

Universidad Popular Autónoma del Estado
de Puebla



Doctorado en Ingeniería Mecatrónica
Control de Movimiento para un Robot de
Transmisión Directa Mediante
Retroalimentación Visual

Tesista: M.C. Jaime Julián Cid Monjaraz

Asesor: Dr. Fernando Reyes Cortés

Coasesor: Dr. Héctor Simón Vargas Martínez

10 de octubre del 2007



UPAEP – Secretaría General

Dirección General de Apoyos Académicos

Dirección del Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación.

Biblioteca Central - **Karol Wojtyla**

Tesis Digitales Restricciones de uso:

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de textos, imágenes, gráficas, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente de donde la obtuvo mencionando el autor o autores involucrados en el documento.

Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contents

List of Figures	4
1 Introducción	1
1.1 Objetivos del Trabajo	4
1.1.1 General	4
1.1.2 Específicos	4
1.1.3 Alcances del Trabajo	5
1.2 Antecedentes y Justificación	6
1.3 Robot Manipulador	10
1.3.1 El Concepto de Transmisión Directa	12
1.4 La Interface de Control	15
2 Modelo Dinámico de Robots Manipuladores	17
2.1 Metodología de Euler - Lagrange	19
2.2 Modelo Dinámico de Robots Manipuladores	25

2.3	Desarrollo del Modelo Dinámico del Robot	27
2.3.1	Empleo de la Metodología de Euler-Lagrange	27
2.3.2	Lagrangiano del Manipulador	35
2.4	Parámetros dinámicos	40
2.5	Modelo Cinemático Directo	42
3	Sistema de Visión	43
3.1	Retroalimentación en Base a Centroide	49
3.2	Imagen Digital y Pixel	52
3.3	El Tiempo Real en la Visión	54
3.4	Configuración de Cámara	57
3.5	Modelo de Visión	58
4	Control de Posición	63
4.1	Moldeo de Energía	66
4.2	Metodología del Jacobiano Transpuesto	70
4.3	Algoritmo de Control Visual	73
4.3.1	Algoritmo de Control Visual Articular	76
4.4	Demostración de Estabilidad	77
4.4.1	Demostración de Estabilidad para el Algoritmo de Control Vi- sual Articular	83

5	Evaluación Experimental	87
5.1	Algoritmo para la Extracción de Características	87
5.1.1	Preparación del Experimento	92
5.1.2	Resultados Experimentales	93
6	Conclusiones	110
6.1	Trabajo futuro	114
A	Fundamentos de la teoría de Lyapunov	115
A.1	Sistemas no lineales	116
A.2	Sistemas autónomos y no autónomos	117
A.3	Puntos de equilibrio	117
A.4	Conceptos de estabilidad	118
A.4.1	Estabilidad e inestabilidad	119
A.4.2	Estabilidad asintótica y estabilidad exponencial	120
A.4.3	Estabilidad local y global	121
A.4.4	Método directo de Lyapunov	122
	References	126

List of Figures

1.1	Brazo robot con una cámara fija como retroalimentador visual. . . .	5
1.2	Diagrama a bloques de la plataforma experimental.	9
1.3	Brazo Robot de transmisión directa de 3 grados de libertad.	11
1.4	Comparación de la construcción mecánica de los motores	14
1.5	Componentes generales de un motor de transmisión directa.	14
1.6	Componentes de la tarjeta de control de movimiento MFIO-3A. . . .	16
2.1	Nombre común de las 3 articulaciones.	19
2.2	Esquema del Robot Manipulador.	27
2.3	Especificación de las 3 articulaciones.	29
3.1	Campo Visual de la cámara.	48
3.2	Abarque de la distancia focal	48
3.3	Descripción del intervalo de tiempo disponible	57
3.4	Configuración cámara en mano.	58
3.5	Configuración cámara fija.	58

3.6	Sistemas de referencia del robot y de la cámara.	60
3.7	Transformación de perspectiva en el CCD.	61
4.1	Control en lazo cerrado del robot.	65
4.2	Robot manipulador y cámara fija.	67
4.3	Problema de control para la configuración cámara fija.	68
4.4	Diagrama a bloques de la retroalimentación visual.	69
5.1	Diagrama a Bloques de la adquisición y procesamiento de imágenes.	88
5.2	Programa en Simulink	89
5.3	Visualización de los centroides.	90
5.4	Programas ejecutándose.	91
5.5	Movimiento al objetivo deseado.	92
5.6	Posición inicial y final del robot.	94
5.7	Errores visuales con el controlador $\tanh$	100
5.8	Torque aplicado del controlador $\tanh$	100
5.9	Errores visuales con el controlador $\arctan$	101
5.10	Torque aplicado con el controlador $\arctan$	101
5.11	Errores de imagen con el controlador $\sin$ y $\tanh$	102
5.12	Torque aplicado por el controlador $\sin$ y $\tanh$	102
5.13	Error de la imagen con el controlador $\sin$ y $\arctan$	103

5.14	Torque aplicado por el controlador seno y arctan	103
5.15	Estimación de posición angular.	104
5.16	Robot manipulador y el sistema de visión.	105
5.17	Errores articulares visuales con el controlador tanh	106
5.18	Torque aplicado con el controlador tanh	106
5.19	Errores articulares visuales con el controlador arctan	107
5.20	Torque aplicado con el controlador arctan	107
5.21	Errores de imagen con el controlador seno y tanh	108
5.22	Torque aplicado con el controlador seno y tanh	108
5.23	Errores articulares visuales con el controlador seno y arctan	109
5.24	Torque aplicado con el controlador seno y arctan	109

Chapter 1

Introducción

"El deseo de saber es propio de los hombres buenos"

Leonardo Da Vinci

La ciencia y tecnología hoy en día representan áreas estratégicas prioritarias en el avance de la humanidad, los niveles de competitividad necesarios para incidir en los mercados internacionales en un ámbito globalizado, son de las sociedades que están directamente relacionados con la capacidad de producir tecnología mejorando en muchos casos las condiciones de vida de los habitantes. Para que un país alcance un rápido desarrollo, la investigación científica y el desarrollo de tecnologías deben ser una actividad preponderante, que coloque en el centro de su quehacer la formación de recursos humanos con el perfil científico-tecnológico, mediante el desarrollo de prototipos, generación y aplicación de conocimientos con un compromiso social que pretenda dar respuesta a las exigencias que demandan los tiempos actuales. Existe una tendencia mundial hacia la modernización de procesos mediante la síntesis y la

sinergia de diversos productos con componentes que tradicionalmente habían sido tratados de manera independiente por su diversa naturaleza. La Mecatrónica es un área clave del desarrollo en la sociedad moderna, sinónimo de modernización tecnológica, por su naturaleza multidisciplinaria, científica - práctica, que permite generar y aplicar conocimientos y/o tecnologías a problemas reales del entorno.

La Mecatrónica surge como una alternativa de ingeniería concurrente hacia la integración de sistemas avanzados interdisciplinarios. Se entiende como la integración de la mecánica, computación y electrónica, con el objetivo de proporcionar los elementos necesarios para analizar, diseñar y construir un sistema sinérgico con un diseño óptimo e integrado de su sistema mecánico y su sistema de control correspondiente que realicen tareas específicas. La mecatrónica es la integración disciplinaria de la ingeniería mecánica de precisión, el control electrónico, y las tecnologías de información encaminadas al desarrollo de productos y procesos inteligentes, que van desde aplicaciones domésticas, hasta sistemas de manufactura y producción automatizados [1]. Por su campo de aplicación, está relacionada con un conjunto bastante amplio de disciplinas tales como la mecánica, cinemática, dinámica, ciencias computacionales, identificación de sistemas, matemáticas, ingeniería de control automático, ingeniería electrónica, cibernética, bioingeniería y visión artificial [2, 3, 4, 5]. En la actualidad la Mecatrónica está fuertemente ligada a la automatización, la cual denota una tecnología dirigida a suplir actividades de los seres humanos por máquinas en un proceso de fabricación rutinario o de alto riesgo, considerando no sólo la ejecución de operaciones físicas sino también el procesamiento adecuado de información sobre el estado del proceso. Un subconjunto de la Mecatrónica es la Robótica que es un área multidisciplinaria que aborda la investigación, análisis y diseño de una clase particular de sistemas mecánicos denominados robots, los cuales representan retos teóricos debido a su naturaleza multivariable, dinámica no lineal y acoplada.

