\underline{N} = \left[N_i, N_j, N_k\right]_{(1x3)} \tag{2 45}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}_{(3x1)} \tag{2 46}$$

y las funciones de forma quedan expresadas así

$$N_i = \frac{1}{\Delta}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \tag{2 47}$$

En la figura 2 3 se muestra el elemento tipo para el caso analizado.

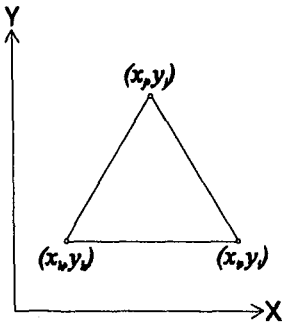

Fig. 2.3 Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas

2.3.2.2 Coordenadas Naturales.

Como el número de términos que aparece en un polinomio completo determina el número de puntos nodales requeridos, con base en el Triángulo de Pascal, en lugar de proceder como en el apartado anterior, se utiliza el concepto de coordenadas naturales, que conduce a las coordenadas de área, L_1, L_2 y L_3; cuya relación con las coordenadas cartesianas está dada por:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \tag{2.48a}$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \tag{2.48b}$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \tag{2.48c}$$

donde esta última establece que las coordenadas de área son linealmente dependientes.

Otra forma de definir las coordenadas de área se indica a continuación (Fig. 2.4):

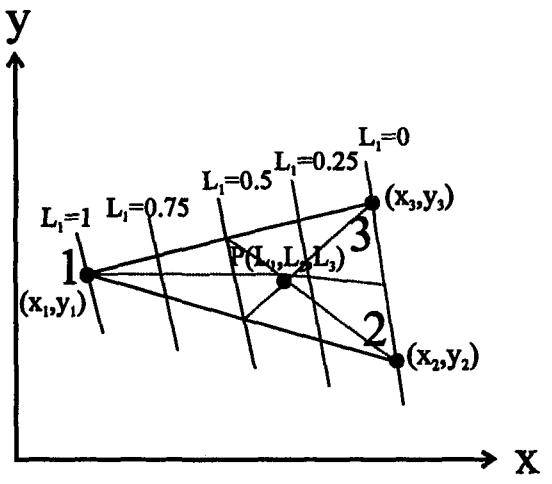

Fig. 2 4 Coordenadas de Área

$$L_1 = \frac{A_{p23}}{A_{123}} \qquad (2.49a)$$

$$L_2 = \frac{A_{p31}}{A_{123}} \qquad (2\ 49b)$$

$$L_3 = \frac{A_{p12}}{A_{123}} \qquad (2\ 49c)$$

Las funciones de forma N_i para los elementos triangulares en dichas coordenadas son.

a) Interpolación Lineal

Se requieren únicamente los tres puntos nodales sobre los vértices

$$N_i = L_i \qquad (2\ 50)$$

para i=1,2,3

b) Interpolación Cuadrática

Se requieren tres puntos nodales sobre los vértices y tres puntos nodales sobre los lados

1) Para los puntos en los vértices

$$N_i = (2L_i - 1)L_i \qquad (2\ 51)$$

para i=1,2,3

2) Para los puntos sobre los lados (localizados al centro)

$$N_4 = 4L_1L_2 \qquad (2\ 52a)$$

$$N_5 = 4L_2L_3 \qquad (2\ 52b)$$

$$N_6 = 4L_3L_1 \qquad (2\ 52c)$$

2 3 3 Elemento Cuadrilátero General

Para esta geometría es conveniente usar coordenadas normalizadas y la forma de seleccionarlas se indica en la figura 2 5

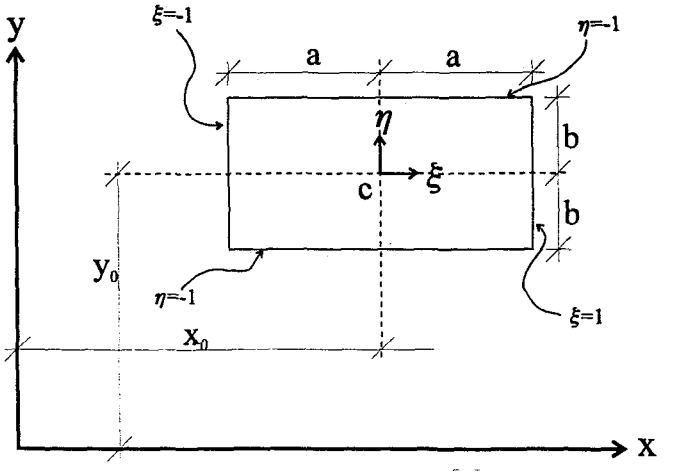

Fig 2 5 Coordenadas Normalizadas Para un Rectángulo

Debido a la geometría del cuadrilátero, las funciones de forma se pueden generar, sistemáticamente, mediante productos de polinomios en las dos coordenadas.

Las funciones de interpolación de la familia Serendipity se obtuvieron, originalmente por inspección, y por esta razón, Zienkiewicz les asignó dicho nombre, en similitud con la princesa de Serendip de la novela de Horace Walpole, famosa por sus descubrimientos casuales

Esta familia se originó por la conveniencia de que las funciones de interpolación dependan de puntos nodales localizados sobre los lados del elemento Es necesario mencionar que las funciones generadas por los puntos localizados sobre los lados, generan polinomios completos hasta la interpolación cúbica, para aproximaciones mayores es necesario adicionar nodos interiores

Las funciones de forma para varias aproximaciones se indican a continuación

a) Interpolación Lineal

Se requieren únicamente los cuatro puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \qquad (2\ 53)$$

para i=1,2,3,4

b) Interpolación Cuadrática

Se requieren cuatro puntos nodales sobre las esquinas y cuatro puntos nodales sobre los lados

1) Para nodos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) \tag{2.54}$$

para i=1,2,3,4

2) Para los nodos sobre los lados (localizados al centro):

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) \qquad \xi_i = 0 \qquad i = 5,7 \tag{2 55a}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) \qquad \eta_i = 0 \qquad i = 6,8 \tag{2 55b}$$

2.3 4 Elementos Isoparamétricos

Para que cualquier geometría, relativamente compleja, se pueda representar con un número pequeño de elementos, se necesitan elementos finitos con formas más complejas que las descritas anteriormente En este apartado se tratan geometrías distorsionadas (lados y superficies curvas) de los elementos de forma simple que conduzcan a geometrías arbitrarias según se puede observar en la figura 2 6, en donde los puntos asociados a las regiones regulares mapean a puntos de las regiones irregulares En este mapeo, la referencia original del elemento se transforma en una referencia curvilínea Si el mapeo es uno a uno, se puede establecer una correspondencia entre las coordenadas cartesianas y curvilíneas de la forma mostrada en la figura 2 6

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{2 56}$$

Una vez establecida la relación dada por la ecuación anterior, las funciones de forma se pueden especificar en las coordenadas locales y, mediante una serie de transformaciones, determinar los elementos, correspondientes a una referencia arbitraria

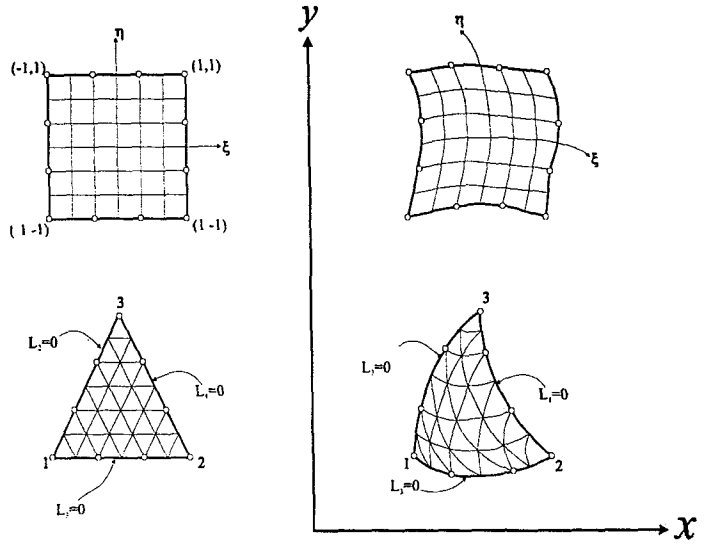

Fig 2 6 Mapeo de Elementos Bidimensionales

Si N_i=$N_i(\xi, \eta)$ son las funciones de forma del elemento en las coordenadas locales (no deformadas), se puede realizar la transformación de coordenadas mediante las relaciones siguientes

$$x = N_1' x_1 + \quad + N_m' x_m = N_i' x_i = \begin{pmatrix} N_1', & , N_m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_m \end{pmatrix} = \underline{N}' \underline{x} \qquad (2\ 57a)$$

$$y = N_1' y_1 + \quad + N_m' y_m = N_i' y_i = \begin{pmatrix} N_1, & , N_m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{N}' \underline{y} \qquad (2\ 57b)$$

donde

x, y son las coordenadas en la referencia cartesiana de cualquier punto localizado en el elemento deformado, y

x_i, y_i son las correspondientes coordenadas cartesianas de los m puntos seleccionados sobre la frontera del elemento, donde (i=1, ,m)

Para asegurar la continuidad entre las fronteras de los elementos mapeados, basta con asegurar que las funciones de forma, N_i, garanticen la continuidad de los elementos en la configuración no deformada

La representación de la variable de campo, función u, definida en la región del elemento en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ,η) y las funciones de forma, resulta ser.

$$u = N_i(\xi,\eta)u_i = \begin{pmatrix} N_1, & , N_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_n \end{pmatrix} = \underline{N}\underline{u} \qquad (2\ 58)$$

donde:

u_i son los valores de la variable u, en los n puntos nodales del elemento, donde i=1, . ,n

Para asegurar la continuidad de la función u, basta con asegurar que las funciones de forma $N_i(\xi, \eta)$ usadas, garanticen la continuidad de u en las coordenadas del elemento no deformado

Los puntos nodales n usados para definir la interpolación de la función u pueden estar o no relacionados con los m puntos empleados para definir la geometría del elemento En la fig 2 7 se muestran las relaciones que se pueden representar para un elemento plano (cuadrilátero con lados curvos) en donde las funciones de forma N_i', donde i=1, ,8, para definir la geometría del elemento son cuadráticas, mientras que las funciones de forma, N_i, para definir la función u pueden ser lineal (i=1, ,4), cuadrática (i=1, ,8), o cúbica (i=1, ,12)

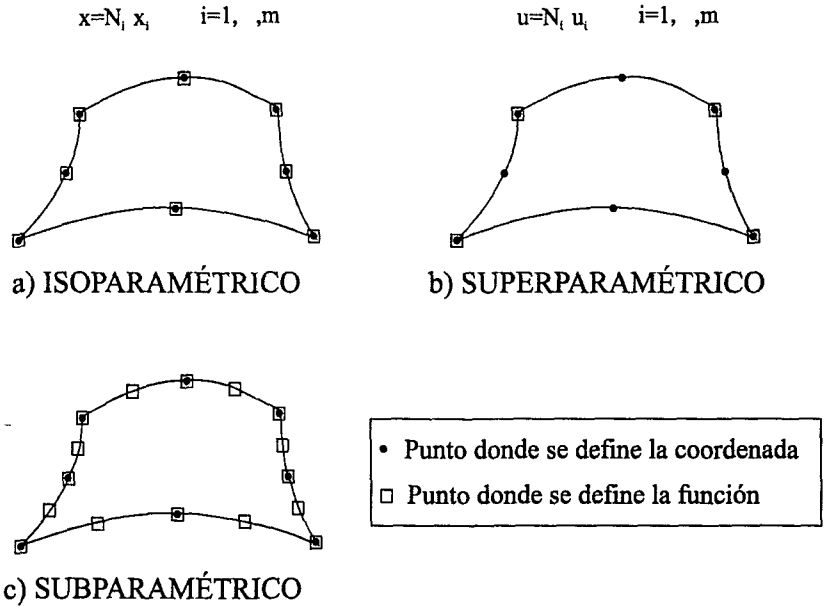

Fig 2 7 Transformación de Coordenadas Mediante Funciones de Forma

Se llaman elementos isoparamétricos cuando se utilizan los mismos puntos para definir a la geometría y a la función (n=m) y, por tanto, las funciones de forma son las mismas, es decir.

$$N_i = N_i' \qquad i=1,..,n \qquad (2.59)$$

En la actualidad son los elementos de uso más generalizado

Se llaman elementos subparamétricos cuando n>m y elementos superparamétricos cuando n<m.

Considerando el sistema de referencia local ξ,η y su correspondiente sistema de referencia global x,y; las derivadas parciales de las funciones de forma N_i, respecto a las variables locales, para la regla de la cadena, se pueden expresar, en forma matricial, como.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (2.60)$$

donde

$\underline{J}$ es denominada matriz jacobiana, se puede cuantificar explícitamente con base a las ecuaciones (2 56), ya que, por la ec. (2 58), se conocen las funciones de forma en la referencia local (elementos isoparamétricos) La expresión de $\underline{J}$ resulta ser

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{pmatrix} \qquad (2\ 61)$$

En la ec (2 59) se puede conocer el término de la izquierda, ya que se conocen las N_i, por lo que se puede escribir la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \qquad (2\ 62)$$

Para que exista J^{-1} es necesario que el jacobiano (det J) de la transformación sea diferente de cero, es decir

$$det\ \underline{J} = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| \neq 0 \qquad (2.63)$$

En el MEF es muy frecuente cuantificar integrales sobre regiones de los diversos elementos finitos, como las indicadas a continuación·

$$A_I = \int_A G_A dA = \int_A G_A(x,y)dxdy \qquad (2\ 64)$$

$$L_I = \int_L G_L dX = \int_L G_L(x)dx \qquad (2\ 65)$$

Debido a la complejidad, tanto de los integrandos, como de las regiones de integración, es conveniente establecer las integrales anteriores en función de las coordenadas naturales, y quedan como se indica

$$A_I = \int_I \int_I \bar{G}_A(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (2.66)$$

$$L_I = \int_I \bar{G}_L(\xi)d\xi \qquad (2.67)$$

Aunque las regiones de las ecs. 2.65 y 2.66 están bien definidas, las funciones $\bar{G}_A$ y $\bar{G}_L$ resultan, en general, sumamente complejas de tal manera que, para llevar a cabo las integraciones es necesario un método numérico que sea una aproximación al problema

Para realizar la integración para elementos finitos rectangulares el método numérico recomendable es la cuadratura gaussiana, en donde el error es del orden $0(\Delta^{2n})$ Con esta cuadratura, las ecs 2 65 y 2 66 se transforman en las siguientes

$$A_I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j \bar{G}_A(\xi_i,\eta_j) \qquad (2\ 68)$$

$$L_I = \sum_{i=1}^{n} H_i \bar{G}_I(\xi_i) \qquad (2\ 69)$$

donde

H_i son los coeficientes de peso asociado a las abscisas ξ_i, por donde se hace pasar la aproximación polinómica, cuyos valores se indican en la tabla 2.1

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} H_i f(a_j)$$

$\pm a_j$				H_i		
			n=1			
	0 00000			2.00000	0 00000	0.00000
			n=2			
0 57735	0 26910	0 89626		1.00000	0 00000	0 00000
			n=3			
0 77459	0 66692	0 41483		0.55555	0 55555	0 55556
0 00000	0 00000	0 00000		0.88888	0 88888	0 88889
			n=4			
0 86113	0 63115	0 94053		0.34785	0.48451	0.37454
0 33998	0.10435	0 84856		0.65214	0 51548	0.62546
			n=5			
0 90617	0 98459	0 38664		0 23692	0 68850	0 56189
0 53846	0 93101	0 05683		0 47862	0 86704	0 99366
0 00000	0 00000	0 00000		0 56888	0.88888	0 88889

Tabla 2 1 Abscisas y pesos para la Cuadratura Gaussiana

3. APLICACIONES.

Obtener con el método del elemento finito los desplazamientos del muro mostrado en la figura 3.1.