De acuerdo con la definición ampliamente aceptada del Instituto de Robótica

de América, un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para el desempeño de una variedad de tareas. Tal definición, que data de 1980, refleja en cierto modo el estado actual de la tecnología en robótica [2]. En nuestros días se cuenta con varias definiciones de robots manipuladores industriales, de acuerdo con la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica bajo la norma ISO/TR 8373, se define de la siguiente manera: “Un robot manipulador es una máquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales” [5].

El concepto robot fue introducido por el escritor checoslovaco Karel Capek en su novela satírica *Rossum's Universal Robots*, en 1921. Fué en la década de los 40's cuando el ruso Isaac Asimov introdujo el término robótica para designar a la ciencia dedicada al estudio de robots y la cual está basada sobre las tres leyes fundamentales [2]:

1. Un robot no puede dañar a un ser humano o, por inacción, permitir que un ser humano resulte dañado.
2. Un robot deberá de obedecer las órdenes dadas por seres humanos, excepto cuando tales órdenes entren en conflicto con la primera ley.
3. Un robot deberá proteger su propia existencia, en tanto dicha protección no entre en conflicto con la primera o segunda ley.

En su novela titulada *Robots e Imperio*, publicada en 1985, Isaac Asimov incorporó una cuarta ley, conocida como la ley cero: un robot no puede lastimar a la humanidad o, por falta de acción, permitir que la humanidad sufra daño. Esta ley de mayor prioridad que la primera, antepone el bien comunitario al individual.

La búsqueda de la autonomía ha sido un objetivo fundamental en la robótica.

Durante años se ha tratado de que los robots estén dotados de capacidades de percepción y actuación autónomas, sin la intervención de los humanos. Los robots industriales actuales son capaces de realizar autónomamente numerosas operaciones en procesos de fabricación, ejecutando programas que permiten realizar movimientos variados en operaciones repetitivas realizadas en entornos estructurados y acondicionados para su funcionamiento. Sin embargo, la actuación de robots en entornos naturales no acondicionados y con dinámicas no predecibles requiere funciones de interacción con el entorno y capacidades de deliberación mucho más complejas [6].

La motivación para la realización de la presente tesis radica en conocer que en el mundo y sobre todo a nivel nacional existe una marcada carencia de robots con retroalimentación visual, además de reconocer que son los pasos iniciales en la realización de trabajos de investigación científica en esta área de la robótica.

1.1 Objetivos del Trabajo

1.1.1 General

Controlar el movimiento de un Robot de Transmisión Directa con retroalimentación visual para una configuración cámara fija.

1.1.2 Específicos

■ Modelar la configuración cámara fija para el robot manipulador planar de transmisión directa y el sistema de visión con una cámara tipo CCD.

■ Proponer un nuevo algoritmo de control mediante retroalimentación visual. La nueva estrategia deberá tener sustento teórico con un análisis matemático formal de

estabilidad en el sentido de Lyapunov y validación experimental del desempeño en forma práctica.

■ Generar al menos una publicación internacional en la cual se presenten las aportaciones realizadas en este trabajo de tesis.

1.1.3 Alcances del Trabajo

El presente trabajo de tesis aborda el problema de posición con retroalimentación visual en la configuración cámara fija (ver la Figura 1.1). En este trabajo de tesis se plantea cubrir cuatro etapas principales: (1) el modelado del sistema de visión para la configuración cámara fija, (2) el diseño de un nuevo algoritmo de control de posición mediante retroalimentación visual con su correspondiente prueba de estabilidad en el sentido de Lyapunov, (3) validar experimentalmente el nuevo algoritmo de control realizando una comparación con otros controladores y (4) generar al menos una publicación internacional en la cual se presenten las contribuciones de este trabajo de investigación.

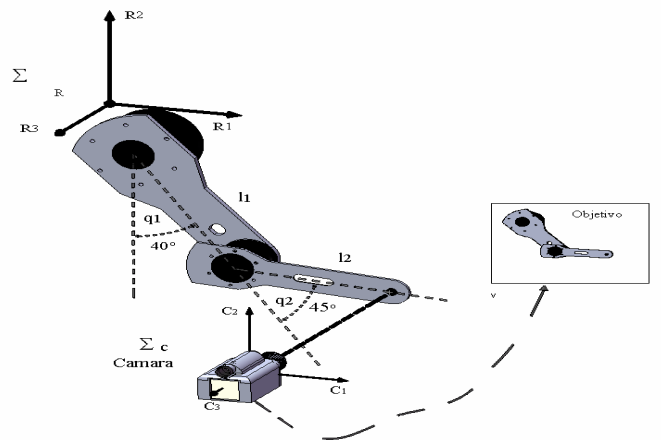


Figure 1.1: Brazo robot con una cámara fija como retroalimentador visual.

Las aportaciones teóricas de esta tesis, es decir el diseño del nuevo controlador mediante retroalimentación visual, son obtenidas en el área del control servo-visual (visual servoing) gracias a una minuciosa investigación del estado del arte del control visual consultando diversas fuentes bibliográficas y publicaciones científicas. Se acondicionó una adecuada plataforma para llevar al cabo las pruebas experimentales necesarias para el control de posición de un robot de transmisión directa.

1.2 Antecedentes y Justificación

El problema del posicionamiento de los robots manipuladores que usan la información visual ha sido una área de investigación en los últimos 30 años. En los años recientes, la atención a este tópico tiene un interés creciente. La información con retroalimentación visual puede resolver muchos problemas que limitan aplicaciones de robots actuales: la exploración en alta profundidad, conducción automática, la robótica médica, los robots aéreos, etc.,

Visual servoing hace referencia a un sistema en lazo cerrado para el control de posición del extremo final de un robot usando directamente la retroalimentación visual [7]. Este término se introdujo por Hill y Park [8] en 1979. Representa una solución atractiva para posicionar y mover robots manipuladores autónomos que evolucionan en los ambientes no estructurados.

En visual servoing de Weiss [9] y William [10] ha clasificado dos clases de control en base a visión para el robot: el de retroalimentación visual basada en posición y el de imagen. Dentro de las características de este último se extrae las características principales de la imagen y se estima la posición del blanco con respecto a la cámara. Usando estos valores, se crea una señal de error entre la posición actual y la posición deseada del robot dentro del espacio de trabajo; mientras la última señal de error es definida directamente por los rasgos principales de la imagen para

controlar el extremo final del robot. En ambas clases de métodos, se trazan los puntos del objeto hacia el plano de imagen de la cámara y de éstos puntos, por ejemplo una clase particularmente útil de rasgos de la imagen es el centroide usados para el control del robot [9] [10] [11].

En la configuración entre la cámara y robot, puede tenerse como cámara fija o cámara en mano. Los sistemas robóticos de cámara-fija, tienen un sistema de visión fijo en el marco de la coordenadas general donde captura imágenes del robot y su ambiente. El objetivo del control es mover el extremo final del robot de tal una manera que alcance un punto deseado. En la configuración de la cámara-en-mano, a menudo llamada también ojo-en-mano, generalmente una cámara está montada en el extremo final del robot proporcionando información visual del ambiente. En esta configuración, el objetivo del control es mover el efector-final del robot de tal manera que la proyección del blanco estático siempre esté en una situación deseada en la imagen dado por la cámara.

Desde que los primeros sistemas de visual servoing que se reportaron en los inicios de 1980s estos han ido en aumento y en los últimos años se incremento también en los trabajos publicados. Una apreciación global excelente de los problemas principales en visual servoing en el control de robots manipuladores se da en Corke [12]. Sin embargo, pocos estudios resultan ser rigurosos, donde incorporen la dinámica no lineal del robot en su contenido. La primera solución explícita al problema formulada en una publicación es debida a Miyazaki y Masutani en 1990, donde el esquema de control para entregar acciones acotadas se basa en un nuevo algoritmo de control mediante retroalimentación visual, utilizando la filosofía del Jacobiano transpuesto introducida por Takegaki y Arimoto [13]. Kelly se orienta al estudio de visual servoing de los robots manipuladores planares bajo la configuración cámara-fija en [14]. Malis en 1999 propuso un nuevo acercamiento al control del robot basado en visión, llamó 2-1/2-D servoing visuales [15]. El problema de visual servoing se orienta a

acoplar la teoría de control no lineal del robot con una representación conveniente de la información visual usada por el robot Conticelli [16] en 1999.

Park y Lee (2003) presentan un control por retroalimentación visual para una pelota en un plato para rastrear su trayectoria deseada en [17]. Kelly proponen un nuevo acercamiento, se dirige en el campo de la aplicación del control en la velocidad, utilizando la retroalimentación visual en la configuración cámara-fija para el robot manipulador en [11]. Schramm presentan una nueva aproximación a la retroalimentación visual, apunta a un controlador llamado extendido-2D (E2D) las coordenadas de los puntos que constituyen un blanco rastreado y proporciona los resultados de la simulación en [18]. Malis y Benhimane (2005) el presentan un sistema genérico y flexible para el control del robot basado en visión, el sistema integra el rastreo visual y la retroalimentación visual se acerca a un cuadro de trabajo (framework) unificado [19].

Este trabajo se dirige a abordar el problema de posicionamiento de un robot manipulador planar con la configuración de cámara fija con retroalimentación visual. La contribución principal es el desarrollo de una nueva familia de controladores visuales de posición basado en un análisis riguroso de estabilidad asintótica global que toma en cuenta la dinámica no lineal del robot y el modelo de visión. El objetivo del control se define en términos de las coordenadas de las articulaciones que se deducen de la información visual.

El problema general de control se le denomina control de posición, este planteamiento es particularmente relevante cuando en el lazo de retroalimentación se incluye una señal de video o imágenes, al cual existen problemas abiertos y de interés en la comunidad científica. Especialmente el tema de investigación de la tesis se ubica en el control de posición de robots manipuladores con retroalimentación visual en la configuración cámara fija caso planar. La solución a dicha problemática será a través de la propuesta de una nueva estrategia de control con soporte riguroso

de acuerdo a las técnicas de control automático y su validación experimental.

Un componente importante de un sistema robótico es la adquisición, procesamiento e interpretación de la información provista por los sensores. Esta información es utilizada para derivar las señales de control para manejar un robot [20]. La información acerca del sistema y su ambiente puede obtenerse a través de una gran variedad de sensores tales como: posición, velocidad, fuerza, tacto o visión.

En la Figura 1.2 se muestra el diagrama a bloques general de la plataforma experimental que se diseñó y construyó, el cual está estructurado en partes fundamentales de la siguiente manera: la primera parte está relacionada con la descripción de la plataforma experimental para propósitos de experimentación en arquitectura abierta [50]. Posteriormente se abordará el tema del modelado dinámico del manipulador experimental así como el modelo visual y finalmente está enfocada al control de posición en coordenadas articulares.

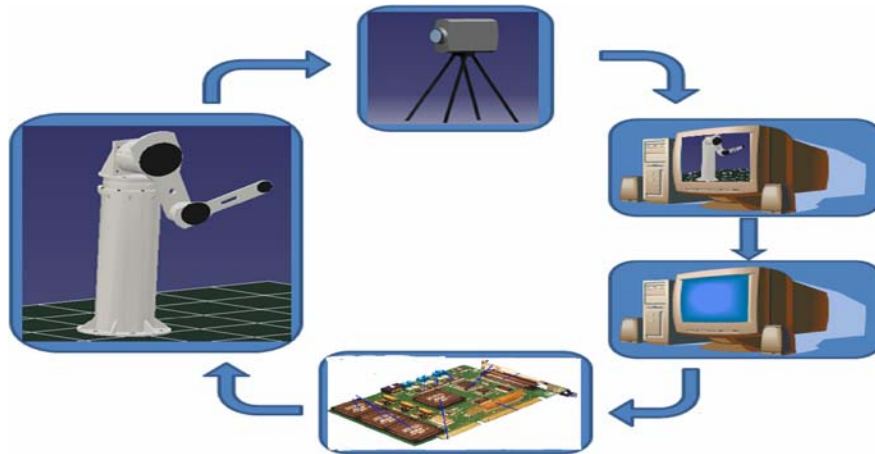


Figure 1.2: Diagrama a bloques de la plataforma experimental.

Aún cuando en años recientes el número de trabajos científicos reportados en la literatura internacional sobre control de robots manipuladores se ha incrementado, la mayoría sólo exhiben resultados de simulación y muy pocos cuentan con

una evaluación experimental. Se han desarrollado controladores de posición pero es prácticamente inexistente los controladores de posición con retroalimentación visual. Lo anterior es una consecuencia directa de la carencia de plataformas experimentales adecuadas así como la dificultad que representa la obtención de un modelo dinámico exacto. La simulación de un determinado algoritmo de control puede ser de mucha utilidad en las etapas iniciales del diseño; no obstante, los resultados de simulación llegan a ser incompletos ya que no son tomados en cuenta aspectos de índole prácticos, por lo que la simulación es de un valor limitado. Por ejemplo, en la gran mayoría de las simulaciones con controladores de robots manipuladores, se desprecia el ruido en los sensores, los fenómenos de fricción y la dinámica de los actuadores del manipulador. El validar un algoritmo de control en forma experimental proporciona los medios necesarios para asegurar su éxito en el mundo real de las aplicaciones. De esta manera, un sistema de pruebas adecuado es un paso fundamental hacia la validación de algoritmos de control nuevos y existentes. Cabe resaltar que es más fácil obtener resultados de simulación que resultados experimentales. La primera solución explícita al problema del control de posición mediante retroalimentación visual se debió a la contribución de Miyazaki y Masutani en 1990, por modelar el sistema de visión como una matriz de rotación, considerando la filosofía de diseño basada en el llamado controlador Jacobiano transpuesto propuesto por Takegaki y Arimoto en 1981. Recientemente, un modelo más realista del sistema de visión incorpora una proyección de perspectiva basada en la óptica geométrica de los lentes.

1.3 Robot Manipulador

En la Figura 1.3 se muestra al robot de transmisión directa con tres grados de libertad.