El muro tiene un espesor de 15 centímetros, es por ello que el modelo estructural corresponde a un estado plano de esfuerzos. (El coeficiente de Poisson del material empleado es de 0.20)

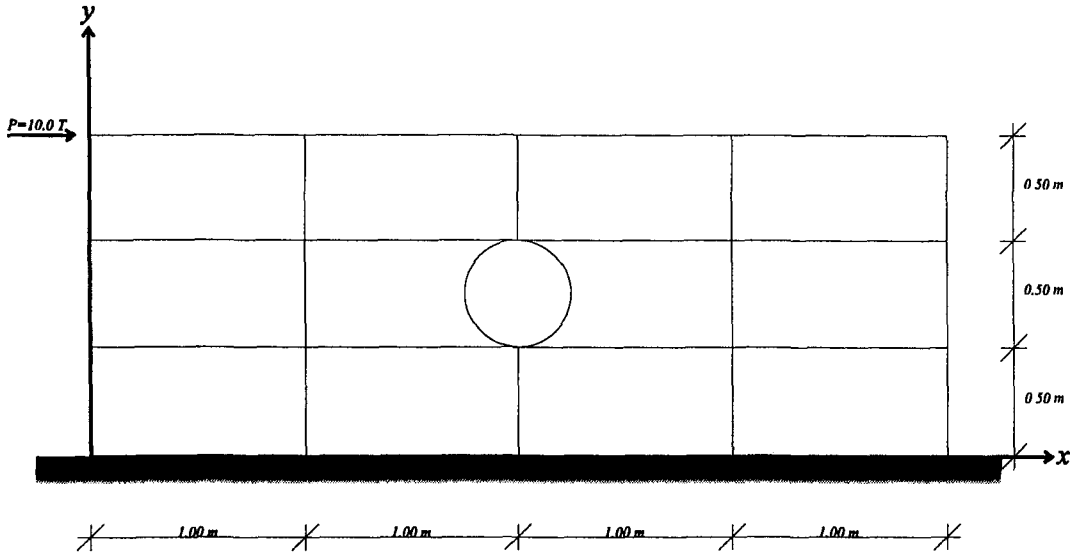

Fig 3.1 Diagrama del Muro a Analizar.

La discretización del muro se presenta en la fig. 3.2, donde se observa que el elemento finito seleccionado es el cuadrilátero paramétrico cuadrático (8 puntos nodales).

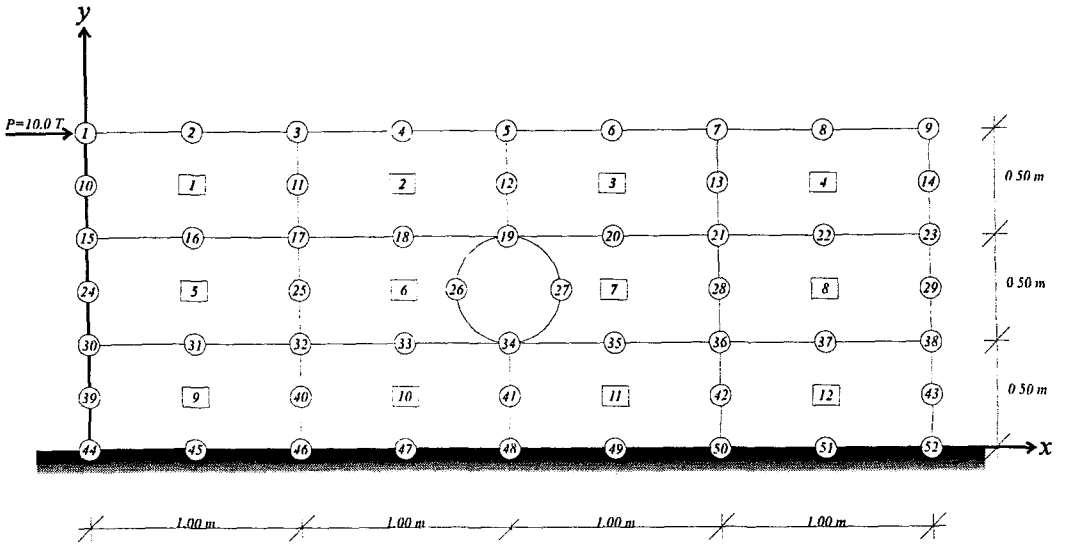

Fig 3 2 Discretización del Muro a Analizar

Las coordenadas de los nodos se muestran en la Tabla 3 1

NODO	COORDENADAS		NODO	COORDENADAS		NODO	COORDENADAS	
	X	Y		X	Y		X	Y
1	0.00	1.50	19	2.00	1.00	37	3.50	0.50
2	0.50	1.50	20	2.50	1.00	38	4.00	0.50
3	1.00	1.50	21	3.00	1.00	39	0.00	0.25
4	1.50	1.50	22	3.50	1.00	40	1.00	0.25
5	2.00	1.50	23	4.00	1.00	41	2.00	0.25
6	2.50	1.50	24	0.00	0.75	42	3.00	0.25
7	3.00	1.50	25	1.00	0.75	43	4.00	0.25
8	3.50	1.50	26	1.75	0.75	44	0.00	0.00
9	4.00	1.50	27	2.25	0.75	45	0.50	0.00
10	0.00	1.25	28	3.00	0.75	46	1.00	0.00
11	1.00	1.25	29	4.00	0.75	47	1.50	0.00
12	2.00	1.25	30	0.00	0.50	48	2.00	0.00
13	3.00	1.25	31	0.50	0.50	49	2.50	0.00
14	4.00	1.25	32	1.00	0.50	50	3.00	0.00
15	0.00	1.00	33	1.50	0.50	51	3.50	0.00
16	0.50	1.00	34	2.00	0.50	52	4.00	0.00
17	1.00	1.00	35	2.50	0.50			
18	1.50	1.00	36	3.00	0.50			

Tabla 3 1 Coordenadas de los Nodos

La orientación de los elementos se presenta en la Tabla 3.2:

Elemento	i	j	k	l	M	n	o	p
1	15	17	3	1	16	11	2	10
2	17	19	5	3	18	12	4	11
3	19	21	7	5	20	13	6	12
4	21	23	9	7	22	14	8	13
5	30	32	17	15	31	25	16	24
6	32	34	19	17	33	26	18	25
7	34	36	21	19	35	28	20	27
8	36	38	23	21	37	29	22	28
9	44	46	32	30	45	40	31	34
10	46	48	34	32	47	41	33	40
11	48	50	36	34	49	42	35	41
12	50	52	38	36	51	43	37	42

Tabla 3 2 Orientación de los Elementos

En la figura 3 3 se muestra un elemento tipo, de un cuadrilátero general con 8 puntos nodales, con la finalidad de establecer las ecuaciones de equilibrio de los elementos finito en que se discretizó el muro

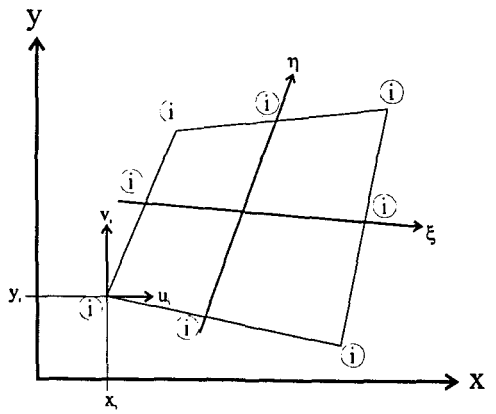

Fig 3 3 Coordenadas Globales del Elemento Finito tipo Cuadrilátero Cuadrático

De acuerdo con las ecuaciones 1.26, 1 27 y 1.28 se puede escribir .

$$\bar{u}_e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \\ \underline{u}_l \\ \underline{u}_m \\ \underline{u}_n \\ \underline{u}_o \\ \underline{u}_p \end{bmatrix} \quad \underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_l = \begin{bmatrix} u_l \\ v_l \end{bmatrix} \quad \underline{u}_m = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_o = \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_p = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} \tag{3 1}$$

Las funciones de forma $N_m(\xi,\eta)$, en coordenadas locales están dadas por las ecuaciones 2 54 a 2 55b y resultan ser

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1) \tag{3 2}$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_j)(1+\eta\eta_j)(\xi\xi_j+\eta\eta_j-1) \tag{3.3}$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_k)(1+\eta\eta_k)(\xi\xi_k+\eta\eta_k-1) \tag{3 4}$$

$$N_l = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_l)(1+\eta\eta_l)(\xi\xi_l+\eta\eta_l-1) \tag{3 5}$$

$$N_m = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_m) \tag{3 6}$$

$$N_n = (1+\xi\xi_n)(1-\eta^2) \tag{3 7}$$

$$N_o = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_o) \tag{3 8}$$

$$N_p = (1+\xi\xi_p)(1-\eta^2) \tag{3 9}$$

Así mismo, de acuerdo con las ecuaciones 1 29 y 1 30 la aproximación de los desplazamientos está dada por las ecuaciones siguientes

$$\tilde{u} = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_l u_l + N_m u_m + N_n u_n + N_o u_o + N_p u_p \approx u \tag{3 10}$$

$$\tilde{v} = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_l v_l + N_m v_m + N_n v_n + N_o v_o + N_p v_p \approx v \tag{3 11}$$

que en forma matricial se puede expresar de la siguiente forma

$$\underline{u} = \underline{N}\underline{u}^e \tag{3 12}$$

donde

$$\underline{N}=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p \end{bmatrix} \quad (3\ 13)$$

$$\underline{u}=\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La relación entre los sistemas de referencia global (x,y) y local (ξ,η) está dada por las ecuaciones 2 57a y 2 57b Para los elementos de 8 puntos nodales son

$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_l x_l + N_m x_m + N_n x_n + N_o x_o + N_p x_p \quad (3.15)$$

$$y = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_l y_l + N_m y_m + N_n y_n + N_o y_o + N_p y_p \quad (3\ 16)$$

Recordando la ecuación 1 37 podemos determinar en forma explícita la matriz de deformaciones $\underline{B}$ para el elemento en cuestión

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} N_{ix} & 0 & N_{jx} & 0 & N_{kx} & 0 & N_{lx} & 0 & N_{mx} & 0 & N_{nx} & 0 & N_{ox} & 0 & N_{px} & 0 \\ 0 & N_{iy} & 0 & N_{jy} & 0 & N_{ky} & 0 & N_{ly} & 0 & N_{my} & 0 & N_{ny} & 0 & N_{oy} & 0 & N_{py} \\ N_{iy} & N_{ix} & N_{jy} & N_{jx} & N_{ky} & N_{kx} & N_{ly} & N_{lx} & N_{my} & N_{mx} & N_{ny} & N_{nx} & N_{oy} & N_{ox} & N_{py} & N_{px} \end{bmatrix} \quad (3\ 17)$$

De acuerdo con la ecuación 2 61 la matriz jacobiana, $\underline{J}$, para el problema plano es

$$\underline{J}=\begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix} \quad (3\ 18)$$

$\underline{J}^{-1}$ se puede escribir como

$$\underline{J}^{-1}=\frac{1}{J}\begin{pmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{pmatrix} \quad (3\ 19)$$

Resolviendo el determinante de la ecuación 2 63, el jacobiano de transformación J resulta ser

$$J = x_{,\xi}\, y_{,\eta} - x_{,\eta}\, y_{,\xi} \quad (3\ 20)$$

Tomando en cuenta la ecuación 2 62, los operadores derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales quedan .

$$N_{i,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{i,\xi} - y_{,\xi}\, N_{i,\eta}\right) \quad (3.21)$$

$$N_{i,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{i,\xi} + x_{,\xi}\, N_{i,\eta}\right) \quad (3.22)$$

Para las funciones de forma del elemento en estudio se tiene .

$$N_{i,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{i,\xi} - y_{,\xi}\, N_{i,\eta}\right) \tag{3.23}$$

$$N_{i,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{i,\xi} + x_{,\xi}\, N_{i,\eta}\right) \tag{3.24}$$

$$N_{j,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{j,\xi} - y_{,\xi}\, N_{j,\eta}\right) \tag{3.25}$$

$$N_{j,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{j,\xi} + x_{,\xi}\, N_{j,\eta}\right) \tag{3.26}$$

$$N_{k,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{k,\xi} - y_{,\xi}\, N_{k,\eta}\right) \tag{3 27}$$

$$N_{k,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{k,\xi} + x_{,\xi}\, N_{k,\eta}\right) \tag{3 28}$$

$$N_{l,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{l,\xi} - y_{,\xi}\, N_{l,\eta}\right) \tag{3 29}$$

$$N_{l,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{l,\xi} + x_{,\xi}\, N_{l,\eta}\right) \tag{3 30}$$

$$N_{m,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{m\,\xi} - y_{,\xi}\, N_{m,\eta}\right) \tag{3 31}$$

$$N_{m,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{m,\xi} + x_{,\xi}\, N_{m,\eta}\right) \tag{3 32}$$

$$N_{n\,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{n\,\xi} - y_{,\xi}\, N_{n,\eta}\right) \tag{3 33}$$

$$N_{n,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{n\,\xi} + x_{,\xi}\, N_{n,\eta}\right) \tag{3 34}$$

$$N_{o\,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{o,\xi} - y_{,\xi}\, N_{o,\eta}\right) \tag{3.35}$$

$$N_{o,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{o,\xi} + x_{,\xi}\, N_{o,\eta}\right) \tag{3 36}$$

$$N_{p,x} = \frac{1}{J}\left(y_{,\eta}\, N_{p,\xi} - y_{,\xi}\, N_{p,\eta}\right) \tag{3.37}$$

$$N_{p,y} = \frac{1}{J}\left(-x_{,\eta}\, N_{p,\xi} + x_{,\xi}\, N_{p,\eta}\right) \tag{3 38}$$

Para poder evaluar las expresiones anteriores, se deben calcular primero las derivadas de las funciones de forma respecto a las coordenadas locales De acuerdo con las ecuaciones 3 2 a 3.9 se obtienen las expresiones siguientes ·

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4}\xi_i(1+\eta\eta_i)(2\xi\xi_i+\eta\eta_i) \quad (3\ 39)$$

$$N_{i,\eta} = \frac{1}{4}\eta_i(1+\xi\xi_i)(\xi\xi_i+2\eta\eta_i) \quad (3\ 40)$$

$$N_{j,\xi} = \frac{1}{4}\xi_j(1+\eta\eta_j)(2\xi\xi_j+\eta\eta_j) \quad (3\ 41)$$

$$N_{j,\eta} = \frac{1}{4}\eta_j(1+\xi\xi_j)(\xi\xi_j+2\eta\eta_j) \quad (3\ 42)$$

$$N_{k,\xi} = \frac{1}{4}\xi_k(1+\eta\eta_k)(2\xi\xi_k+\eta\eta_k) \quad (3\ 43)$$

$$N_{k,\eta} = \frac{1}{4}\eta_k(1+\xi\xi_k)(\xi\xi_k+2\eta\eta_k) \quad (3\ 44)$$

$$N_{l,\xi} = \frac{1}{4}\xi_l(1+\eta\eta_l)(2\xi\xi_l+\eta\eta_l) \quad (3\ 45)$$

$$N_{l,\eta} = \frac{1}{4}\eta_l(1+\xi\xi_l)(\xi\xi_l+2\eta\eta_l) \quad (3\ 46)$$

$$N_{m,\xi} = -\xi(1+\eta\eta_m) \quad (3\ 47)$$

$$N_{m\,\eta} = \frac{1}{2}\eta_m(1-\xi^2) \quad (3\ 48)$$

$$N_{n\,\xi} = \frac{1}{2}\xi_n(1-\eta^2) \quad (3\ 49)$$

$$N_{n,\eta} = -\eta(1+\xi\xi_n) \quad (3\ 50)$$

$$N_{o,\xi} = -\xi(1+\eta\eta_o) \quad (3\ 51)$$

$$N_{o\,\eta} = \frac{1}{2}\eta_o(1-\xi^2) \quad (3\ 52)$$

$$N_{p,\xi} = \frac{1}{2}\xi_p(1-\eta^2) \quad (3.53)$$

$$N_{p,\eta} = -\eta(1+\xi\xi_p) \quad (3\ 54)$$

Sustituyendo en estas expresiones las coordenadas normalizadas de los nodos, mostradas en la figura 3 4, se obtienen las siguientes expresiones:

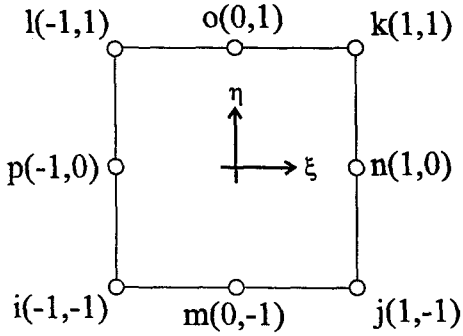

Fig 3 4 Coordenadas Locales del Elemento Finito Tipo Cuadrilátero Cuadrático

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) \tag{3 55}$$

$$N_{i,\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta) \tag{3 56}$$

$$N_{j,\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) \tag{3 57}$$

$$N_{j,\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta) \tag{3.58}$$

$$N_{k\,\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) \tag{3 59}$$

$$N_{k,\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \tag{3 60}$$

$$N_{l\,\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) \tag{3 61}$$

$$N_{l,\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) \tag{3 62}$$

$$N_{m,\xi} = -\xi(1-\eta) \tag{3 63}$$

$$N_{m,\eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \tag{3 64}$$

$$N_{n,\xi} = \frac{1}{2}(1-\eta^2) \tag{3 65}$$

$$N_{n,\eta} = -\eta(1+\xi) \tag{3 66}$$

$$N_{o,\xi} = -\xi(1+\eta) \tag{3.67}$$

$$N_{o,\eta} = \frac{1}{2}(1-\xi^2) \tag{3.68}$$

$$N_{p,\xi} = -\frac{1}{2}(1-\eta^2) \tag{3 69}$$

$$N_{p,\eta} = -\eta(1-\xi) \tag{3 70}$$

De acuerdo con las ecuaciones 3.15 y 3 16, las derivadas de las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales son

$$x_{,\xi} = N_{i,\xi}x_i + N_{j,\xi}x_j + N_{k,\xi}x_k + N_{l,\xi}x_l + N_{m,\xi}x_m + N_{n,\xi}x_n + N_{o,\xi}x_o + N_{p,\xi}x_p \tag{3 71}$$

$$x_{,\eta} = N_{i,\eta}x_i + N_{j,\eta}x_j + N_{k,\eta}x_k + N_{l,\eta}x_l + N_{m,\eta}x_m + N_{n,\eta}x_n + N_{o,\eta}x_o + N_{p,\eta}x_p \tag{3 72}$$

$$y_{,\xi} = N_{i,\xi}y_i + N_{j,\xi}y_j + N_{k,\xi}y_k + N_{l,\xi}y_l + N_{m,\xi}y_m + N_{n,\xi}y_n + N_{o,\xi}y_o + N_{p,\xi}y_p \tag{3.73}$$

$$y_{,\eta} = N_{i,\eta}y_i + N_{j,\eta}y_j + N_{k\,\eta}y_k + N_{l\,\eta}y_l + N_{m,\eta}y_m + N_{n,\eta}y_n + N_{o,\eta}y_o + N_{p,\eta}y_p \tag{3 74}$$