El robot manipulador está constituido por tres eslabones rígidos fabricados

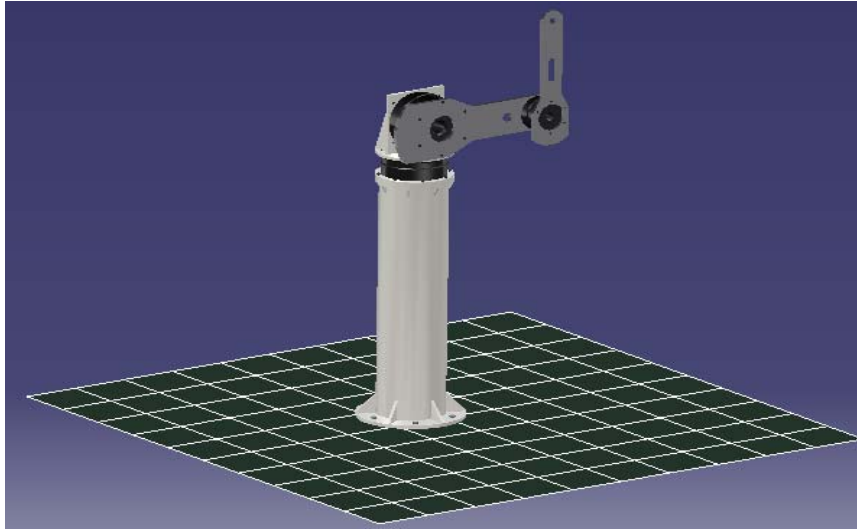


Figure 1.3: Brazo Robot de transmisión directa de 3 grados de libertad.

con aluminio 6061 y los cuales se encuentran unidos a través de articulaciones rotacionales las cuales son actuadas por motores de transmisión directa. El aluminio 6061 es una aleación de aluminio (Al) compuesta por un 0.60 % de silicio (Si), un 0.28 % de cobre (Cu), un 1 % de magnesio (Mg), un 0.2 % de cromo (Cr) y un 97.92 % de Aluminio (Al). Posee una masa volumétrica de 2.70, un coeficiente de dilatación de 23.6 y un módulo de elasticidad de 69500. Es liviano, tiene buena resistencia a la corrosión, alta resistencia a la tracción, alta conductividad eléctrica, alta conductividad térmica, alta flexibilidad, es no magnético, es atóxico, muy resistente y de aspecto atractivo. Además de estas características debe mencionarse la facilidad con que puede trabajarse este material, reduciendo grandemente las dificultades y problemas de manufactura.

Los motores empleados en la construcción del robot manipulador, pertenecen a la serie Dynaserv, del fabricante Parker Compumotor. Para la articulación de la base se utilizó el motor DR1060B; para la articulación del hombro se empleó el motor DR1100E y para la articulación del codo se utilizó el motor DM1004C. Cada sistema

Dynaserv consiste de un motor de transmisión directa sin escobillas, un manejador de potencia basado en microprocesador, fuente de alimentación y un *encoder* y/o *resolvers* para retroalimentación de la posición articular [21]. Entre los principales beneficios de un sistema Dynaserv, pueden contarse la alta exactitud y un alto torque sin que haya necesidad de emplear reductores de velocidad.

Los sistemas Dynaserv empleados en el robot, son operados en el modo de torque, de modo tal que los motores actúan como una fuente de torque y aceptan un voltaje analógico como una referencia para la señal de torque. En la Tabla 1.1 se muestran las características de torque máximo de los sistemas Dynaserv empleados en la construcción del robot y también quedó equipado con sensores de posición que permiten medir los desplazamientos articulares de cada articulación, a través de resolvers para el caso de los motores de la base y del hombro, y a través de un encoder para el caso del motor del codo. La resolución máxima de los sensores de posición para cada articulación del robot se muestra en la Tabla 1.1. La información de la velocidad en cada una de las articulaciones se obtiene utilizando el algoritmo de Euler de diferenciación numérica.

Articulación	Modelo	Torque Máximo (Nm)	Resolución (pulsos/rev)
Base	DR1060B	60	1,024,000
Hombro	DR1100B	100	1,024,000
Codo	DM1004C	4	1,024,000

(1.1)

Tabla 1.1 Características de los motores del robot.

1.3.1 El Concepto de Transmisión Directa

Un sistema de transmisión directa acopla la carga del sistema directamente al motor sin utilizar engranes o poleas. En algunas situaciones, los servomotores con o sin escobillas pueden carecer del torque o resolución adecuados para satisfacer las

necesidades de algunas aplicaciones. De esta manera, medios mecánicos, tales como sistemas de reducción por engranes, son utilizados para satisfacer los requerimientos del sistema. Un robot de transmisión directa se define como un brazo mecánico donde todas sus articulaciones son manejadas con transmisión directa. El concepto de transmisión directa fue acuñado por H. Asada en 1980 y consiste en que el rotor del motor esté directamente acoplado al eslabón, con lo cual se elimina la necesidad del sistema por reducción de engranes tradicionalmente utilizado. La tecnología de transmisión directa elimina el “cascabeleo” y reduce de manera significativa la fricción comparada con aquella presente en un robot del tipo convencional.

En la Figura 1.4 se muestra la comparación de la construcción mecánica entre un motor del tipo convencional con reductor por engranes y uno del tipo por transmisión directa [21, 22]. En un motor con reductor por engranes, se produce una gran cantidad de contacto friccional para reducir la velocidad de la carga; lo anterior es efectivo para incrementar el torque necesario así como la resolución, pero representa un sacrificio en cuanto a velocidad y exactitud. Por otro lado, un motor de transmisión directa no emplea ni escobillas ni engranes, reduciendo así de manera significativa el fenómeno de fricción; además ya que en un motor de transmisión directa el elemento de retroalimentación queda directamente acoplado a la carga, la exactitud y repetibilidad del sistema son fuertemente incrementadas y se elimina el “cascabeleo”.

En la Figura 1.5 puede apreciarse un esquema de los componentes generales de un motor de transmisión directa [21]. El motor contiene cojinetes de precisión, componentes magnéticos y una retroalimentación integral en un solo paquete compacto, pero que puede entregar un alto torque y resolver muchas de las consecuencias del desempeño de un reductor por engranes. Como se aprecia de la Figura 1.5, el motor es del tipo “*rotor exterior*”, propiciando así el movimiento directo de la cubierta externa del motor y por ende de la carga. Los cojinetes que soportan el rotor tienen

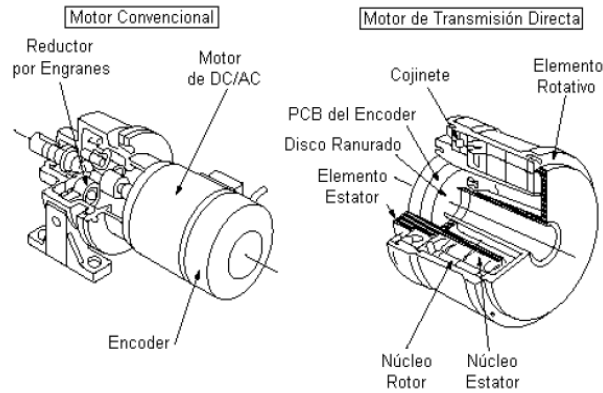


Figure 1.4: Comparación de la construcción mecánica de los motores

una dureza alta para permitir que la carga sea acoplada directamente al motor; en la mayoría de los casos, cuando se está utilizando un motor de transmisión directa, ya no es necesario emplear cojinetes y/o ejes de conexión adicionales.

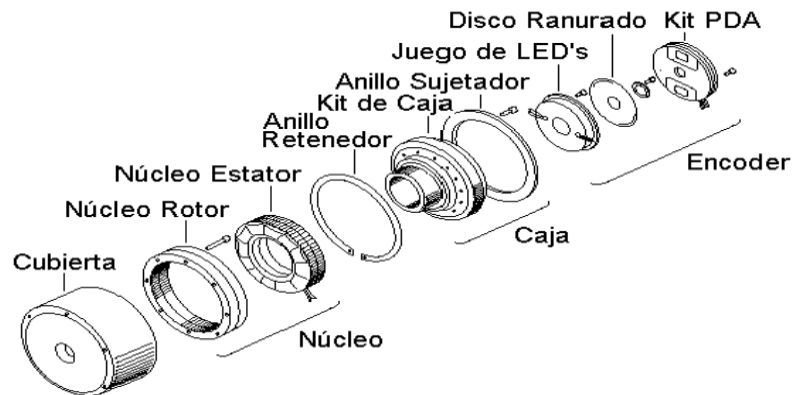


Figure 1.5: Componentes generales de un motor de transmisión directa.

Como puede deducirse de la discusión anterior, al emplear motores de transmisión directa como actuadores en las articulaciones de un robot manipulador, la construcción mecánica del mismo es mucho más simple y se gana exactitud en el

posicionamiento del robot, comparada con la que se obtiene en un robot del tipo tradicional [3, 21, 22]. El primer robot experimental con actuadores de transmisión directa del que se tiene conocimiento, data del año de 1981 y fue desarrollado por Asada y Kanade en el Instituto de Robótica de la Universidad de Carnegie-Mellon. A partir de esa fecha, los robots experimentales de transmisión directa han representado para los investigadores en el área de control automático, un punto de partida para retos teóricos y/o experimentales de interés.

Para los propósitos de este trabajo de tesis, se entenderá como *robot* a un manipulador mecánico de transmisión directa, el cual es reprogramable y está constituido por una cadena serial de eslabones del tipo rígido los cuales están conectados entre sí por articulaciones del tipo rotacional.

1.4 La Interface de Control

El dispositivo empleado para dotar al robot con capacidades de entrada y salida, es la tarjeta de control de movimiento MFIO-3A del fabricante Precision MicroDynamics. La tarjeta MFIO-3A es una interface de alta velocidad para PCs y una solución de bajo costo al problema de control de movimiento multi-axial [23]. El fabricante de la tarjeta proporciona una biblioteca de subrutinas en lenguaje C, tanto en código fuente como objeto, y las cuales pueden ser utilizadas para programar la interface. La tarjeta también puede ser programada accediendo al hardware al nivel de registros ya sea con lenguaje C o con lenguaje ensamblador. En la Figura 1.6 se muestra una perspectiva de la tarjeta MFIO-3A, así como de sus componentes principales.

Las características principales de la tarjeta MFIO-3A propiciaron la elección de dicho dispositivo para la plataforma experimental [23]. La interface seleccionada es una tarjeta de E/S de alto desempeño indicada para aplicaciones de control de

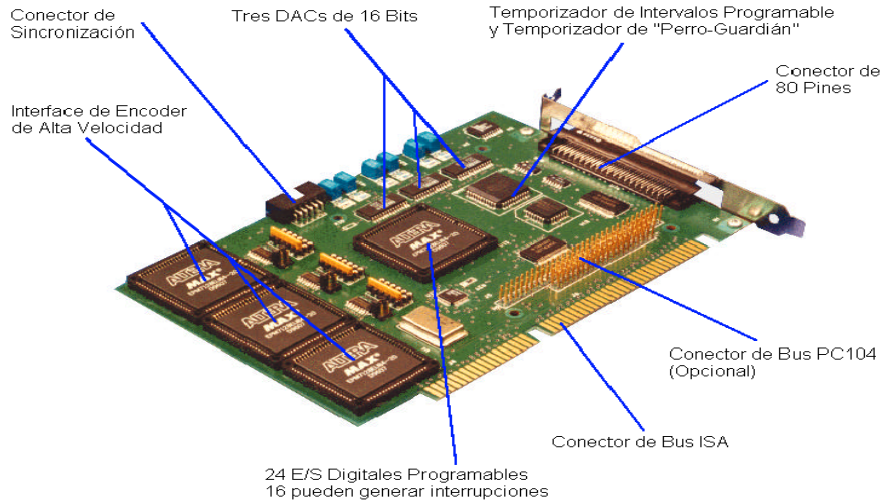


Figure 1.6: Componentes de la tarjeta de control de movimiento MFIO-3A.

movimiento por computadora. Está caracterizada por poseer tres canales D/A de 16 bits; tres entradas para encoders en cuadratura de fase; veinticuatro canales de E/S digitales programables con lectura y escritura de datos sincronizados; un temporizador de intervalos programable y un temporizador de “perro-guardián”. La tarjeta MFIO-3A soporta tanto el bus estándar ISA de 16 bits, como el bus PC/104 de 16 bits.

Una característica única en la tarjeta MFIO-3A es una señal (SYNC) que permite la sincronización entre la adquisición de datos y la salida analógica de modo tal que el algoritmo para el control de movimiento puede ser escrito como una ISR (*Interrupt Service Routine*, por sus siglas en inglés) que se ejecuta desde la PC. Los canales D/A tienen una resolución de 16 bits proporcionando así hasta 65356 niveles de salida y las entradas para encoders son filtradas para supresión de ruido y aceptan diferentes configuraciones para diferentes encoders. El temporizador de intervalos programable permite generar intervalos de tiempo que van desde $25\mu s$ hasta $515s$ y el temporizador de “perro-guardián” permite intervalos de $3.85\mu s$ hasta $125ms$ [23].

Chapter 2

Modelo Dinámico de Robots Manipuladores

"Pues en verdad el gran amor nace del conocimiento del objeto amado"

Leonardo Da Vinci

La modelación de sistemas complejos es difícil, de alto costo y lenta, especialmente cuando se incluyen pasos importantes de verificación experimental. Una vez que se obtiene un modelo en forma de ecuaciones dinámicas, generalmente ecuaciones diferenciales ordinarias, el paso siguiente es resolver estas ecuaciones para aprender la naturaleza de la respuesta del sistema. En general, la resolución de ecuaciones dinámicas es difícil por que la mayoría de los modelos prácticos y reales son de alto orden, varían en el tiempo y no son lineales. En los sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos, mecatrónicos cuyo comportamiento dinámico es descrito en forma matemática, se suelen utilizar las ecuaciones conocidas como *Euler – Lagrange*;

dichos sistemas son referidos en la literatura [24, 25, 26] como *sistemas Euler Lagrange* están caracterizados por cantidades físicas inherentes a los sistemas tales como energía cinética, energía potencial, fuerzas de fricción y fuerzas aplicadas externas. Una subclase de los *sistemas Euler – Lagrange* son aquellos que se caracterizan por tener energía cinética que puede ser expresada matemáticamente como una forma cuadrática y cuya energía potencial depende únicamente de la posición generalizada empleada. Dentro de la subclase de *sistemas Euler – Lagrange* mencionados anteriormente pueden situarse a los robots manipuladores.

Dado que el modelo dinámico de un robot manipulador depende de la configuración geométrica del mismo así como del tipo de articulaciones empleadas (giatorias o lineales), dicho modelo puede ser de gran utilidad en la etapa de diseño mecánico del manipulador. El modelo, que revela el comportamiento dinámico del manipulador, es el principio del diseño de controladores basados en modelo, ya que para propósitos de investigación científica en el desarrollo de nuevos algoritmos de control para robots manipuladores, el modelo dinámico cuenta con propiedades que son muy útiles al realizar análisis de estabilidad y robustez. Al igual que en otros problemas de control automático, en el caso de los robots manipuladores es de vital importancia el concepto de estabilidad. El modelo dinámico de un robot manipulador, la teoría del espacio de estado y los métodos de Lyapunov brindan medios adecuados para diseñar nuevas leyes de control basadas en modelo con estabilidad y robustez.

Debido a la naturaleza no lineal, multivariable y fuertemente acoplada del comportamiento dinámico de un robot manipulador, este tipo de sistema ofrece un escenario interesante a los investigadores en control automático para la formulación de problemas de carácter tanto teóricos como prácticos.

Determinar el modelo dinámico de una configuración de manipulador dada no es una tarea fácil, ya que un robot es un sistema mecánico complejo cuya descripción

analítica requiere de ecuaciones diferenciales no lineales y no autónomas las cuales pueden ser escritas a través de las ecuaciones de movimiento de *Euler – Lagrange* o de *Hamilton* [3]. El modelo dinámico de un robot manipulador juega un papel importante para la simulación de movimiento, el análisis de estructuras del manipulador y el diseño de los algoritmos de control [48]. Además puede demostrarse que conforme se incrementa el número de grados de libertad en un manipulador, se ve aumentada la complejidad en el uso de tales ecuaciones, se presentará un robot manipulador de 3 articulaciones como se muestra en la Figura (2.1).