La ecuación de las matriz de rigideces del elemento en estudio está dada por la ecuación 1 39, misma que para un estado plano resulta ser

$$\underline{K}^e = t\int_{A^e} \underline{B}^T(x,y)\underline{D}\underline{B}(x,y)dA \tag{3 75}$$

Tomando en cuenta la transformación de variables se obtiene .

$$\underline{K}^e = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} J(\xi,\eta)\underline{B}^T(\xi,\eta)\underline{D}\underline{B}(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{3 76}$$

Utilizando métodos de integración numérica la expresión de la matriz de rigideces resulta ser

$$\underline{K}^e = t\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} H_m H_n J(\xi_m,\eta_n)\underline{B}^T(\xi_m,\eta_n)\underline{D}\underline{B}(\xi_m,\eta_n) \tag{3 77}$$

Si M=N=2, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\underline{K}^e = t\begin{bmatrix} H_1{}^2 J(\xi_1,\eta_1)\underline{B}^T(\xi_1,\eta_1)\underline{D}\underline{B}(\xi_1,\eta_1) + H_1H_2 J(\xi_1,\eta_2)\underline{B}^T(\xi_1,\eta_2)\underline{D}\underline{B}(\xi_1,\eta_2) + \\ + H_2H_1 J(\xi_2,\eta_1)\underline{B}^T(\xi_2,\eta_1)\underline{D}\underline{B}(\xi_2,\eta_1) + H_2{}^2 J(\xi_2,\eta_2)\underline{B}^T(\xi_2,\eta_2)\underline{D}\underline{B}(\xi_2,\eta_2) \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

Donde

$$K_{11}^e = tH_1{}^2 J(\xi_1,\eta_1)\underline{B}^T(\xi_1,\eta_1)\underline{D}\underline{B}(\xi_1,\eta_1) \tag{3 79}$$

$$K_{12}^{e} = tH_1H_2J(\xi_1,\eta_2)\underline{B}^{T}(\xi_1,\eta_2)\underline{D}\underline{B}(\xi_1,\eta_2) \tag{3.80}$$

$$K_{21}^{e} = tH_2H_1J(\xi_2,\eta_1)\underline{B}^{T}(\xi_2,\eta_1)\underline{D}\underline{B}(\xi_2,\eta_1) \tag{3.81}$$

$$K_{22}^{e} = tH_2{}^{2}J(\xi_2,\eta_2)\underline{B}^{T}(\xi_2,\eta_2)\underline{D}\underline{B}(\xi_2,\eta_2) \tag{3 82}$$

Por lo tanto la matriz de rigideces del elemento resulta ser

$$\underline{K}^{e} = \underline{K_{11}}^{e} + \underline{K_{12}}^{e} + \underline{K_{21}}^{e} + \underline{K_{22}}^{e} \tag{3 83}$$

El único componente de la ecuación para obtener la matriz de rigideces es la matriz de constantes elásticas, que para el estado plano de esfuerzos es ·

$$D = \frac{1}{1-\upsilon^2}\begin{pmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\upsilon) \end{pmatrix} \tag{3 84}$$

El paso siguiente es ensamblar la matriz de rigideces, colocando los datos de ella dentro del lugar correspondiente de la matriz de rigideces total de la estructura

Una vez hecho el ensamble de las matrices de rigideces de todos los elementos finitos, la ecuación de equilibrio de todo el continuo es

$$[K]\{U\} = \{P\} \tag{3.85}$$

Una vez establecidas las ecuaciones de equilibrio del elemento isoparamétrico cuadrático, empezaremos el desarrollo numérico del problema

El primer paso para desarrollar el método es evaluar los grados de libertad, debido a que permiten conocer el número de ecuaciones que tendrá el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

Los grados de libertad se evalúan a partir de las condiciones de frontera, es decir, las restricciones de los nodos La matriz de condiciones de frontera se puede observar en la tabla 3 3

El cero en la matriz de condiciones de frontera indica que el nodo tiene libertad de moverse en la dirección considerada, el uno indica que el nodo no tiene libertad de moverse

La numeración de los grados de libertad se hace en el mismo arreglo matricial recorriendo cada elemento (por columnas) y sustituyendo por cero cada 1

encontrado, el primer cero encontrado se sustituye por 1 ; a partir del segundo cero en adelante se sustituye por el número de grado de libertad anterior más uno. (Ver tabla 3 4)

El siguiente paso es determinar la matriz de indicadores de ecuación, esto es importante para el ensamble de la matriz de rigideces total del continuo, es decir, la aportación que cada elemento finito tiene hacia cada nodo de la discretización del continuo

La matriz de indicadores de ecuación se obtiene a partir de la matriz de grados de libertad y la orientación de los elementos, en la matriz de grados de libertad el número de columna corresponde al número del nodo, la orientación de los elementos va a indicar la columna del arreglo de grados de libertad que se colocará en los renglones correspondientes (Ver tabla 3.5)

El siguiente paso es determinar las matrices de constantes elásticas, en el ejemplo se ha calculado únicamente una matriz debido a que todo el continuo tiene un solo material , esta matriz se calcula con la ecuación 3.84 y se presenta en la tabla 3 6

El vector de fuerzas externas se forma con las cargas aplicadas en los nodos, para el caso del ejemplo se presenta su vector en la tabla 3 6

Una vez vistos los datos comunes de todos los elementos ; ahora se tratarán los datos que no son iguales, debido a la geometría de los elementos

En la figura 3 5 se muestran los datos geométricos correspondientes al elemento finito número 1.

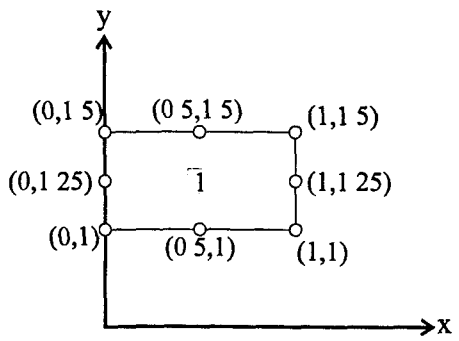

Fig 3 5 Datos Geométricos del Elemento Finito N° 1

Las coordenadas locales del primer punto de integración numérica (ξ_1, η_1) así como los coeficientes de peso (H1) para N=2 se obtienen de la tabla 2 1 y se muestran en la figura 3 6

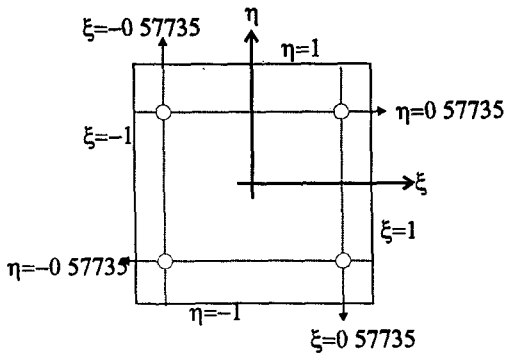

Fig 3 6 Coordenadas Locales de los Puntos de Integración

De acuerdo con la figura 3 6 se tiene que ·

$$\xi_1 = -0\ 57735 \tag{3 86}$$

$$\eta_1 = -0\ 57735 \tag{3.87}$$

$$H_1 = 1\ 0 \tag{3 88}$$

De acuerdo con las ecuaciones 3 55 a 3.70 se obtienen los valores siguientes de las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales

$$N_{i,\xi} = -0\ 683012 \tag{3 89}$$

$$N_{i,\eta} = -0\ 683012 \tag{3 90}$$

$$N_{j,\xi} = -0\ 227671 \tag{3 91}$$

$$N_{j,\eta} = -0\ 061004 \tag{3 92}$$

$$N_{k,\xi} = -0\ 183013 \tag{3 93}$$

$$N_{k,\eta} = -0\ 183013 \tag{3 94}$$

$$N_{l,\xi} = -0\ 061004 \tag{3.95}$$

$$N_{l,\eta} = -0\ 227671 \tag{3.96}$$

$$N_{m,\xi} = 0\ 910683 \tag{3 97}$$

$$N_{m,\eta} = -0\ 333333 \tag{3.98}$$

$$N_{n,\xi} = 0\ 333333 \tag{3 99}$$

$$N_{n,\eta} = 0\ 244017 \tag{3.100}$$

$$N_{o,\xi} = 0\ 244017 \tag{3.101}$$

$$N_{o,\eta} = 0\ 333333 \tag{3.102}$$

$$N_{p,\xi} = -0\ 333333 \tag{3.103}$$

$$N_{p,\eta} = 0\ 910683 \tag{3.104}$$

Sustituyendo los datos en las ecuaciones 3.71 a 3.74 se obtiene .

$$x_{,\xi} = 0\ 499999 \tag{3 105}$$

$$x_{,\eta} = 0\ 0 \tag{3.106}$$

$$y_{,\xi} = 0\ 0 \tag{3 107}$$

$$y_{,\eta} = 0\ 25 \tag{3 108}$$

De acuerdo con la ecuación 3 20 se obtiene.

$$J = (0\ 499999)(0\ 25) - (0)(0) = 0\ 125 \tag{3 109}$$

Sustituyendo los valores pertinentes en las ecuaciones 3 23 a 3 38 se obtienen los siguientes resultados ·

$$N_{i,x} = -1\ 36603 \tag{3 110}$$

$$N_{i,y} = -2\ 73205 \tag{3 111}$$

$$N_{j,x} = -0\ 45534 \tag{3 112}$$

$$N_{j,y} = -0\ 24402 \tag{3 113}$$

$$N_{k,x} = -0\ 36003 \tag{3 114}$$

$$N_{k\,y} = -0\ 73205 \tag{3 115}$$

$$N_{l\,x} = -0\ 12201 \tag{3 116}$$

$$N_{l,y} = -0\ 91069 \tag{3 117}$$

$$N_{m,x} = 1\ 82137 \tag{3 118}$$

$$N_{m,y} = -1\ 33333 \tag{3 119}$$

$$N_{n,x} = 0\ 66667 \tag{3 120}$$

$$N_{n,y} = 0\ 97607 \tag{3.121}$$

$$N_{o,x} = 0\ 48803 \tag{3.122}$$

$$N_{o,y} = 1\ 33333 \tag{3.123}$$

$$N_{p,x} = -0\ 66667 \tag{3.124}$$

$$N_{p,y} = 3.64273 \tag{3 125}$$

Con los datos obtenidos y ordenados en forma matricial como lo indica la ecuación 3 17 se tiene la matriz de deformaciones B, misma que se muestra en la tabla 3 8 1

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las matrices B asociadas a los demás vértices del elemento finito, se muestran en las tablas 3.8.2 a 3.8.4

Sustituyendo las matrices encontradas en las ecuaciones 3 79 a 3.82 se obtienen las matrices de rigideces asociadas a cada vértice del elemento, mismas que se pueden consultar en las tablas 3.9 1 a 3 9 4

Al sustituir las matrices obtenidas en la ecuación 3 83 se obtiene la matriz de rigideces total del elemento finito número 1, misma que se muestra en la tabla 3.10

Siguiendo el mismo procedimiento se calculan los datos necesarios correspondientes a los demás elementos Debido a la geometría de los elementos se presentan únicamente los datos correspondientes a los elementos 6 y 7, los demás son iguales al elemento número 1 (Tablas 3 11 1 a 3 16)

Una vez conocidas las matrices de rigideces se procede a ensamblarlas, para ello se utilizan los indicadores de ecuación Los indicadores de ecuación son la nueva numeración tanto de renglones como de columnas , es de esta forma como indicarán la posición, dentro de la matriz de rigideces total del continuo, donde se deberá sumar su valor La matriz de rigideces del continuo se puede consultar en la tabla 3 17

Finalmente de acuerdo a la ecuación 3 85, se resuelve el sistema de ecuaciones y se encuentran los desplazamientos de los nodos. (Tabla 3 18)

NODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
dx	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
dy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 3.3 Condiciones de Frontera.

NODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
dx	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dy	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 4 Matriz de Grados de Libertad.

ELEMENTO

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	29	33	37	41	59	63	67	71	0	0	0	0
	30	34	38	42	60	64	68	72	0	0	0	0
	33	37	41	45	63	67	71	75	0	0	0	0
	34	38	42	46	64	68	72	76	0	0	0	0
	5	9	13	17	33	37	41	45	63	67	71	75
	6	10	14	18	34	38	42	46	64	68	72	76
	1	5	9	13	29	33	37	41	59	63	67	71
	2	6	10	14	30	34	38	42	60	64	68	72
	31	35	39	43	61	65	69	73	0	0	0	0
	32	36	40	44	62	66	70	74	0	0	0	0
	21	23	25	27	49	51	55	57	79	81	83	85
	22	24	26	28	50	52	56	58	80	82	84	86
	3	7	11	15	31	35	39	43	61	65	69	73
	4	8	12	16	32	36	40	44	62	66	70	74
	19	21	23	25	47	49	53	55	77	79	81	83
	20	22	24	26	48	50	54	56	78	80	82	84

Tabla 3.5 Matriz de Indicadores de Ecuación.

2,083,333.3750	416,666.6875	0.0000
416,666.6875	2,083,333.3750	0.0000
0.0000	0.0000	833,333.3125

Tabla 3 6 Matrız de Constantes Elásticas. (D)

1	10.00	19	0.00	37	0.00	55	0.00	73	0.00
2	0.00	20	0.00	38	0.00	56	0.00	74	0.00
3	0.00	21	0.00	39	0.00	57	0.00	75	0.00
4	0.00	22	0.00	40	0.00	58	0.00	76	0.00
5	0.00	23	0.00	41	0.00	59	0.00	77	0.00
6	0.00	24	0.00	42	0.00	60	0.00	78	0.00
7	0.00	25	0.00	43	0.00	61	0.00	79	0.00
8	0.00	26	0.00	44	0.00	62	0.00	80	0.00
9	0.00	27	0.00	45	0.00	63	0.00	81	0.00
10	0.00	28	0.00	46	0.00	64	0.00	82	0.00
11	0.00	29	0.00	47	0.00	65	0.00	83	0.00
12	0.00	30	0.00	48	0.00	66	0.00	84	0.00
13	0.00	31	0.00	49	0.00	67	0.00	85	0.00
14	0.00	32	0.00	50	0.00	68	0.00	86	0.00
15	0.00	33	0.00	51	0.00	69	0.00		
16	0.00	34	0.00	52	0.00	70	0.00		
17	0.00	35	0.00	53	0.00	71	0.00		
18	0.00	36	0.00	54	0.00	72	0.00		

Tabla 3 7 Vector de Fuerzas Externas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-1.36603	0.00000	-0.45534	0.00000	-0.36603	0.00000	-0.12201	0.00000	1.82137	0.00000	0.66667	0.00000	0.48803	0.00000	-0.66667	0.00000
0.00000	-2.73205	0.00000	-0.24402	0.00000	-0.73205	0.00000	-0.91068	0.00000	-1.33333	0.00000	0.97607	0.00000	1.33333	0.00000	3.64273
-2.73205	-1.36603	-0.24402	-0.45534	-0.73205	-0.36603	-0.91068	-0.12201	-1.33333	1.82137	0.97607	0.66667	1.33333	0.48803	3.64273	-0.66667

Tabla 3.8.1 Matriz B del Elemento N° 1 correspondiente al vértice i.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.45534	0.00000	1.36603	0.00000	0.12201	0.00000	0.36603	0.00000	-1.82137	0.00000	0.66667	0.00000	-0.48803	0.00000	-0.66667	0.00000
0.00000	-0.24402	0.00000	-2.73205	0.00000	-0.91068	0.00000	-0.73205	0.00000	-1.33333	0.00000	3.64273	0.00000	1.33333	0.00000	0.97607
-0.24402	0.45534	-2.73205	1.36603	-0.91068	0.12201	-0.73205	0.36603	-1.33333	-1.82137	3.64273	0.66667	1.33333	-0.48803	0.97607	-0.66667