Figure 2.1: Nombre común de las 3 articulaciones.

2.1 Metodología de Euler - Lagrange

En esta sección se discutirá sobre la obtención del modelo dinámico para *sistemas Euler – Lagrange*. Los *sistemas* pueden ser caracterizados por un conjunto de cantidades físicas, a saber [24]:

$$\{\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{U}(\mathbf{q}), \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}}), \mathbf{M}\} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades y n es el número de grados de libertad del sistema. Además $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ representa la energía cinética total del sistema, $\mathcal{U}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$ representa la energía potencial total del sistema, $\mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})$ es la función de disipación de Rayleigh¹ y el último parámetro, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, representa una matriz que mapea las entradas externas a las coordenadas generalizadas.

Considerando un robot manipulador rígido de n grados de libertad, formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad. La energía total $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está dada por la suma de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (2.2)$$

De acuerdo con los métodos del cálculo variacional, las ecuaciones de *Euler – Lagrange* pueden obtenerse a partir ya sea de un principio diferencial (el principio de D'Alembert) o de un principio integral (el principio de Hamilton) [24, 25]. Tales ecuaciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{Q} \quad (2.3)$$

donde en (2.3), $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^n$, representa las fuerzas externas al sistema. En esta tesis se asume que $\mathcal{Q}$ está compuesto sólo de fuerzas potenciales, $\mathbf{M}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, y de fuerzas disipativas, $-\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, es decir:

$$\mathcal{Q} = \mathbf{M}\mathbf{u} - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.4)$$

¹La función de disipación de Rayleigh está definida como:

$$F \triangleq \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{x_i}^2 + k_y v_{y_i}^2 + k_z v_{z_i}^2)$$

donde la sumatoria es sobre todas las partículas que componen al sistema y v_{x_i} , v_{y_i} y v_{z_i} , son las velocidades en las direcciones x , y e z de la i –ésima partícula.

donde en (2.4), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de entradas externas. Además en (2.3) se tiene que [24, 25, 26]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

donde en (2.5), $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es conocido como el *Lagrangiano* del sistema. Se ha mencionado que existe una subclase de *sistemas Euler – Lagrangiano* cuya energía cinética total $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, puede ser expresada matemáticamente como una forma cuadrática, y cuya energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ depende sólo de la posición generalizada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Expresando la energía cinética total del sistema como una forma cuadrática se tiene [24, 27]:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.6)$$

donde en (2.6) $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz de inercia del sistema y satisface $M(\mathbf{q}) = M^T(\mathbf{q}) > 0$ (es decir la matriz de inercia es una matriz definida positiva), para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Utilizando (2.6) en (2.5) se tiene para el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j [m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j] - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

derivando la ecuación anterior respecto de la k -ésima velocidad, con $k = 1, 2, \dots, n$, y observando que la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no depende de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$, se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \quad (2.8)$$

derivando la expresión anterior con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_k} \right] &= \sum_j m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} \{m_{kj}(\mathbf{q})\} \dot{q}_j \\ &= \sum_j m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_j \sum_i \left\{ \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i \right\} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (2.9)$$

por otro lado, derivando el Lagrangiano respecto de la k -ésima posición generalizada, con $k = 1, 2, \dots, n$, se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial q_k}. \quad (2.10)$$

Utilizando las dos últimas expresiones obtenidas, así como la ecuación (2.4) con $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n$, y sustituyendo en la ecuación (2.3), se tiene para la k -ésima ecuación de *Euler – Lagrange* del sistema, con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_j m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial q_k} = u_k - \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.11)$$

intercambiando el orden de sumatoria en el segundo término del lado izquierdo de la ecuación (2.11), y por la propiedad de simetría de la matriz de inercia, puede demostrarse que [24, 27]:

$$\sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.12)$$

donde en la expresión anterior, los coeficientes:

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial m_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right\} \quad (2.13)$$

son los así llamados símbolos de Christoffel del primer tipo. Si se define lo siguiente, en la ecuación (2.11):

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_k} = f_k(u_k, \dot{q}_k) \quad (2.14)$$

$$g_k(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \quad (2.15)$$

entonces utilizando las expresiones (2.13) a la (2.15) en la ecuación (2.11), la k -ésima ecuación de *Euler – Lagrange* del sistema, con $k = 1, 2, \dots, n$, puede ser escrita en forma compacta de la siguiente manera:

$$\sum_j m_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_i \sum_j c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(\mathbf{q}) + f_k(u_k, \dot{q}_k) = u_k \quad (2.16)$$

Obsérvese que en la ecuación (2.16) existen 4 tipos de términos [27]. El primer término involucra la derivada segunda de las coordenadas generalizadas. El segundo elemento son términos cuadráticos en la derivada primera de las coordenadas generalizadas y los coeficientes pueden depender de $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Tales términos pueden ser adicionalmente divididos en dos tipos: los términos que involucran un producto del tipo $\dot{q}_i^2$ son llamados términos centrífugos, y aquellos involucrando un producto del tipo $\dot{q}_i \dot{q}_j$, donde $i \neq j$ son llamados términos de Coriolis. El tercer elemento son términos que involucran a $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ pero no sus derivadas. Esto último surge claramente de la diferenciación de la energía potencial. El cuarto y último elemento son términos así llamados fuerzas de fricción. En realidad todo sistema mecánico está siempre afectado por perturbaciones y fricción. La fricción es inherente a los sistemas mecánicos industriales y ha sido de la preocupación de los diseñadores de maquinaria e ingenieros de control realmente por mucho tiempo. Esencialmente existen dos clases de modelos de fricción que son empleados en el análisis de movimiento y control de sistemas mecánicos: los modelos de fricción estáticos y dinámicos; para una mayor referencia de tales modelos de fricción pueden ser consultadas las referencias [28, 29]. Los componentes del vector de pares de fricción que se forma por los k términos dados en (2.13) serán considerados como descentralizados o desacoplados en el sentido de que $f_k(u_k, \dot{q}_k)$ depende sólo de $\dot{q}_k$ y u_k , es decir, el vector de torques de fricción estará dado por:

$$f(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \dot{q}_1) \\ f_2(u_2, \dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(u_n, \dot{q}_n) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

El vector de pares de fricción $f(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{q}})$ es supuesto para disipar energía a todas las velocidades no cero y, de esta manera, sus entradas están acotadas dentro del primer y tercer cuadrante. Esta característica permite considerar los modelos de

fricción estática, viscosa y de Coulumb [3]. Así el modelo de fricción a emplear en este trabajo estará dado por:

$$f(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{F}_c \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} [1 - |\operatorname{sgn}(\dot{q}_1)|] \operatorname{sat}(u_1, f_{e1}) \\ \vdots \\ [1 - |\operatorname{sgn}(\dot{q}_k)|] \operatorname{sat}(u_k, f_{ek}) \\ \vdots \\ [1 - |\operatorname{sgn}(\dot{q}_n)|] \operatorname{sat}(u_n, f_{en}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

donde en (2.18) $\mathbb{B}$, $\mathbb{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, representan las matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulumb respectivamente y están dadas por:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}_c = \begin{pmatrix} f_{c1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_{cn} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

y además en (2.18), $f_{e1}, \dots, f_{ek}, \dots, f_{en}$, representan los coeficientes de fricción estática y se satisface:

$$\operatorname{sat}(u_k, f_{ek}) = \begin{cases} f_{ek}, & u_k > f_{ek} \\ u_k, & -f_{ek} \leq u_k \leq f_{ek} \\ -f_{ek}, & u_k < -f_{ek} \end{cases} \quad (2.20)$$