Tabla 3 8.2 Matriz B del Elemento N° 1 correspondiente al vértice j.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.36603	0.00000	0.12201	0.00000	1.36603	0.00000	0.45534	0.00000	-0.48803	0.00000	0.66667	0.00000	-1.82137	0.00000	-0.66667	0.00000
0.00000	0.73205	0.00000	0.91068	0.00000	2.73205	0.00000	0.24402	0.00000	-1.33333	0.00000	-3.64273	0.00000	1.33333	0.00000	-0.97607
0.73205	0.36603	0.91068	0.12201	2.73205	1.36603	0.24402	0.45534	-1.33333	-0.48803	-3.64273	0.66667	1.33333	-1.82137	-0.97607	-0.66667

Tabla 3 8.3 Matriz B del Elemento N° 1 correspondiente al vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-0.12201	0.00000	-0.36603	0.00000	-0.45534	0.00000	-1.36603	0.00000	0.48803	0.00000	0.66667	0.00000	1.82137	0.00000	-0.66667	0.00000
0.00000	0.91068	0.00000	0.73205	0.00000	0.24402	0.00000	2.73205	0.00000	-1.33333	0.00000	-0.97607	0.00000	1.33333	0.00000	-3.64274
0.91068	-0.12201	0.73205	-0.36603	0.24402	-0.45534	2.73205	-1.36603	-1.33333	0.48803	-0.97607	0.66667	1.33333	1.82137	-3.64274	-0.66667

Tabla 3 8.4 Matriz B del Elemento N° 1 correspondiente al vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
189,518	87,470	34,714	22,042	50,781	23,438	45,386	14,927	-40,271	-63,522	-77,240	-38,876	-82,959	-35,063	-119,929	-10,417
87,470	320,723	14,927	35,761	23,438	85,938	22,042	99,793	-10,417	103,419	-35,063	-118,396	-38,876	-152,711	-63,522	-374,526
34,714	14,927	9,029	2,604	9,302	4,000	5,642	3,705	-27,313	-2,201	-15,579	-6,014	-13,764	-6,604	-2,031	-10,417
22,042	35,761	2,604	5,566	5,906	9,582	6,712	9,549	6,014	-249	-8,215	-14,047	-10,417	-16,181	-24,646	-29,979
50,781	23,438	9,302	5,906	13,607	6,280	12,161	4,000	-10,791	-17,021	-20,696	-10,417	-22,229	-9,395	-32,135	-2,791
23,438	85,938	4,000	9,582	6,280	23,027	5,906	26,739	-2,791	27,711	-9,395	-31,724	-10,417	-40,919	-17,021	-100,354
45,386	22,042	5,642	6,712	12,161	5,906	13,540	2,604	10,292	-24,646	-17,066	-10,417	-21,299	-8,215	-48,657	6,014
14,927	99,793	3,705	9,549	4,000	26,739	2,604	32,629	-10,417	43,959	-6,604	-35,993	-6,014	-48,362	-2,201	-128,314
-40,271	-10,417	-27,313	6,014	-10,791	-2,791	10,292	-10,417	157,363	-56,918	27,097	0	6,944	8,805	-123,322	65,723
-63,522	103,419	-2,201	-249	-17,021	27,711	-24,646	43,959	-56,918	121,278	20,833	-31,864	32,861	-55,556	110,613	-208,698
-77,240	-35,063	-15,579	-8,215	-20,696	-9,395	-17,066	-6,604	27,097	20,833	32,247	15,251	33,044	14,387	38,194	8,805
-38,876	-118,396	-6,014	-14,047	-10,417	-31,724	-10,417	-35,993	0	-31,864	15,251	44,160	17,610	55,921	32,861	131,944
-82,959	-38,876	-13,764	-10,417	-22,229	-10,417	-21,299	-6,014	6,944	32,861	33,044	17,610	37,082	15,251	63,181	0
-35,063	-152,711	-6,604	-16,181	-9,395	-40,919	-8,215	-48,362	8,805	-55,556	14,387	55,921	15,251	73,166	20,833	184,642
-119,929	-63,522	-2,031	-24,646	-32,135	-17,021	-48,657	-2,201	-123,322	110,613	38,194	32,861	63,181	20,833	224,697	-56,918
-10,417	-374,526	-10,417	-29,979	-2,791	-100,354	6,014	-128,314	65,723	-208,698	8,805	131,944	0	184,642	-56,918	525,285

Tabla 3.9 1 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 1 correspondiente al Vértice ı.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9,029	-2,604	34,714	-14,927	5,642	-3,705	9,302	-4,000	-27,313	2,201	-2,031	10,417	-13,764	6,604	-15,579	6,014
-2,604	5,566	-22,042	35,761	-6,712	9,549	-5,906	9,582	-6,014	-249	24,646	-29,979	10,417	-16,181	8,215	-14,047
34,714	-22,042	189,518	-87,470	45,386	-14,927	50,781	-23,438	-40,271	63,522	-119,929	10,417	-82,959	35,063	-77,240	38,876
-14,927	35,761	-87,470	320,723	-22,042	99,793	-23,438	85,938	10,417	103,419	63,522	-374,526	38,876	-152,711	35,063	-118,396
5,642	-6,712	45,386	-22,042	13,540	-2,604	12,161	-5,906	10,292	24,646	-48,657	-6,014	-21,299	8,215	-17,066	10,417
-3,705	9,549	-14,927	99,793	-2,604	32,629	-4,000	26,739	-10,417	43,959	2,201	-128,314	6,014	-48,362	6,604	-35,993
9,302	-5,906	50,781	-23,438	12,161	-4,000	13,607	-6,280	-10,791	17,021	-32,135	2,791	-22,229	9,395	-20,696	10,417
-4,000	9,582	-23,438	85,938	-5,906	26,739	-6,280	23,027	2,791	27,711	17,021	-100,354	10,417	-40,919	9,395	-31,724
-27,313	-6,014	-40,271	10,417	10,292	10,417	-10,791	2,791	157,363	56,918	-123,322	-65,723	6,944	-8,805	27,097	0
2,201	-249	63,522	103,419	24,646	43,959	17,021	27,711	56,918	121,278	-110,613	-208,698	-32,861	-55,556	-20,833	-31,864
-2,031	24,646	-119,929	63,522	-48,657	2,201	-32,135	17,021	-123,322	-110,613	224,697	56,918	63,181	-20,833	38,194	-32,861
10,417	-29,979	10,417	-374,526	-6,014	-128,314	2,791	-100,354	-65,723	-208,698	56,918	525,285	0	184,642	-8,805	131,944
-13,764	10,417	-82,959	38,876	-21,299	6,014	-22,229	10,417	6,944	-32,861	63,181	0	37,082	-15,251	33,044	-17,610
6,604	-16,181	35,063	-152,711	8,215	-48,362	9,395	-40,919	-8,805	-55,556	-20,833	184,642	-15,251	73,166	-14,387	55,921
-15,579	8,215	-77,240	35,063	-17,066	6,604	-20,696	9,395	27,097	-20,833	38,194	-8,805	33,044	-14,387	32,247	-15,251
6,014	-14,047	38,876	-118,396	10,417	-35,993	10,417	-31,724	0	-31,864	-32,861	131,944	-17,610	55,921	-15,251	44,160

Tabla 3.9.2 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 1 correspondiente al Vértıce ȷ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13,607	6,280	12,161	4,000	50,781	23,438	9,302	5,906	-22,229	-9,395	-32,135	-2,791	-10,791	-17,021	-20,696	-10,417
6,280	23,027	5,906	26,739	23,438	85,938	4,000	9,582	-10,417	-40,919	-17,021	-100,354	-2,791	27,711	-9,395	-31,724
12,161	5,906	13,540	2,604	45,386	22,042	5,642	6,712	-21,299	-8,215	-48,657	6,014	10,292	-24,646	-17,066	-10,417
4,000	26,739	2,604	32,629	14,927	99,793	3,705	9,549	-6,014	-48,362	-2,201	-128,314	-10,417	43,959	-6,604	-35,993
50,781	23,438	45,386	14,927	189,518	87,470	34,714	22,042	-82,959	-35,063	-119,929	-10,417	-40,271	-63,522	-77,240	-38,876
23,438	85,938	22,042	99,793	87,470	320,723	14,927	35,761	-38,876	-152,711	-63,522	-374,526	-10,417	103,419	-35,063	-118,396
9,302	4,000	5,642	3,705	34,714	14,927	9,029	2,604	-13,764	-6,604	-2,031	-10,417	-27,313	-2,201	-15,579	-6,014
5,906	9,582	6,712	9,549	22,042	35,761	2,604	5,566	-10,417	-16,181	-24,646	-29,979	6,014	-249	-8,215	-14,047
-22,229	-10,417	-21,299	-6,014	-82,959	-38,876	-13,764	-10,417	37,082	15,251	63,181	0	6,944	32,861	33,044	17,610
-9,395	-40,919	-8,215	-48,362	-35,063	-152,711	-6,604	-16,181	15,251	73,166	20,833	184,642	8,805	-55,556	14,387	55,921
-32,135	-17,021	-48,657	-2,201	-119,929	-63,522	-2,031	-24,646	63,181	20,833	224,697	-56,918	-123,322	110,613	38,194	32,861
-2,791	-100,354	6,014	-128,314	-10,417	-374,526	-10,417	-29,979	0	184,642	-56,918	525,285	65,723	-208,698	8,805	131,944
-10,791	-2,791	10,292	-10,417	-40,271	-10,417	-27,313	6,014	6,944	8,805	-123,322	65,723	157,363	-56,918	27,097	0
-17,021	27,711	-24,646	43,959	-63,522	103,419	-2,201	-249	32,861	-55,556	110,613	-208,698	-56,918	121,278	20,833	-31,864
-20,696	-9,395	-17,066	-6,604	-77,240	-35,063	-15,579	-8,215	33,044	14,387	38,194	8,805	27,097	20,833	32,247	15,251
-10,417	-31,724	-10,417	-35,993	-38,876	-118,396	-6,014	-14,047	17,610	55,921	32,861	131,944	0	-31,864	15,251	44,160

Tabla 3.9.3 Matriz de Rigideces del Elemento N° 1 correspondiente al vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13,540	-2,604	12,161	-5,906	5,642	-6,712	45,386	-22,042	-21,299	8,215	-17,066	10,417	10,292	24,646	-48,657	-6,014
-2,604	32,629	-4,000	26,739	-3,705	9,549	-14,927	99,793	6,014	-48,362	6,604	-35,993	10,417	43,959	2,201	-128,314
12,161	-4,000	13,607	-6,280	9,302	-5,906	50,781	-23,438	-22,229	9,395	-20,696	10,417	-10,791	17,021	-32,135	2,791
-5,906	26,739	-6,280	23,027	-4,000	9,582	-23,438	85,938	10,417	-40,919	9,395	-31,724	2,791	27,711	17,021	-100,354
5,642	-3,705	9,302	-4,000	9,029	-2,604	34,714	-14,927	-13,764	6,604	-15,579	6,014	-27,313	2,201	-2,031	10,417
-6,712	9,549	-5,906	9,582	-2,604	5,566	-22,042	35,761	10,417	-16,181	8,215	-14,047	-6,014	-249	24,646	-29,979
45,386	-14,927	50,781	-23,438	34,714	-22,042	189,518	-87,470	-82,959	35,063	-77,240	38,876	-40,271	63,522	-119,929	10,417
-22,042	99,793	-23,438	85,938	-14,927	35,761	-87,470	320,723	38,876	-152,711	35,063	-118,396	10,417	103,419	63,522	-374,526
-21,299	6,014	-22,229	10,417	-13,764	10,417	-82,959	38,876	37,082	-15,251	33,044	-17,610	6,944	-32,861	63,181	0
8,215	-48,362	9,395	-40,919	6,604	-16,181	35,063	-152,711	-15,251	73,166	-14,387	55,921	-8,805	-55,556	-20,833	184,642
-17,066	6,604	-20,696	9,395	-15,579	8,215	-77,240	35,063	33,044	-14,387	32,247	-15,251	27,097	-20,833	38,194	-8,805
10,417	-35,993	10,417	-31,724	6,014	-14,047	38,876	-118,396	-17,610	55,921	-15,251	44,160	0	-31,864	-32,861	131,944
10,292	10,417	-10,791	2,791	-27,313	-6,014	-40,271	10,417	6,944	-8,805	27,097	0	157,363	56,918	-123,322	-65,723
24,646	43,959	17,021	27,711	2,201	-249	63,522	103,419	-32,861	-55,556	-20,833	-31,864	56,918	121,278	-110,613	-208,698
-48,657	2,201	-32,135	17,021	-2,031	24,646	-119,929	63,522	63,181	-20,833	38,194	-32,861	-123,322	-110,613	224,697	56,918
-6,014	-128,314	2,791	-100,354	10,417	-29,979	10,417	-374,526	0	184,642	-8,805	131,944	-65,723	-208,698	56,918	525,285

Tabla 3.9 4 Matriz de Rigideces del Elemento N° 1 correspondiente al vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
225,694	88,542	93,750	5,208	112,847	36,458	109,375	-5,208	-111,111	-62,500	-128,472	-20,833	-97,222	-20,833	-204,861	-20,833
88,542	381,944	-5,208	125,000	36,458	190,972	5,208	218,750	-20,833	13,889	-20,833	-284,722	-20,833	-97,222	-62,500	-548,611
93,750	-5,208	225,694	-88,542	109,375	5,208	112,847	-36,458	-111,111	62,500	-204,861	20,833	-97,222	20,833	-128,472	20,833
5,208	125,000	-88,542	381,944	-5,208	218,750	-36,458	190,972	20,833	13,889	62,500	-548,611	20,833	-97,222	20,833	-284,722
112,847	36,458	109,375	-5,208	225,694	88,542	93,750	5,208	-97,222	-20,833	-204,861	-20,833	-111,111	-62,500	-128,472	-20,833
36,458	190,972	5,208	218,750	88,542	381,944	-5,208	125,000	-20,833	-97,222	-62,500	-548,611	-20,833	13,889	-20,833	-284,722
109,375	5,208	112,847	-36,458	93,750	-5,208	225,694	-88,542	-97,222	20,833	-128,472	20,833	-111,111	62,500	-204,861	20,833
-5,208	218,750	-36,458	190,972	5,208	125,000	-88,542	381,945	20,833	-97,222	20,833	-284,722	20,833	13,889	62,500	-548,611
-111,111	-20,833	-111,111	20,833	-97,222	-20,833	-97,222	20,833	388,889	0	0	-83,333	27,778	0	0	83,333
-62,500	13,889	62,500	13,889	-20,833	-97,222	20,833	-97,222	0	388,889	-83,333	0	0	-222,222	83,333	0
-128,472	-20,833	-204,861	62,500	-204,861	-62,500	-128,472	20,833	0	-83,333	513,889	0	0	83,333	152,778	0
-20,833	-284,722	20,833	-548,611	-20,833	-548,611	20,833	-284,722	-83,333	0	0	1,138,889	83,333	0	0	527,778
-97,222	-20,833	-97,222	20,833	-111,111	-20,833	-111,111	20,833	27,778	0	0	83,333	388,889	0	0	-83,333
-20,833	-97,222	20,833	-97,222	-62,500	13,889	62,500	13,889	0	-222,222	83,333	0	0	388,889	-83,333	0
-204,861	-62,500	-128,472	20,833	-128,472	-20,833	-204,861	62,500	0	83,333	152,778	0	0	-83,333	513,889	0
-20,833	-548,611	20,833	-284,722	-20,833	-284,722	20,833	-548,611	83,333	0	0	527,778	-83,333	0	0	1,138,889

Tabla 3 10 Matriz de Rigideces Total del Elemento Finito N° 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-1.63923	0.00000	-0.54641	0.00000	-0.43923	0.00000	-0.14641	0.00000	2.18564	0.00000	0.80000	0.00000	0.58564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	-3.13205	0.00000	-0.37735	0.00000	-0.83923	0.00000	-0.94641	0.00000	-0.80000	0.00000	1.17128	0.00000	1.47624	0.00000	3.44752
-3.13205	-1.63923	-0.37735	-0.54641	-0.83923	-0.43923	-0.94641	-0.14641	-0.80000	2.18564	1.17128	0.80000	1.47624	0.58564	3.44752	-0.80000

Tabla 3 11 1 Matriz B del Elemento N° 6 correspondiente al vértice i.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.54641	0.00000	1.63923	0.00000	0.14641	0.00000	0.43923	0.00000	-2.18564	0.00000	0.80000	0.00000	-0.58564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	0.25359	0.00000	-1.23923	0.00000	-0.77735	0.00000	-0.33205	0.00000	-3.32376	0.00000	4.37128	0.00000	0.80000	0.00000	0.24752
0.25359	0.54641	-1.23923	1.63923	-0.77735	0.14641	-0.33205	0.43923	-3.32376	-2.18564	4.37128	0.80000	0.80000	-0.58564	0.24752	-0.80000

Tabla 3 11.2 Matriz B del Elemento N° 6 correspondiente al vértice j.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.43923	0.00000	0.14641	0.00000	1.63923	0.00000	0.54641	0.00000	-0.58564	0.00000	0.80000	0.00000	-2.18564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	0.33205	0.00000	0.77735	0.00000	1.23923	0.00000	-0.25359	0.00000	-0.80000	0.00000	-4.37128	0.00000	3.32376	0.00000	-0.24752
0.33205	0.43923	0.77735	0.14641	1.23923	1.63923	-0.25359	0.54641	-0.80000	-0.58564	-4.37128	0.80000	3.32376	-2.18564	-0.24752	-0.80000

Tabla 3 11.3 Matriz B del Elemento N° 6 correspondiente al vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-0.14641	0.00000	-0.43923	0.00000	-0.54641	0.00000	-1.63923	0.00000	0.58564	0.00000	0.80000	0.00000	2.18564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	0.94641	0.00000	0.83923	0.00000	0.37735	0.00000	3.13205	0.00000	-1.47624	0.00000	-1.17128	0.00000	0.80000	0.00000	-3.44752
0.94641	-0.14641	0.83923	-0.43923	0.37735	-0.54641	3.13205	-1.63923	-1.47624	0.58564	-1.17128	0.80000	0.80000	2.18564	-3.44752	-0.80000

Tabla 3 11 4 Matriz B del Elemento N° 6 correspondiente al vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
215,201	100,276	44,546	26,311	57,663	26,869	46,409	16,071	-84,001	-80,597	-90,455	-45,126	-91,454	-39,638	-97,908	-4,167
100,276	354,316	19,196	50,135	26,869	94,939	23,186	99,616	-27,492	34,913	-41,313	-136,493	-43,451	-163,010	-57,272	-334,416
44,546	19,196	11,573	4,027	11,936	5,144	7,254	4,086	-34,945	-7,893	-19,984	-8,097	-17,670	-8,129	-2,710	-8,333
26,311	50,135	4,027	8,523	7,050	13,434	7,093	12,667	322	-5,723	-10,299	-20,079	-11,942	-22,300	-22,563	-36,656
57,663	26,869	11,936	7,050	15,451	7,200	12,435	4,306	-22,508	-21,596	-24,237	-12,091	-24,505	-10,621	-26,234	-1,116
26,869	94,939	5,144	13,434	7,200	25,439	6,213	26,692	-7,366	9,355	-11,070	-36,573	-11,643	-43,678	-15,346	-89,606
46,409	23,186	7,254	7,093	12,435	6,213	12,360	2,706	-558	-26,171	-18,247	-10,975	-20,983	-8,624	-38,671	6,572
16,071	99,616	4,086	12,667	4,306	26,692	2,706	29,436	-11,942	20,479	-7,162	-37,609	-6,423	-46,596	-1,643	-104,685
-84,001	-27,492	-34,945	322	-22,508	-7,366	-558	-11,942	163,835	-34,151	44,717	8,333	26,289	14,906	-92,829	57,390
-80,597	34,913	-7,893	-5,723	-21,596	9,355	-26,171	20,479	-34,151	83,034	29,167	-7,735	38,962	-21,777	102,279	-112,546
-90,455	-41,313	-19,984	-10,299	-24,237	-11,070	-18,247	-7,162	44,717	29,167	38,697	18,301	37,765	16,620	31,745	5,755
-45,126	-136,493	-8,097	-20,079	-12,091	-36,573	-10,975	-37,609	8,333	-7,735	18,301	52,992	19,843	62,386	29,811	123,113
-91,454	-43,451	-17,670	-11,942	-24,505	-11,643	-20,983	-6,423	26,289	38,962	37,765	19,843	39,541	16,886	51,017	-2,233
-39,638	-163,010	-8,129	-22,300	-10,621	-43,678	-8,624	-46,596	14,906	-21,777	16,620	62,386	16,886	75,406	18,600	159,569
-97,908	-57,272	-2,710	-22,563	-26,234	-15,346	-38,671	-1,643	-92,829	102,279	31,745	29,811	51,017	18,600	175,591	-53,868
-4,167	-334,416	-8,333	-36,656	-1,116	-89,606	6,572	-104,685	57,390	-112,546	5,755	123,113	-2,233	159,569	-53,868	395,228

Tabla 3 12.1 Matriz de Rigideces Del Elemento N° 6 correspondiente al vértice 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10,556	2,706	25,065	1,004	37	-2,282	6,716	269	-49,850	-19,041	28,663	18,192	-7,775	912	-13,412	-1,761
2,706	5,981	-6,110	1,433	-5,289	-5,375	-1,637	384	-27,256	-42,987	32,421	41,776	4,725	2,437	440	-3,649
25,065	-6,110	107,466	-39,675	20,356	-10,658	28,795	-10,631	-62,995	-204	-27,846	33,742	-44,159	17,987	-46,682	15,550
1,004	1,433	-39,675	84,978	-17,773	34,483	-10,631	22,770	-53,309	87,428	86,847	-159,260	21,800	-44,772	11,737	-27,060
37	-5,289	20,356	-17,773	8,566	-2,223	5,454	-4,762	23,226	18,954	-40,432	-3,931	-10,889	6,690	-6,318	8,333
-2,282	-5,375	-10,658	34,483	-2,223	19,949	-2,856	9,240	4,725	79,939	4,285	-109,087	4,489	-21,360	4,521	-7,788
6,716	-1,637	28,795	-10,631	5,454	-2,856	7,716	-2,849	-16,879	-55	-7,461	9,041	-11,832	4,820	-12,508	4,167
269	384	-10,631	22,770	-4,762	9,240	-2,849	6,101	-14,284	23,426	23,271	-42,674	5,841	-11,997	3,145	-7,251
-49,850	-27,256	-62,995	-53,309	23,226	4,725	-16,879	-14,284	299,348	141,886	-246,099	-96,823	7,044	13,962	46,205	31,100
-19,041	-42,987	-204	87,428	18,954	79,939	-55	23,426	141,886	421,816	-141,713	-495,719	-10,094	-69,890	10,267	-4,014
28,663	32,421	-27,846	86,847	-40,432	4,285	-7,461	23,271	-246,099	-141,713	269,637	68,301	30,283	-29,167	-6,745	-44,245
18,192	41,776	33,742	-159,260	-3,931	-109,087	9,041	-42,674	-96,823	-495,719	68,301	630,342	-8,333	107,735	-20,189	26,887
-7,775	4,725	-44,159	21,800	-10,889	4,489	-11,832	5,841	7,044	-10,094	30,283	-8,333	19,498	-9,151	17,829	-9,277
912	2,437	17,987	-44,772	6,690	-21,360	4,820	-11,997	13,962	-69,890	-29,167	107,735	-9,151	25,299	-6,054	12,546
-13,412	440	-46,682	11,737	-6,318	4,521	-12,508	3,145	46,205	10,267	-6,745	-20,189	17,829	-6,054	21,631	-3,868
-1,761	-3,649	15,550	-27,060	8,333	-7,788	4,167	-7,251	31,100	-4,014	-44,245	26,887	-9,277	12,546	-3,868	10,328

Tabla 3.12.2Matrız de Rıgıdeces Del Elemento Nº 6 correspondiente al Vértice j.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7,716	2,849	5,454	2,856	28,795	10,631	6,716	1,637	-11,832	-4,820	-7,461	-9,041	-16,879	55	-12,508	-4,167
2,849	6,101	4,762	9,240	10,631	22,770	-269	384	-5,841	-11,997	-23,271	-42,674	14,284	23,426	-3,145	-7,251
5,454	4,762	8,566	2,223	20,356	17,773	37	5,289	-10,889	-6,690	-40,432	3,931	23,226	-18,954	-6,318	-8,333
2,856	9,240	2,223	19,949	10,658	34,483	2,282	-5,375	-4,489	-21,360	-4,285	-109,087	-4,725	79,939	-4,521	-7,788
28,795	10,631	20,356	10,658	107,466	39,675	25,065	6,110	-44,159	-17,987	-27,846	-33,742	-62,995	204	-46,682	-15,550
10,631	22,770	17,773	34,483	39,675	84,978	-1,004	1,433	-21,800	-44,772	-86,847	-159,260	53,309	87,428	-11,737	-27,060
6,716	-269	37	2,282	25,065	-1,004	10,556	-2,706	-7,775	-912	28,663	-18,192	-49,850	19,041	-13,412	1,761
1,637	384	5,289	-5,375	6,110	1,433	-2,706	5,981	-4,725	2,437	-32,421	41,776	27,256	-42,987	-440	-3,649
-11,832	-5,841	-10,889	-4,489	-44,159	-21,800	-7,775	-4,725	19,498	9,151	30,283	8,333	7,044	10,094	17,829	9,277
-4,820	-11,997	-6,690	-21,360	-17,987	-44,772	-912	2,437	9,151	25,299	29,167	107,735	-13,962	-69,890	6,054	12,546
-7,461	-23,271	-40,432	-4,285	-27,846	-86,847	28,663	-32,421	30,283	29,167	269,637	-68,301	-246,099	141,713	-6,745	44,245
-9,041	-42,674	3,931	-109,087	-33,742	-159,260	-18,192	41,776	8,333	107,735	-68,301	630,342	96,823	-495,719	20,189	26,887
-16,879	14,284	23,226	-4,725	-62,995	53,309	-49,850	27,256	7,044	-13,962	-246,099	96,823	299,348	-141,886	46,205	-31,100
55	23,426	-18,954	79,939	204	87,428	19,041	-42,987	10,094	-69,890	141,713	-495,719	-141,886	421,816	-10,267	-4,014
-12,508	-3,145	-6,318	-4,521	-46,682	-11,737	-13,412	-440	17,829	6,054	-6,745	20,189	46,205	-10,267	21,631	3,868
-4,167	-7,251	-8,333	-7,788	-15,550	-27,060	1,761	-3,649	9,277	12,546	44,245	26,887	-31,100	-4,014	3,868	10,328

Tabla 3 12.3 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento Nº 6 correspondiente al Vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12,360	-2,706	12,435	-6,213	7,254	-7,093	46,409	-23,186	-20,983	8,624	-18,247	10,975	-558	26,171	-38,671	-6,572
-2,706	29,436	-4,306	26,692	-4,086	12,667	-16,071	99,616	6,423	-46,596	7,162	-37,609	11,942	20,479	1,643	-104,685
12,435	-4,306	15,451	-7,200	11,936	-7,050	57,663	-26,869	-24,505	10,621	-24,237	12,091	-22,508	21,596	-26,234	1,116
-6,213	26,692	-7,200	25,439	-5,144	13,434	-26,869	94,939	11,643	-43,678	11,070	-36,573	7,366	9,355	15,346	-89,606
7,254	-4,086	11,936	-5,144	11,573	-4,027	44,546	-19,196	-17,670	8,129	-19,984	8,097	-34,945	7,893	-2,710	8,333
-7,093	12,667	-7,050	13,434	-4,027	8,523	-26,311	50,135	11,942	-22,300	10,299	-20,079	-322	-5,723	22,563	-36,656
46,409	-16,071	57,663	-26,869	44,546	-26,311	215,201	-100,276	-91,454	39,638	-90,455	45,126	-84,001	80,597	-97,908	4,167
-23,186	99,616	-26,869	94,939	-19,196	50,135	-100,276	354,316	43,451	-163,010	41,313	-136,493	27,492	34,913	57,272	-334,416
-20,983	6,423	-24,505	11,643	-17,670	11,942	-91,454	43,451	39,541	-16,886	37,765	-19,843	26,289	-38,962	51,017	2,233
8,624	-46,596	10,621	-43,678	8,129	-22,300	39,638	-163,010	-16,886	75,406	-16,620	62,386	-14,906	-21,777	-18,600	159,569
-18,247	7,162	-24,237	11,070	-19,984	10,299	-90,455	41,313	37,765	-16,620	38,697	-18,301	44,717	-29,167	31,745	-5,755
10,975	-37,609	12,091	-36,573	8,097	-20,079	45,126	-136,493	-19,843	62,386	-18,301	52,992	-8,333	-7,735	-29,811	123,113
-558	11,942	-22,508	7,366	-34,945	-322	-84,001	27,492	26,289	-14,906	44,717	-8,333	163,835	34,151	-92,829	-57,390
26,171	20,479	21,596	9,355	7,893	-5,723	80,597	34,913	-38,962	-21,777	-29,167	-7,735	34,151	83,034	-102,279	-112,546
-38,671	1,643	-26,234	15,346	-2,710	22,563	-97,908	57,272	51,017	-18,600	31,745	-29,811	-92,829	-102,279	175,591	53,868
-6,572	-104,685	1,116	-89,606	8,333	-36,656	4,167	-334,416	2,233	159,569	-5,755	123,113	-57,390	-112,546	53,868	395,228

Tabla 3 12.4 Matriz de Rigideces Del Elemento N° 6 correspondiente al Vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
245,833	103,125	87,500	23,958	93,750	28,125	106,250	-5,208	-166,667	-95,833	-87,500	-25,000	-116,667	-12,500	-162,500	-16,667
103,125	395,833	13,542	87,500	28,125	125,000	5,208	200,000	-54,167	-66,667	-25,000	-175,000	-12,500	-116,667	-58,333	-450,000
87,500	13,542	143,056	-40,625	64,583	5,208	93,750	-28,125	-133,333	-4,167	-112,500	41,667	-61,111	12,500	-81,944	0
23,958	87,500	-40,625	138,889	-5,208	95,833	-28,125	125,000	-45,833	16,667	83,333	-325,000	12,500	22,222	0	-161,111
93,750	28,125	64,583	-5,208	143,056	40,625	87,500	-13,542	-61,111	-12,500	-112,500	-41,667	-133,333	4,167	-81,944	0
28,125	125,000	5,208	95,833	40,625	138,889	-23,958	87,500	-12,500	22,222	-83,333	-325,000	45,833	16,667	0	-161,111
106,250	5,208	93,750	-28,125	87,500	-23,958	245,833	-103,125	-116,667	12,500	-87,500	25,000	-166,667	95,833	-162,500	16,667
-5,208	200,000	-28,125	125,000	-13,542	87,500	-103,125	395,833	12,500	-116,667	25,000	-175,000	54,167	-66,667	58,333	-450,000
-166,667	-54,167	-133,333	-45,833	-61,111	-12,500	-116,667	12,500	522,222	100,000	-133,333	-100,000	66,667	0	22,222	100,000
-95,833	-66,667	-4,167	16,667	-12,500	22,222	12,500	-116,667	100,000	605,556	-100,000	-333,333	0	-183,333	100,000	55,556
-87,500	-25,000	-112,500	83,333	-112,500	-83,333	-87,500	25,000	-133,333	-100,000	616,667	0	-133,333	100,000	50,000	0
-25,000	-175,000	41,667	-325,000	-41,667	-325,000	25,000	-175,000	-100,000	-333,333	0	1,366,667	100,000	-333,333	0	300,000
-116,667	-12,500	-61,111	12,500	-133,333	45,833	-166,667	54,167	66,667	0	-133,333	100,000	522,222	-100,000	22,222	-100,000
-12,500	-116,667	12,500	22,222	4,167	16,667	95,833	-66,667	0	-183,333	100,000	-333,333	-100,000	605,556	-100,000	55,556
-162,500	-58,333	-81,944	0	-81,944	0	-162,500	58,333	22,222	100,000	50,000	0	22,222	-100,000	394,444	0
-16,667	-450,000	0	-161,111	0	-161,111	16,667	-450,000	100,000	55,556	0	300,000	-100,000	55,556	0	811,111

Tabla 3 13 Matriz de Rigideces Total del Elemento Finito N° 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-1.63923	0.00000	-0.54641	0.00000	-0.43923	0.00000	-0.14641	0.00000	2.18564	0.00000	0.80000	0.00000	0.58564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	-1.23923	0.00000	0.25359	0.00000	-0.33205	0.00000	-0.77735	0.00000	-3.32376	0.00000	0.24752	0.00000	0.80000	0.00000	4.37128
-1.23923	-1.63923	0.25359	-0.54641	-0.33205	-0.43923	-0.77735	-0.14641	-3.32376	2.18564	0.24752	0.80000	0.80000	0.58564	4.37128	-0.80000

Tabla 3 14 1 Matrız B del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice ı.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.54641	0.00000	1.63923	0.00000	0.14641	0.00000	0.43923	0.00000	-2.18564	0.00000	0.80000	0.00000	-0.58564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	-0.37735	0.00000	-3.13205	0.00000	-0.94641	0.00000	-0.83923	0.00000	-0.80000	0.00000	3.44752	0.00000	1.47624	0.00000	1.17128
-0.37735	0.54641	-3.13205	1.63923	-0.94641	0.14641	-0.83923	0.43923	-0.80000	-2.18564	3.44752	0.80000	1.47624	-0.58564	1.17128	-0.80000