El desarrollo del modelo dinámico de la clase de *sistemas Euler – Lagrange*, es una práctica común en la literatura (Véase por ejemplo, [2, 3, 4, 30]), expresar la ecuación (2.16) en una forma vectorial–matricial, es decir:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) + f(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}. \quad (2.21)$$

donde en la ecuación (2.21), $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del sistema, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de aceleraciones, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada la matriz de fuerzas

centrípeta y de Coriolis del sistema y $g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ representa un vector de fuerzas gravitacionales. Además de (2.13) a la (2.15) se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = f(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.22)$$

$$g(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.23)$$

y la kj -ésima entrada de la matriz de Coriolis y fuerzas centrípeta está dada por:

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_i c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \quad (2.24)$$

2.2 Modelo Dinámico de Robots Manipuladores

Dentro de la subclase de *sistemas Euler – Lagrange* cuya energía cinética total $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es expresada como una forma cuadrática, y cuya energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ depende sólo de la posición generalizada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, son los robots manipuladores [24]. En el caso de un robot manipulador, el vector de entradas externas, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, se convierte en el vector de pares aplicados, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$, y la ecuación (2.21) llega a ser:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) + f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.25)$$

En lo que al modelo dinámico de robots manipuladores se refiere, la obtención y/o comprobación del modelo dinámico para un robot manipulador de tres grados de libertad con articulaciones giratorias, se obtiene el modelo dinámico dado en (2.25) empleando un desarrollo distinto a la notación del gradiente, la ecuación de *Euler – Lagrange* (2.3) puede ser escrita nuevamente como:

$$\frac{d}{dt} \{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} [\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \} - \nabla_{\mathbf{q}} [\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = \mathcal{Q} \quad (2.26)$$

donde en (2.26) $\nabla_{\mathbf{x}}$ representa el gradiente del Lagrangiano con respecto al vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$, es el vector de pares aplicados. Recordando que sólo se están

considerando sistemas completamente actuados, y para el caso de los robots manipuladores, considerando que las entradas externas al sistema están constituidas en el vector de pares aplicados $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación (2.26) puede ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} [\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \} - \nabla_{\mathbf{q}} [\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] = \boldsymbol{\tau} - \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.27)$$

utilizando (2.4), (2.6) y (2.22) en (2.27) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right] \right\} - \nabla_{\mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right] = \boldsymbol{\tau} - f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.28)$$

debido a que la energía potencial no depende de la velocidad articular, entonces el gradiente de la energía potencial con respecto a la velocidad articular es cero, y la ecuación (2.28) puede desarrollarse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right\} - \nabla_{\mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right] &= \boldsymbol{\tau} - f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \frac{d}{dt} \{ M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \} - \nabla_{\mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} - f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \\ M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{q}} [\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} - f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

la ecuación (2.29) puede escribirse en forma vectorial-matricial, como sigue:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) + f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.30)$$

donde en la ecuación anterior (2.30) puede verse que se tienen las siguientes definiciones:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{q}} [\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \quad (2.31)$$

$$g(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.32)$$

De esta manera pueden establecerse las siguientes relaciones para el modelo dinámico de un robot manipulador:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.33)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.34)$$

$$g(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.35)$$

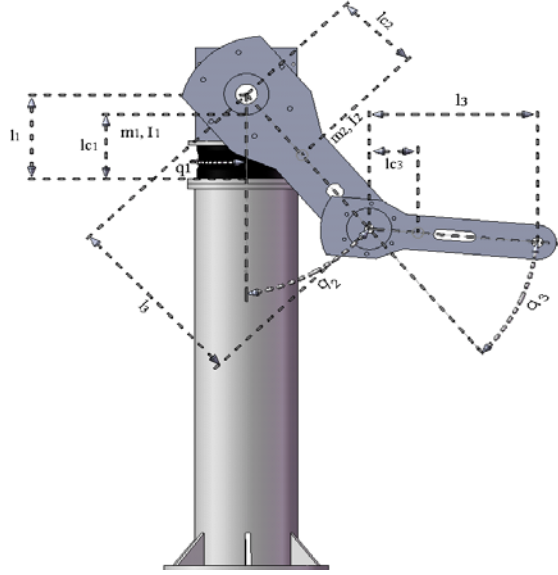


Figure 2.2: Esquema del Robot Manipulador.

2.3 Desarrollo del Modelo Dinámico del Robot

Esta sección está dedicada al modelado dinámico del robot experimental de transmisión directa [51]. Para la obtención del modelo dinámico respectivo, se utilizó la metodología de Euler-Lagrange comentada en la sección anterior después se utilizaron las relaciones establecidas en las ecuaciones (2.33), (2.34) y (2.35).

2.3.1 Empleo de la Metodología de Euler-Lagrange

Se utiliza una serie de pasos para seguir la metodología de Euler-Lagrange en el modelado dinámico de robots manipuladores rígidos. Considerando al robot el cual se esquematiza en la Figura 2.2, se obtiene el modelo dinámico de este manipulador.

Eslabón	Significado	Notación
1 (Base)	Masa del eslabón 1	m_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Tensor de inercia del eslabón 1	$\mathbf{I}_1$
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Posición articular del eslabón 1	q_1
2 (Hombro)	Masa del eslabón 2	m_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Tensor de inercia del eslabón 2	$\mathbf{I}_2$
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Posición articular del eslabón 2	q_2
3 (Codo)	Masa del eslabón 3	m_3
	Longitud del eslabón 3	l_3
	Tensor de inercia del eslabón 3	$\mathbf{I}_3$
	Centro de masa del eslabón 3	l_{c3}
	Posición articular del eslabón 3	q_3

Notación de los parámetros del robot.

En la tabla 2.1 se resume el significado de los símbolos que se muestran en la Figura (2.2).

Modelo de cinemática directa del robot

1. De la Figura (2.2), las ecuaciones de cinemática directa para el robot son las siguientes:

$$F_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

$$F_2(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2) \\ l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2) \\ l_1 - l_{c2} \cos(q_2) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

$$F_3(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\ l_1 - l_2 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

donde en (2.36), (2.37) y (2.38), $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ representan las posiciones articulares del primero, segundo y tercer eslabón respectivamente ver la Figura (2.3).

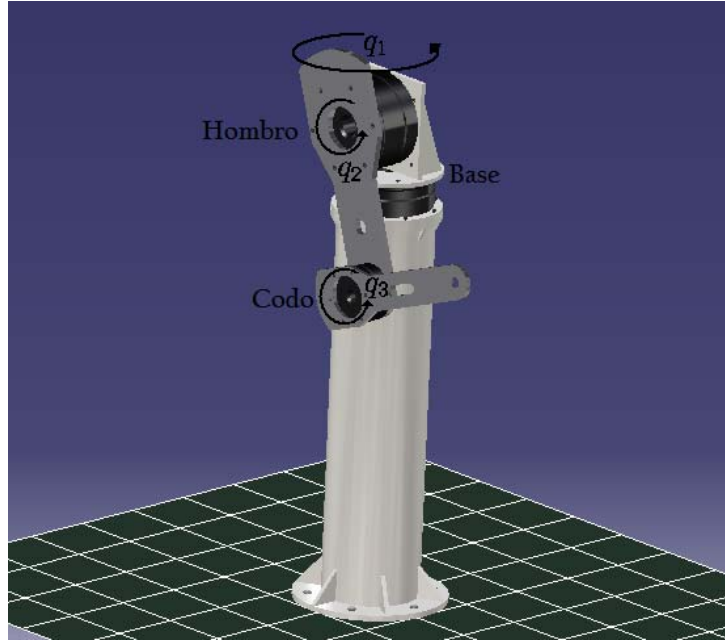


Figure 2.3: Especificación de las 3 articulaciones.