Tabla 3 14.2 Matrız B del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice ȷ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.43923	0.00000	0.14641	0.00000	1.63923	0.00000	0.54641	0.00000	-0.58564	0.00000	0.80000	0.00000	-2.18564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	0.83923	0.00000	0.94641	0.00000	3.13205	0.00000	0.37735	0.00000	-1.47624	0.00000	-3.44752	0.00000	0.80000	0.00000	-1.17128
0.83923	0.43923	0.94641	0.14641	3.13205	1.63923	0.37735	0.54641	-1.47624	-0.58564	-3.44752	0.80000	0.80000	-2.18564	-1.17128	-0.80000

Tabla 3 14.3 Matrız B del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-0.14641	0.00000	-0.43923	0.00000	-0.54641	0.00000	-1.63923	0.00000	-0.58564	0.00000	0.80000	0.00000	2.18564	0.00000	-0.80000	0.00000
0.00000	0.77735	0.00000	0.33205	0.00000	-0.25359	0.00000	1.23923	0.00000	-0.80000	0.00000	-0.24752	0.00000	3.32376	0.00000	-4.37128
0.77735	-0.14641	0.33205	-0.43923	-0.25359	-0.54641	1.23923	-1.63923	-0.80000	0.58564	-0.24752	0.80000	3.32376	2.18564	-4.37128	-0.80000

Tabla 3 14 4 Matrız B del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
107,466	39,675	25,065	6,110	28,795	10,631	20,356	10,658	-62,995	204	-46,682	-15,550	-44,159	-17,987	-27,846	-33,742
39,675	84,978	-1,004	1,433	10,631	22,770	17,773	34,483	53,309	87,428	-11,737	-27,060	-21,800	-44,772	-86,847	-159,260
25,065	-1,004	10,556	-2,706	6,716	-269	37	2,282	-49,850	19,041	-13,412	1,761	-7,775	-912	28,663	-18,192
6,110	1,433	-2,706	5,981	1,637	384	5,289	-5,375	27,256	-42,987	-440	-3,649	-4,725	2,437	-32,421	41,776
28,795	10,631	6,716	1,637	7,716	2,849	5,454	2,856	-16,879	55	-12,508	-4,167	-11,832	-4,820	-7,461	-9,041
10,631	22,770	-269	384	2,849	6,101	4,762	9,240	14,284	23,426	-3,145	-7,251	-5,841	-11,997	-23,271	-42,674
20,356	17,773	37	5,289	5,454	4,762	8,566	2,223	23,226	-18,954	-6,318	-8,333	-10,889	-6,690	-40,432	3,931
10,658	34,483	2,282	-5,375	2,856	9,240	2,223	19,949	-4,725	79,939	-4,521	-7,788	-4,489	-21,360	-4,285	-109,087
-62,995	53,309	-49,850	27,256	-16,879	14,284	23,226	-4,725	299,348	-141,886	46,205	-31,100	7,044	-13,962	-246,099	96,823
204	87,428	19,041	-42,987	55	23,426	-18,954	79,939	-141,886	421,816	-10,267	-4,014	10,094	-69,890	141,713	-495,719
-46,682	-11,737	-13,412	-440	-12,508	-3,145	-6,318	-4,521	46,205	-10,267	21,631	3,868	17,829	6,054	-6,745	20,189
-15,550	-27,060	1,761	-3,649	-4,167	-7,251	-8,333	-7,788	-31,100	-4,014	3,868	10,328	9,277	12,546	44,245	26,887
-44,159	-21,800	-7,775	-4,725	-11,832	-5,841	-10,889	-4,489	7,044	10,094	17,829	9,277	19,498	9,151	30,283	8,333
-17,987	-44,772	-912	2,437	-4,820	-11,997	-6,690	-21,360	-13,962	-69,890	6,054	12,546	9,151	25,299	29,167	107,735
-27,846	-86,847	28,663	-32,421	-7,461	-23,271	-40,432	-4,285	-246,099	141,713	-6,745	44,245	30,283	29,167	269,637	-68,301
-33,742	-159,260	-18,192	41,776	-9,041	-42,674	3,931	-109,087	96,823	-495,719	20,189	26,887	8,333	107,735	-68,301	630,342

Tabla 3 15 1 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice ı.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11,573	-4,027	44,546	-19,196	7,254	-4,086	11,936	-5,144	-34,945	7,893	-2,710	8,333	-17,670	8,129	-19,984	8,097
-4,027	8,523	-26,311	50,135	-7,093	12,667	-7,050	13,434	-322	-5,723	22,563	-36,656	11,942	-22,300	10,299	-20,079
44,546	-26,311	215,201	-100,276	46,409	-16,071	57,663	-26,869	-84,001	80,597	-97,908	4,167	-91,454	39,638	-90,455	45,126
-19,196	50,135	-100,276	354,316	-23,186	99,616	-26,869	94,939	27,492	34,913	57,272	-334,416	43,451	-163,010	41,313	-136,493
7,254	-7,093	46,409	-23,186	12,360	-2,706	12,435	-6,213	-558	26,171	-38,671	-6,572	-20,983	8,624	-18,247	10,975
-4,086	12,667	-16,071	99,616	-2,706	29,436	-4,306	26,692	11,942	20,479	1,643	-104,685	6,423	-46,596	7,162	-37,610
11,936	-7,050	57,663	-26,869	12,435	-4,306	15,451	-7,200	-22,508	21,596	-26,234	1,116	-24,505	10,621	-24,237	12,091
-5,144	13,434	-26,869	94,939	-6,213	26,692	-7,200	25,439	7,366	9,355	15,346	-89,606	11,643	-43,678	11,070	-36,573
-34,945	-322	-84,001	27,492	-558	11,942	-22,508	7,366	163,835	34,151	-92,829	-57,390	26,289	-14,906	44,717	-8,333
7,893	-5,723	80,597	34,913	26,171	20,479	21,596	9,355	34,151	83,034	-102,279	-112,546	-38,962	-21,777	-29,167	-7,735
-2,710	22,563	-97,908	57,272	-38,671	1,643	-26,234	15,346	-92,829	-102,279	175,591	53,868	51,017	-18,600	31,745	-29,811
8,333	-36,656	4,167	-334,416	-6,572	-104,685	1,116	-89,606	-57,390	-112,546	53,868	395,228	2,233	159,569	-5,755	123,113
-17,670	11,942	-91,454	43,451	-20,983	6,423	-24,505	11,643	26,289	-38,962	51,017	2,233	39,541	-16,886	37,765	-19,843
8,129	-22,300	39,638	-163,010	8,624	-46,596	10,621	-43,678	-14,906	-21,777	-18,600	159,569	-16,886	75,406	-16,620	62,386
-19,984	10,299	-90,455	41,313	-18,247	7,162	-24,237	11,070	44,717	-29,167	31,745	-5,755	37,765	-16,620	38,697	-18,301
8,097	-20,079	45,126	-136,493	10,975	-37,610	12,091	-36,573	-8,333	-7,735	-29,811	123,113	-19,843	62,386	-18,301	52,992

Tabla 3 15.2 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice ȷ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15,451	7,200	12,435	4,306	57,663	26,869	11,936	7,050	-24,505	-10,621	-26,234	-1,116	-22,508	-21,596	-24,237	-12,091
7,200	25,439	6,213	26,692	26,869	94,939	5.144	13,434	-11,643	-43,678	-15,346	-89,606	-7,366	9,355	-11,070	-36,573
12,435	6,213	12,360	2,706	46,409	23,186	7,254	7,093	-20,983	-8,624	-38,671	6,572	-558	-26,171	-18,247	-10,975
4,306	26,692	2,706	29,436	16,071	99,616	4,086	12,667	-6,423	-46,596	-1,643	-104,685	-11,942	20,479	-7,162	-37,610
57,663	26,869	46,409	16,071	215,201	100,276	44,546	26,311	-91,454	-39,638	-97,908	-4,167	-84,001	-80,597	-90,455	-45,126
26,869	94,939	23,186	99,616	100,276	354,316	19,196	50,135	-43,451	-163,010	-57,272	-334,416	-27,492	34,913	-41,313	-136,493
11,936	5,144	7,254	4,086	44,546	19,196	11,573	4,027	-17,670	-8,129	-2,710	-8,333	-34,945	-7,893	-19,984	-8,097
7,050	13,434	7,093	12,667	26,311	50.135	4.027	8,523	-11,942	-22,300	-22,563	-36,656	322	-5,723	-10,299	-20,079
-24,505	-11,643	-20,983	-6,423	-91,454	-43,45¹	-17,670	-11,942	39,541	16,886	51,017	-2,233	26,289	38,962	37,765	19,843
-10,621	-43,678	-8,624	-46,596	-39,638	-163,010	-8,129	-22,300	16,886	75,406	18,600	159,569	14,906	-21,777	16,620	62,386
-26,234	-15,346	-38,671	-1,643	-97,908	-57,272	-2,710	-22,563	51,017	18,600	175,591	-53.868	-92,829	102,279	31,745	29,811
-1,116	-89,606	6,572	-104,685	-4,167	-334,416	-8,333	-36,656	-2,233	159,569	-53,868	395,228	57,390	-112,546	5,755	123,113
-22,508	-7,366	-558	-11,942	-84,001	-27,492	-34,945	322	26,289	14,906	-92,829	57,390	163,835	-34,151	44,717	8,333
-21,596	9,355	-26,171	20,479	-80,597	34,913	-7,893	-5,723	38,962	-21.777	102,279	-112,546	-34,151	83,034	29,167	-7,735
-24,237	-11,070	-18,247	-7,162	-90,455	-41,313	-19,984	-10,299	37,765	16,620	31,745	5,755	44,717	29,167	38,697	18,301
-12,091	-36,573	-10,975	-37,610	-45,126	-136,493	-8,097	-20,079	19,843	62,386	29,811	123,113	8,333	-7,735	18,301	52,992

Tabla 3 15.3 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8,566	-2,223	5,454	-4,762	37	-5,289	20,356	-17,773	-10,889	6,690	-6,318	8,333	23,226	18,954	-40,432	-3,931
-2,223	19,949	-2,856	9,240	-2,282	-5,375	-10,658	34,483	4,489	-21,360	4,521	-7,788	4,725	79,939	4,285	-109,087
5,454	-2,856	7,716	-2,849	6,716	-1,637	28,795	-10,631	-11,832	4,820	-12,508	4,167	-16,879	-55	-7,461	9,041
-4,762	9,240	-2,849	6,101	269	384	-10,631	22,770	5,841	-11,997	3,145	-7,251	-14,284	23,426	23,271	-42,674
37	-2,282	6,716	269	10,556	2,706	25,065	1,004	-7,775	912	-13,412	-1,761	-49,850	-19,041	28,663	18,192
-5,289	-5,375	-1,637	384	2,706	5,981	-6,110	1,433	4,725	2,437	440	-3,649	-27,256	-42,987	32,421	41,776
20,356	-10,658	28,795	-10,631	25,065	-6,110	107,466	-39,675	-44,159	17,987	-46,682	15,550	-62,995	-204	-27,846	33,742
-17,773	34,483	-10,631	22,770	1,004	1,433	-39,675	84,978	21,800	-44,772	11,737	-27,060	-53,309	87,428	86,847	-159,260
-10,889	4,489	-11,832	5,841	-7,775	4,725	-44,159	21,800	19,498	-9,151	17,829	-9,277	7,044	-10,094	30,283	-8,333
6,690	-21,360	4,820	-11,997	912	2,437	17,987	-44,772	-9,151	25,299	-6,054	12,546	13,962	-69,890	-29,167	107,735
-6,318	4,521	-12,508	3,145	-13,412	440	-46,682	11,737	17,829	-6,054	21,631	-3,868	46,205	10,267	-6,745	-20,189
8,333	-7,788	4,167	-7,251	-1,761	-3,649	15,550	-27,060	-9,277	12,546	-3,868	10,328	31,100	-4,014	-44,245	26,887
23,226	4,725	-16,879	-14,284	-49,850	-27,256	-62,995	-53,309	7,044	13,962	46,205	31,100	299,348	141,886	-246,099	-96,823
18,954	79,939	-55	23,426	-19,041	-42,987	-204	87,428	-10,094	-69,890	10,267	-4,014	141,886	421,816	-141,713	-495,719
-40,432	4,285	-7,461	23,271	28,663	32,421	-27,846	86,847	30,283	-29,167	-6,745	-44,245	-246,099	-141,713	269,637	68,301
-3,931	-109,087	9,041	-42,674	18,192	41,776	33,742	-159,260	-8,333	107,735	-20,189	26,887	-96,823	-495,719	68,301	630,342

Tabla 3 15 4 Matrız de Rıgıdeces Del Elemento N° 7 correspondiente al Vértice l.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
143,056	40,625	87,500	-13,542	93,750	28,125	64,583	-5,208	-133.333	4,167	-81,944	0	-61,111	-12,500	-112,500	-41,667
40,625	138,889	-23,958	87,500	28,125	125,000	5,208	95,833	45,833	16,667	0	-161,111	-12,500	22,222	-83,333	-325,000
87,500	-23,958	245,833	-103,125	106,250	5,208	93,750	-28,125	-166,667	95,833	-162,500	16,667	-116,667	12,500	-87,500	25,000
-13,542	87,500	-103,125	395,833	-5,208	200,000	-28,125	125,000	54,167	-66,667	58,333	-450,000	12,500	-116,667	25,000	-175,000
93,750	28,125	106,250	-5,208	245,833	103,125	87,500	23,958	-116,667	-12,500	-162,500	-16,667	-166,667	-95,833	-87,500	-25,000
28,125	125,000	5,208	200,000	103,125	395,833	13,542	87,500	-12,500	-116,667	-58,333	-450,000	-54,167	-66,667	-25,000	-175,000
64,583	5,208	93,750	-28,125	87,500	13,542	143,056	-40,625	-61,111	12,500	-81,944	0	-133,333	-4,167	-112,500	41,667
-5,208	95,833	-28,125	125,000	23,958	87,500	-40,625	138,889	12,500	22,222	0	-161,111	-45,833	16,667	83,333	-325,000
133,333	45,833	-166,667	54,167	-116,667	-12,500	-61,111	12,500	522,222	-100,000	22,222	-100,000	66,667	0	-133,333	100,000
4,167	16,667	95,833	-66,667	-12,500	-116,66	12,500	22,222	-100,000	605,556	-100,000	55,556	0	-183,333	100,000	-333,333
-81,944	0	-162,500	58,333	-162,500	-58,333	-81,944	0	22,222	-100,000	394,444	0	22,222	100,000	50,000	0
0	-161,111	16,667	-450,000	-16,667	-450,000	0	-161,111	-100,000	55,556	0	811,111	100,000	55,556	0	300,000
61,111	-12,500	-116,667	12,500	-166,667	-54,167	-133,333	-45,833	66,667	0	22,222	100,000	522,222	100,000	-133,333	-100,000
12,500	22,222	12,500	-116,667	-95,833	-66,667	-4,167	16,667	0	-183,333	100,000	55,556	100,000	605,556	-100,000	-333,333
-112,500	-83,333	-87,500	25,000	-87,500	-25,000	-112,500	83,333	-133,333	100,000	50,000	0	-133,333	-100,000	616,667	0
-41,667	-325,000	25,000	-175,000	-25,000	-175,000	41,667	-325,000	100,000	-333,333	0	300,000	-100,000	-333,333	0	1,366,667

Tabla 3 16 Matriz de Rigideces Total del Elemento Finito N° 7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	225694	-88542	-111111	62500	93750	-5208	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-88542	381945	20833	13889	5208	125000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-111111	20833	388889	0	-111111	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	62500	13889	0	388889	-62500	13889	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	93750	5208	-111111	-62500	451389	0	-111111	62500	93750	-5208	0	0	0	0	0	0
6	-5208	125000	-20833	13889	0	763889	20833	13889	5208	125000	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-111111	20833	388889	0	-111111	-20833	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	62500	13889	0	388889	-62500	13889	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	93750	5208	-111111	-62500	451389	0	-111111	62500	93750	-5208	0	0
10	0	0	0	0	-5208	125000	-20833	13889	0	763889	20833	13889	5208	125000	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-111111	20833	388889	0	-111111	-20833	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	62500	13889	0	388889	-62500	13889	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	93750	5208	-111111	-62500	451389	0	-111111	62500
14	0	0	0	0	0	0	0	0	-5208	125000	-20833	13889	0	763889	20833	13889
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-111111	20833	388889	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	62500	13889	0	388889
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	93750	5208	-111111	-62500
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5208	125000	-20833	13889
19	-204861	62500	0	-83333	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20833	-548611	-83333	0	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	-128472	20833	0	83333	-409722	0	0	-83333	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0
22	20833	-284722	83333	0	0	-1097222	-83333	0	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333	-409722	0	0	-83333	-128472	-20833	0	0
24	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0	0	-1097222	-83333	0	-20833	-284722	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333	-409722	0	0	-83333
26	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0	0	-1097222	-83333	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0
29	109375	-5208	-97222	-20833	112847	36458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	5208	218750	-20833	-97222	36458	190972	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	-97222	20833	27778	0	-97222	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	20833	-97222	0	-222222	-20833	-97222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	112847	-36458	-97222	20833	218750	0	-97222	-20833	112847	36458	0	0	0	0	0	0
34	-36458	190972	20833	-97222	0	437500	-20833	-97222	36458	190972	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	-97222	20833	27778	0	-97222	-20833	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	20833	-97222	0	-222222	-20833	-97222	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	112847	-36458	-97222	20833	218750	0	-97222	-20833	112847	36458	0	0
38	0	0	0	0	-36458	190972	20833	-97222	0	437500	-20833	-97222	36458	190972	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	20833	27778	0	-97222	-20833	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-97222	0	-222222	-20833	-97222	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	112847	-36458	-97222	20833	218750	0	-97222	-20833
42	0	0	0	0	0	0	0	0	-36458	190972	20833	-97222	0	437500	-20833	-97222
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	20833	27778	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigideces Total del Continuo.

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	0	0	-204861	20833	-128472	20833	0	0	0	0	0	0	109375	5208	-97222	20833
2	0	0	62500	-548611	20833	-284722	0	0	0	0	0	0	-5208	218750	20833	-97222
3	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	-97222	-20833	27778	0
4	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-97222	0	-222222
5	0	0	-128472	-20833	-409722	0	-128472	20833	0	0	0	0	112847	36458	-97222	-20833
6	0	0	-20833	-28472	0	-1097222	20833	-284722	0	0	0	0	36458	190972	-20833	-97222
7	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	-128472	-20833	-409722	0	-128472	20833	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	-20833	-284722	0	-1097222	20833	-284722	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	0
13	93750	-5208	0	0	0	0	-128472	-20833	-409722	0	-128472	20833	0	0	0	0
14	5208	125000	0	0	0	0	-20833	-284722	0	-1097222	20833	-284722	0	0	0	0
15	-111111	-20833	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0
16	-62500	13889	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0
17	225694	88542	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	-204861	-20833	0	0	0	0
18	88542	381944	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	-62500	-548611	0	0	0	0
19	0	0	513889	0	152778	0	0	0	0	0	0	0	-204861	-62500	0	83333
20	0	0	0	1138889	0	527778	0	0	0	0	0	0	-20833	-548611	83333	0
21	0	0	152778	0	1027778	0	152778	0	0	0	0	0	-128472	-20833	0	-83333
22	0	0	0	527778	0	2277778	0	527778	0	0	0	0	-20833	-284722	-83333	0
23	0	0	0	0	152778	0	1027778	0	152778	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	527778	0	2277778	0	527778	0	0	0	0	0	0
25	-128472	-20833	0	0	0	0	152778	0	1027778	0	152778	0	0	0	0	0
26	-20833	-284722	0	0	0	0	0	527778	0	2277778	0	527778	0	0	0	0
27	-204861	-62500	0	0	0	0	0	0	152778	0	513889	0	0	0	0	0
28	-20833	-548611	0	0	0	0	0	0	0	527778	0	1138889	0	0	0	0
29	0	0	-204861	-20833	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	451389	0	-222222	0
30	0	0	-62500	-548611	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	763889	0	27778
31	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	-222222	0	777778	0
32	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0	27778	0	777778
33	0	0	-128472	20833	-409722	0	-128472	-20833	0	0	0	0	187500	0	-222222	0
34	0	0	20833	-284722	0	-1097222	-20833	-284722	0	0	0	0	0	250000	0	27778
35	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	-128472	20833	-409722	0	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	20833	-284722	0	-1097222	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0
41	112847	36458	0	0	0	0	-128472	20833	-409722	0	-128472	-20833	0	0	0	0
42	36458	190972	0	0	0	0	20833	-284722	0	-1097222	-20833	-284722	0	0	0	0
43	-97222	-20833	0	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigideces Total del Continuo. (Continuación)

	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	112847	-36458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-36458	190972	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-97222	20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	20833	-97222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	218750	0	-97222	20833	112847	-36458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	437500	20833	-97222	-36458	190972	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-97222	-20833	27778	0	-97222	20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-20833	-97222	0	-222222	20833	-97222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	112847	36458	-97222	-20833	218750	0	-97222	20833	112847	-36458	0	0	0	0	0	0
10	36458	190972	-20833	-97222	0	437500	20833	-97222	-36458	190972	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	-97222	-20833	27778	0	-97222	20833	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	-20833	-97222	0	-222222	20833	-97222	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	112847	36458	-97222	-20833	218750	0	-97222	20833	112847	-36458	0	0
14	0	0	0	0	36458	190972	-20833	-97222	0	437500	20833	-97222	-36458	190972	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	-20833	27778	0	-97222	20833	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-97222	0	-222222	20833	-97222	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	112847	36458	-97222	-20833	109375	-5208	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	36458	190972	-20833	-97222	5208	218750	0	0
19	-128472	20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	-409722	0	0	83333	-128472	20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	-1097222	83333	0	20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	-128472	-20833	0	-83333	-409722	0	0	83333	-128472	20833	0	0	0	0	0	0
24	-20833	-284722	-83333	0	0	-1097222	83333	0	20833	-284722	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	-128472	-20833	0	-83333	-409722	0	0	83333	-128472	20833	0	0
26	0	0	0	0	-20833	-284722	-83333	0	0	-1097222	83333	0	20833	-284722	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	0	-83333	-204861	62500	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	-83333	0	20833	-548611	0	0
29	187500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	20833
30	0	250000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	62500	-548611
31	-222222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333
32	0	27778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0
33	922917	-14583	-277778	33333	181250	-18750	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833
34	-14583	1541667	33333	-52778	-18750	212500	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722
35	-277778	33333	911111	-100000	-244444	66667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	33333	-52778	-100000	994445	66667	30556	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	181250	-18750	-244444	66667	737500	0	-244444	-66667	181250	18750	0	0	0	0	0	0
38	-18750	212500	66667	30556	0	1041667	-66667	30556	18750	212500	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	-244444	-66667	911111	100000	-277778	-33333	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	-66667	30556	100000	994444	-33333	-52778	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	181250	18750	-277778	-33333	922917	14583	-222222	0	187500	0	0	0
42	0	0	0	0	18750	212500	-33333	-52778	14583	1541667	0	27778	0	250000	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0	-222222	0	777778	0	-222222	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	-128472	20833	0	0	0	0	0	0	0	0	109375	5208	-97222	20833	112847	-36458
30	20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	-5208	218750	20833	-97222	-36458	190972
31	0	83333	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	-20833	27778	0	-97222	20833
32	83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-97222	0	-222222	20833	-97222
33	-367361	-4167	-87500	25000	0	0	0	0	0	0	112847	36458	-97222	-20833	215625	0
34	-4167	-998611	25000	-175000	0	0	0	0	0	0	36458	190972	-20833	-97222	0	418750
35	22222	-100000	-133333	100000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-116667	-12500
36	-100000	55556	100000	-333333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-12500	-116667
37	-81944	0	-112500	-41667	-112500	41667	-81944	0	0	0	0	0	0	0	93750	28125
38	0	-161111	-83333	-325000	83333	-325000	0	-161111	0	0	0	0	0	0	28125	125000
39	0	0	0	0	-133333	-100000	22222	100000	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	-100000	-333333	100000	55556	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	-87500	-25000	-367361	4167	-128472	20833	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	-25000	-175000	4167	-998611	20833	-284722	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	-116667	12500	93750	-28125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	12500	-116667	-28125	125000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	66667	0	-61111	12500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	-183333	12500	22222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	-61111	-12500	129167	0	-61111	12500	93750	-28125	0	0	0	0	0	0	0	0
38	-12500	22222	0	191667	12500	22222	-28125	125000	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	-61111	-12500	66667	0	-116667	12500	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	-12500	22222	0	-183333	12500	-116667	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	93750	28125	-116667	-12500	215625	0	-97222	20833	112847	-36458	0	0	0	0
42	0	0	28125	125000	-12500	-116667	0	418750	20833	-97222	-36458	190972	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	-97222	-20833	27778	0	-97222	20833	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	81	82	83	84	85	86
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-97222	0	-222222
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	112847	-36458	-97222	20833
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-36458	190972	20833	-97222
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
63	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigideces Total del Continuo.

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
44	-20833	-97222	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0
45	109375	5208	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	-204861	20833	0	0	0	0
46	-5208	218750	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	62500	-548611	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	62500	0	-83333
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-548611	-83333	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	109375	-5208	-97222	-20833
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5208	218750	-20833	-97222
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	20833	27778	0
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-97222	0	-222222
63	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	112847	-36458	-97222	20833
64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-36458	190972	20833	-97222
65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigideces Total del Continuo. (Continuación)

	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27778	0	777778	0	27778	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	187500	0	-222222	0	451389	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	250000	0	27778	0	763889	0	0
47	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	513889	0
48	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1138889
49	-367361	-4167	22222	-100000	-81944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	152778	0
50	-4167	-998611	-100000	55556	0	-161111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	527778
51	-87500	25000	-133333	100000	-112500	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	25000	-175000	100000	-333333	-41667	-325000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	-112500	83333	-133333	-100000	-87500	-25000	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	41667	-325000	-100000	-333333	-25000	-175000	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	-81944	0	22222	100000	-367361	4167	0	-83333	-128472	-20833	0	0
56	0	0	0	0	0	-161111	100000	55556	4167	-998611	-83333	0	-20833	-284722	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333	-204861	-62500	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0	-20833	-548611	0	0
59	112847	36458	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	-20833
60	36458	190972	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-62500	-548611
61	-97222	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	83333
62	-20833	-97222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	83333	0
63	215625	0	-116667	-12500	93750	28125	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833
64	0	418750	-12500	-116667	28125	125000	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722
65	-116667	12500	66667	0	-61111	-12500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
66	12500	-116667	0	-183333	-12500	22222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	93750	-28125	-61111	12500	129167	0	-61111	-12500	93750	28125	0	0	0	0	0	0
68	-28125	125000	12500	22222	0	191667	-12500	22222	28125	125000	0	0	0	0	0	0
69	0	0	0	0	-61111	12500	66667	0	-116667	-12500	0	0	0	0	0	0
70	0	0	0	0	12500	22222	0	-183333	-12500	-116667	0	0	0	0	0	0
71	0	0	0	0	93750	-28125	-116667	12500	215625	0	-97222	-20833	112847	36458	0	0
72	0	0	0	0	-28125	125000	12500	-116667	0	418750	-20833	-97222	36458	190972	0	0
73	0	0	0	0	0	0	0	0	-97222	20833	27778	0	-97222	-20833	0	0
74	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-97222	0	-222222	-20833	-97222	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	112847	-36458	-97222	20833	109375	5208	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	0	-36458	190972	20833	-97222	-5208	218750	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
44	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	-204861	-20833	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	-62500	-548611	0	0	0	0	0	0
47	152778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	-62500	0	83333	-128472	20833
48	0	527778	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-548611	83333	0	20833	-284722
49	908333	0	50000	0	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	0	-83333	-367361	4167
50	0	1950000	0	300000	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	-83333	0	4167	-998611
51	50000	0	616667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-87500	-25000
52	0	300000	0	1366667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-25000	-175000
53	0	0	0	0	616667	0	50000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	1366667	0	300000	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	50000	0	908333	0	152778	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	300000	0	1950000	0	527778	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	152778	0	513889	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	527778	0	1138889	0	0	0	0	0	0
59	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	451389	0	-222222	0	187500	0
60	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	763889	0	27778	0	250000
61	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0	-222222	0	777778	0	-222222	0
62	-83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27778	0	777778	0	27778
63	-367361	4167	-87500	-25000	0	0	0	0	0	0	187500	0	-222222	0	922917	14583
64	4167	-998611	-25000	-175000	0	0	0	0	0	0	0	250000	0	27778	14583	1541667
65	22222	100000	-133333	-100000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-277778	-33333
66	100000	55556	-100000	-333333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-33333	-52778
67	-81944	0	-112500	41667	-112500	-41667	-81944	0	0	0	0	0	0	0	181250	18750
68	0	-161111	83333	-325000	-83333	-325000	0	-161111	0	0	0	0	0	0	18750	212500
69	0	0	0	0	-133333	100000	22222	-100000	0	0	0	0	0	0	0	0
70	0	0	0	0	100000	-333333	-100000	55556	0	0	0	0	0	0	0	0
71	0	0	0	0	-87500	25000	-367361	-4167	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0
72	0	0	0	0	25000	-175000	-4167	-998611	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0
74	0	0	0	0	0	0	83333	0	-83333	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	-204861	20833	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	62500	-548611	0	0	0	0	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	62500	0	-83333	-128472	-20833
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-548611	-83333	0	-20833	-284722
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333	-409722	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0	0	-1097222
81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	20833
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20833	-284722
83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
44	0	0	0	0	0	0	-20833	-97222	0	-222222	20833	-97222	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	112847	36458	-97222	-20833	109375	-5208	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0	36458	190972	-20833	-97222	5208	218750	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	22222	100000	-81944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	100000	55556	0	-161111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51	-133333	-100000	-112500	83333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	-100000	-333333	41667	-325000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	-112500	-83333	-133333	100000	-87500	25000	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	-41667	-325000	100000	-333333	25000	-175000	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	-81944	0	22222	-100000	-367361	-4167	0	83333	-128472	20833	0	0	0	0
56	0	0	0	-161111	-100000	55556	-4167	-998611	83333	0	20833	-284722	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	0	-83333	-204861	62500	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	-83333	0	20833	-548611	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-204861	20833	-128472	20833
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	62500	-548611	20833	-284722
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0	83333	0
63	-277778	-33333	181250	18750	0	0	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833	-409722	0
64	-33333	-52778	18750	212500	0	0	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722	0	-1097222
65	911111	100000	-244444	-66667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333
66	100000	994445	-66667	30556	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-83333	0
67	-244444	-66667	737500	0	-244444	66667	181250	-18750	0	0	0	0	0	0	-128472	-20833
68	-66667	30556	0	1041667	66667	30556	-18750	212500	0	0	0	0	0	0	-20833	-284722
69	0	0	-244444	66667	911111	-100000	-277778	33333	0	0	0	0	0	0	0	0
70	0	0	66667	30556	-100000	994445	33333	-52778	0	0	0	0	0	0	0	0
71	0	0	181250	-18750	-277778	33333	922917	-14583	-222222	0	187500	0	0	0	0	0
72	0	0	-18750	212500	33333	-52778	-14583	1541667	0	27778	0	250000	0	0	0	0
73	0	0	0	0	0	0	-222222	0	777778	0	-222222	0	0	0	0	0
74	0	0	0	0	0	0	0	27778	0	777778	0	27778	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	187500	0	-222222	0	451389	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	250000	0	27778	0	763889	0	0	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	513889	0	152778	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1138889	0	527778
79	0	-83333	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	0	0	152778	0	1027778	0
80	-83333	0	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	0	0	527778	0	2277778
81	0	83333	-409722	0	0	-83333	-128472	-20833	0	0	0	0	0	0	152778	0
82	83333	0	0	-1097222	-83333	0	-20833	-284722	0	0	0	0	0	0	0	527778
83	0	0	-128472	20833	0	83333	-409722	0	0	-83333	-128472	-20833	0	0	0	0
84	0	0	20833	-284722	83333	0	0	-1097222	-83333	0	-20833	-284722	0	0	0	0
85	0	0	0	0	0	0	-128472	20833	0	83333	-204861	-62500	0	0	0	0
86	0	0	0	0	0	0	20833	-284722	83333	0	-20833	-548611	0	0	0	0

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

	81	82	83	84	85	86
44	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0
46	0	0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0
61	0	0	0	0	0	0
62	0	0	0	0	0	0
63	-128472	20833	0	0	0	0
64	20833	-284722	0	0	0	0
65	0	83333	0	0	0	0
66	83333	0	0	0	0	0
67	-409722	0	-128472	20833	0	0
68	0	-1097222	20833	-284722	0	0
69	0	-83333	0	83333	0	0
70	-83333	0	83333	0	0	0
71	-128472	-20833	-409722	0	-128472	20833
72	-20833	-284722	0	-1097222	20833	-284722
73	0	0	0	-83333	0	83333
74	0	0	-83333	0	83333	0
75	0	0	-128472	-20833	-204861	-20833
76	0	0	-20833	-284722	-62500	-548611
77	0	0	0	0	0	0
78	0	0	0	0	0	0
79	152778	0	0	0	0	0
80	0	527778	0	0	0	0
81	1027778	0	152778	0	0	0
82	0	2277778	0	527778	0	0
83	152778	0	1027778	0	152778	0
84	0	527778	0	2277778	0	527778
85	0	0	152778	0	513889	0
86	0	0	0	527778	0	1138889

Tabla 3 16 Matriz de Rigidez Total del Continuo. (Continuación)

NODO	DESPLAZAMIENTOS		NODO	DESPLAZAMIENTOS	
	X	Y		X	Y
1	0 0002375	0 0001355	27	0 0000169	-0 0000024
2	0 0001241	-0 0000041	28	0 0000130	-0 0000023
3	0 0000593	0 0000023	29	0 0000112	-0 0000073
4	0 0000410	-0 0000051	30	0 0000198	0 0000310
5	0 0000323	-0 0000015	31	0 0000147	0 0000082
6	0 0000243	-0 0000022	32	0 0000185	-0 0000054
7	0 0000193	-0 0000011	33	0 0000169	-0.0000057
8	0 0000192	-0 0000034	34	0 0000102	-0 0000021
9	0 0000200	-0 0000079	35	0 0000100	-0 0000015
10	0 0001116	0 0000988	36	0 0000082	-0 0000013
11	0 0000641	-0 0000065	37	0 0000075	-0 0000021
12	0 0000293	-0 0000035	38	0 0000077	-0 0000066
13	0 0000193	-0 0000017	39	0 0000077	0 0000157
14	0 0000169	-0 0000079	40	0 0000073	-0 0000023
15	0 0000517	0 0000644	41	0 0000062	-0 0000015
16	0 0000564	0 0000100	42	0 0000039	-0 0000006
17	0 0000438	-0 0000118	43	0 0000035	-0 0000038
18	0 0000347	-0 0000078	44	0 0000000	0 0000000
19	0 0000302	-0 0000060	45	0 0000000	0 0000000
20	0 0000208	-0 0000020	46	0 0000000	0 0000000
21	0 0000161	-0 0000020	47	0 0000000	0 0000000
22	0 0000146	-0 0000034	48	0 0000000	0 0000000
23	0 0000147	-0 0000079	49	0 0000000	0 0000000
24	0 0000312	0 0000485	50	0 0000000	0 0000000
25	0 0000299	-0 0000084	51	0 0000000	0 0000000
26	0 0000250	-0 0000067	52	0 0000000	0 0000000

Tabla 3 18 Desplazamientos de los Nodos de la Estructura

En la tabla anterior se puede observar que el nodo uno es el que tiene un mayor desplazamiento debido a que es el punto de aplicación de la carga Graficando estos datos se puede apreciar de una mejor forma la deformación sufrida por el muro (Fig 3 7)

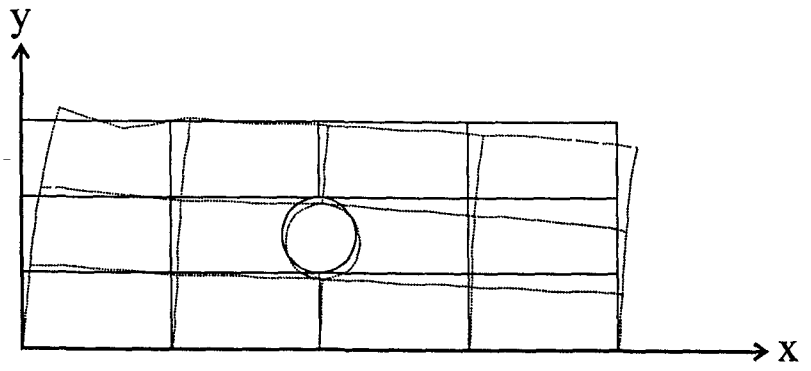

Fig 3 7 Diagrama de Deformaciones del Muro Analizado

4. MANUAL DEL PROGRAMA

Se ha desarrollado un programa para automatizar el método, mismo que se ha utilizado en el ejemplo El programa está organizado de forma que la entrada de datos sea lo más ordenada posible, el usuario debe de realizar, antes de emplearlo, la discretización del medio continuo, obtener las coordenadas de los nodos de cada elemento finito y definir la orientación de los elementos antes mencionados.

La orientación elegida para los elementos cuadriláteros, lineales y cuadráticos, se debe a la semejanza de operaciones al numerar primero los vértices y posteriormente los puntos intermedios

En la primera pantalla se debe seleccionar el tipo de elementos finitos que se desea utilizar, según se halla elegido durante la discretización del continuo (fig. 4.1)

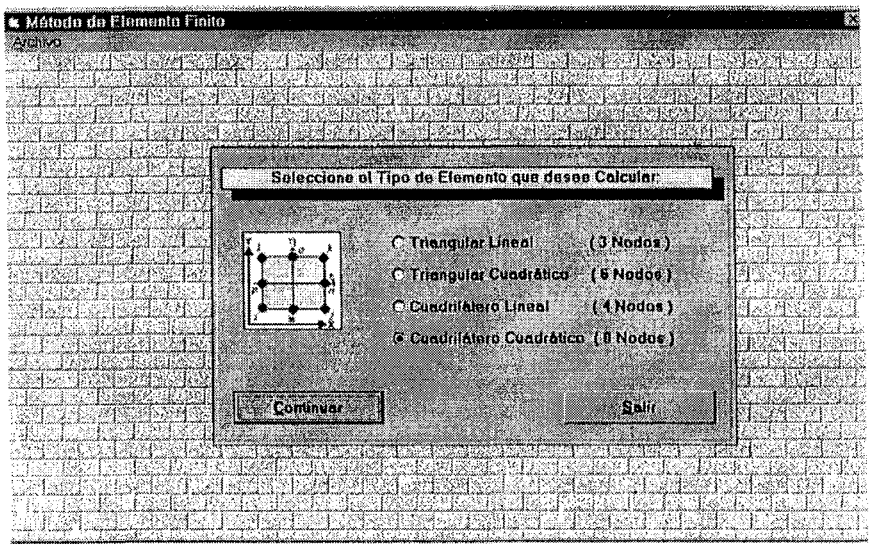

Fig. 4 1 Primera pantalla del programa Método del Elemento Finito.

En la segunda pantalla se captura:

Nodos: *Número de nodos*, que será de acuerdo a la cantidad de número y tipo de elemento elegido en la discretización.

Coordenadas de cada nodo, en función de haber establecido un origen en un sistema de coordenadas cartesianas de manera global, recordando siempre la unidad de medición elegida.

Cargas en los nodos, se deberá de respetar el sistema de referencia empleado en las coordenadas.

Condición de frontera, en este caso se deberá de elegir si el nodo tiene libertad o no de sufrir un desplazamiento. (Fig. 4.2).

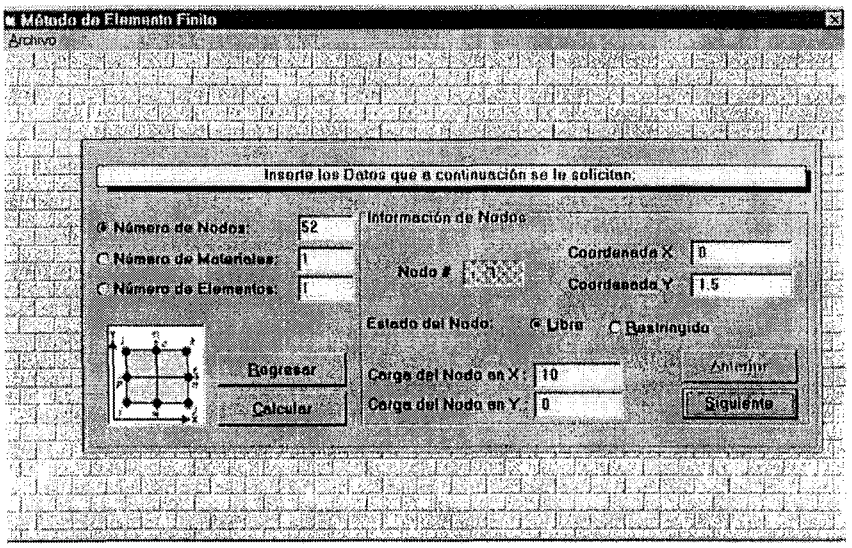

Fig. 4.2 Características de los Nodos de la estructura.

Materiales: *Número de materiales*, se deberá de indicar de cuántos materiales consta el continuo.

Espesor (t), se deberá de dar el valor de este dato recordando la unidad de medición del sistema de referencia.

Coeficiente de Poisson (ν), se deberá de dar el valor de esta constante.

Módulo de elasticidad lineal (E), se deberá el valor de esta constante recordando las unidades de medición. (Fig. 4.3).

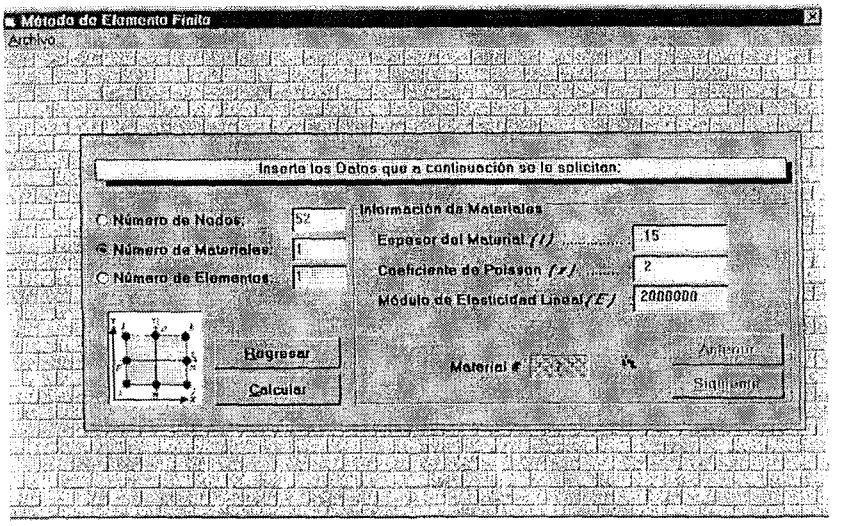

Fig. 4.3 Características de los Materiales de la Estructura.

Elementos: *Número de elementos*, se deberá de indicar la cantidad de elementos finitos que resultaron de la discretización.

Orientación, se deberá de indicar el número de nodo correspondiente a los nodos del elemento finito elegido.

Número del material, se deberá de indicar el número del material del elemento finito en cuestión. (Fig. 4.4).

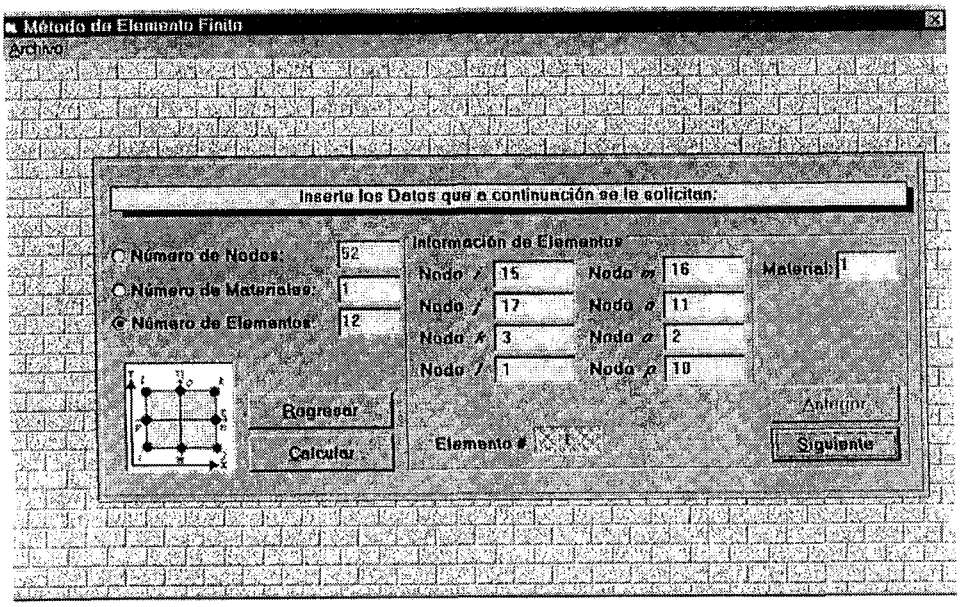

Fig. 4.4 Características de los Elementos de la Estructura

La tercera pantalla muestra los desplazamientos de los nodos, en ambas direcciones del sistema de coordenadas cartesianas, respetando la orientación del sistema de referencia. (Fig. 4.5).

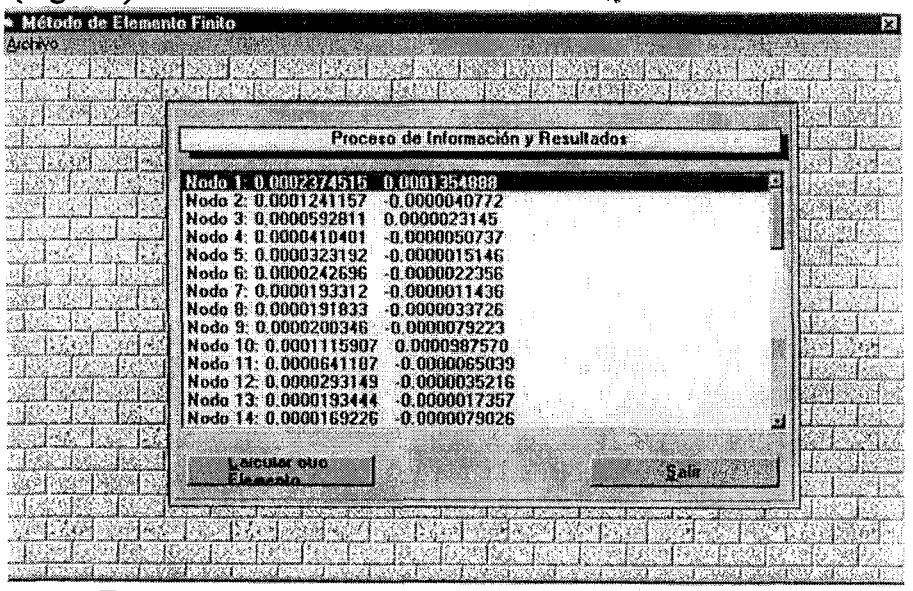

Fig. 4.5 Desplazamientos de los Nodos de la Estructura.

CONCLUSIONES.

En el desarrollo de este trabajo se presentan de manera general los conceptos básicos y el procedimiento para el empleo del Método del Elemento Finito en estructuras complejas, que se pueden idealizar de manera simple

Podemos concluir que con la comprensión de los conceptos y la metodología empleada aquí expuesta, se podrá obtener una facilidad de idealización de estructuras, a las cuales no es posible realizar esta ultima mediante elementos esqueletales (barras), recordando que si se emplea en dichos elementos se llega a la aplicación del método de rigideces

Por otra parte el programa desarrollado se encuentra enfocado al estado plano de esfuerzos, por lo tanto, sólo se podrá emplear para realizar análisis de elementos finitos esbeltos, de acuerdo a su geometría, dichos elementos finitos podrán ser triangular lineal, triangular cuadrático, cuadrilátero lineal o cuadrilátero cuadrático.

Se observó también que existen diversas fuentes de información, sin embargo, es complejo su contenido, por lo que con este trabajo se logra un entendimiento mayor a los conceptos técnicos empleados

REFERENCIAS

[1] Burden L., Richard & Faires, J. Douglas."Análisis Numérico"
Grupo Editorial Iberoamérica, México, 721pp, 1985

[2] Grossman, Stanley I "Algebra Lineal"
Grupo Editorial Iberoamérica, México, 475pp, 1988.

[3] Livesley, R K. "Elementos Finitos, introducción para ingenieros"
LIMUSA, México, 224pp, 1988

[4] Zienkiewicz, O C & Taylor, R L "El Método de los Elementos Finitos, formulación básica y problemas lineales Volumen 1" Mc Graw Hill, España, 650pp, 1994

[5] Buchanan, George R "Theory and Problems of Finite Element Analysis". Schaum's outline series, Mc Graw Hill, 1995

[6] Reddy, J. N "Applied Functional And Variational Methods in Engineering" Mc Graw Hill, Singapore, 546pp, 1986

[7] Zienkiewicz, O. C. & Morgan, K "Finite Elements and Approximation", Wiley, Canadá, 328pp, 1983

[8] Cook, Robert D., Malkus, David S & Plesha, Michael E. "Concepts and Aplications of Finite Element Analysis" Wiley, Canadá, 630pp, 1989

[9] Método del Elemento Finito, Análisis de los Estados Planos
Tesis Profesional
José Humberto Ablanedo Rosas
Gerardo de Jesús López Arciga
UPAEP, México, 1987.

[10] Solución de Ecuaciones Algebraicas en el Análisis Estructural.
Tesis Profesional
Fernando Vera Badillo
Universidad La Salle, México, 1980

[11] Introducción al Método del Elemento Finito
Ramón Cervantes Beltrán
Victor Porras Silva
UPAEP

[12] Conceptos Básicos del Método del Elemento Finito aplicados al Análisis Estructural.
Marco A Pineda Chávez
Boletín Instituto de Investigaciones Eléctricas,
Septiembre/Octubre de 1987

[13] Levi, Enzo "Elementos de Mecánica del Medio Continuo".
LIMUSA, México, 287pp 1989

[14] Boresi, Arthur P & Sidebottom, Omar M "Advanced Mechanics of Materials"
Wiley, Singapore, 763pp 1985

[15] J S Przemieniecki "Theory of Matrix Structural Analysis"
Dover, USA, 468pp 1985