Modelos de Energía Cinética y Potencial Totales del Robot

Utilizando nociones de la mecánica clásica para cada uno de los tres eslabones del robot se tiene respectivamente para las energías cinéticas:

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^T\mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^T\mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_1 \quad (2.39)$$

$$\mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T\mathbf{I}_2\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2^T\mathbf{I}_2\boldsymbol{\omega}_2 \quad (2.40)$$

$$\mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_3\mathbf{v}_3^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_3^T\mathbf{I}_3\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{2}m_3\mathbf{v}_3^T\mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_3^T\mathbf{I}_3\boldsymbol{\omega}_3 \quad (2.41)$$

Donde en (2.39) a (2.41) $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ representa la velocidad traslacional del i -ésimo eslabón, $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^n$ representa la velocidad rotacional del i -ésimo eslabón e $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representan los tensores de inercia del primer, segundo y tercer eslabón respectivamente ver la Figura (2.3).

A partir de las ecuaciones (2.36) a (2.38), los jacobianos para cada eslabón del manipulador están dados por:

$$J_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$J_2(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2) & l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2) & 0 \\ l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2) & l_{c2} \sin(q_1) \cos(q_2) & 0 \\ 0 & l_{c2} \sin(q_2) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$J_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] & \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\ \cos(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] & \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\ 0 & l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ \dots \quad l_{c3} \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\ l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

de esta manera empleando las ecuaciones (2.42) a (2.44) se tiene para las velocidades traslacionales de cada eslabón:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 = & \begin{pmatrix} -\sin(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 + \\ \cos(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 + \\ [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_2 + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_3 \\ \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Empleando la ecuación (2.45) se tiene para el cuadrado de la velocidad traslacional del primer eslabón:

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = 0. \quad (2.48)$$

Ahora empleando la ecuación (2.46) puede obtenerse para la velocidad traslacional del segundo eslabón:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2^2 &= \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = (-l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2)^2 + \\
&\quad + (l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2)^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2 \\
&= l_{c2}^2 \sin^2(q_1) \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 - 2l_{c2}^2 \sin(q_1) \sin(q_2) \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
&\quad + l_{c2}^2 \cos^2(q_1) \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_1) \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + \\
&\quad + 2l_{c2}^2 \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_1) \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2 + \\
&\quad + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2 \\
&= l_{c2}^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_2) \dot{q}_2^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_2^2
\end{aligned}$$

Empleando identidades trigonométricas se obtiene para el cuadrado de la velocidad traslacional del segundo eslabón:

$$\mathbf{v}_2^2 = l_{c2}^2 [\sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \quad (2.49)$$

Empleando la ecuación (2.47) puede obtenerse el cuadrado de la velocidad traslacional del tercer eslabón, del modo siguiente:

$$\mathbf{v}_3^2 = \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 = (a\dot{q}_1 + b\dot{q}_2 + c\dot{q}_3)^2 + (d\dot{q}_1 + e\dot{q}_2 + f\dot{q}_3)^2 + (g\dot{q}_2 + h\dot{q}_3)^2$$

donde en la ecuación anterior al compararla con (2.46) se tiene:

$$\begin{aligned}
a &= -\sin(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\
b &= \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\
c &= l_{c3} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\
d &= \cos(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\
e &= \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\
f &= l_{c3} \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) \\
g &= l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\
h &= l_{c3} \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

Realizando el desarrollo correspondiente y empleando las relaciones anteriores junto con identidades trigonométricas se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3^2 &= a^2 \dot{q}_1^2 + b^2 \dot{q}_2^2 + c^2 \dot{q}_3^2 + d^2 \dot{q}_1^2 + e^2 \dot{q}_2^2 + f^2 \dot{q}_3^2 + g^2 \dot{q}_2^2 + h^2 \dot{q}_3^2 \\
&\quad + ab \dot{q}_1 \dot{q}_2 + ac \dot{q}_1 \dot{q}_3 + bc \dot{q}_2 \dot{q}_3 + de \dot{q}_1 \dot{q}_2 + df \dot{q}_1 \dot{q}_3 + ef \dot{q}_2 \dot{q}_3 + gh \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
\mathbf{v}_3^2 &= \sin^2(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_1^2 + \\
&\quad \cos^2(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_2^2 + l_{c3}^2 \cos^2(q_1) \cos^2(q_2 + q_3) \dot{q}_3^2 + \\
&\quad + \cos^2(q_1) [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_1^2 + \\
&\quad + \sin^2(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_2^2 + l_{c3}^2 \sin^2(q_1) \cos^2(q_2 + q_3) \dot{q}_3^2 + \\
&\quad + [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_2^2 + l_{c3}^2 \sin^2(q_2 + q_3) \dot{q}_3^2 \\
\mathbf{v}_3^2 &= [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_1^2 + [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)] \dot{q}_2^2 \\
&\quad + l_{c3}^2 \dot{q}_3^2 + 2l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.50}$$

se tiene para las velocidades angulares de cada uno de los eslabones del manipulador:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \sin(q_2) \\ \dot{q}_1 \cos(q_2) \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

empleando (2.48) a (2.53), en las ecuaciones (2.39) a la (2.41), se tiene para las energías de cada uno de los tres eslabones del manipulador:

$$\mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} I_{z1} \dot{q}_1^2 \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{x2} \dot{q}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} I_{y2} \dot{q}_1^2 \sin^2(q_2) + \frac{1}{2} I_{z2} \dot{q}_1^2 \cos^2(q_2) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)] \dot{q}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 \dot{q}_3^2 + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} I_{x3} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{x3} \dot{q}_3^2 + I_{x3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ & + \frac{1}{2} I_{y3} \dot{q}_1^2 \sin^2(q_2 + q_3) + \frac{1}{2} I_{z3} \dot{q}_1^2 \cos^2(q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (2.56)$$

la Figura (2.2) puede obtenerse que para las energías potenciales de cada uno de los eslabones del manipulador se tiene respectivamente:

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{q}) = m_1 g l_1 \quad (2.57)$$

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{q}) = m_2 g [l_1 - l_{c2} \cos(q_2)] \quad (2.58)$$

$$\mathcal{U}_3(\mathbf{q}) = m_3 g [l_1 - l_2 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \quad (2.59)$$

Así, empleando las ecuaciones (2.54) a la (2.59), se tiene para las energías cinética y potencial totales del manipulador:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ = & \frac{1}{2} [I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2] \dot{q}_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} [I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]] \dot{q}_2^2 + \\ & + \frac{1}{2} [I_{x3} + m_3 l_{c3}^2] \dot{q}_3^2 + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_T(\mathbf{q}) &= \mathcal{U}_1(\mathbf{q}) + \mathcal{U}_2(\mathbf{q}) + \mathcal{U}_3(\mathbf{q}) \\
&= m_1 g l_1 + m_2 g [l_1 - l_{c2} \cos(q_2)] + m_3 g [l_1 - l_2 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

2.3.2 Lagrangiano del Manipulador

Empleando (2.60) y (2.61), el lagrangiano del robot, se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}_T(\mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{2} [I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} [I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]] \dot{q}_2^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} [I_{x3} + m_3 l_{c3}^2] \dot{q}_3^2 + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \\
&\quad - m_1 g l_1 - m_2 g [l_1 - l_{c2} \cos(q_2)] - m_3 g [l_1 - l_2 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Metodología de *Euler – Lagrange* para obtener el modelo dinámico del robot

Debido a que en el caso del robot, al emplear la metodología de *Euler – Lagrange* las ecuaciones que se obtienen son demasiado extensas, se empleará un manejo algebraico diferente. Derivando la ecuación (2.62) con respecto a las velocidades angulares $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ y $\dot{q}_3$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} &= [I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 + \\
&\quad + [m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2] \dot{q}_1 \tag{2.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} &= [I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]] \dot{q}_2 + \\
&\quad + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \dot{q}_3 \tag{2.64}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_3} = [I_{x3} + m_3 l_{c3}^2] \dot{q}_3 + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \dot{q}_2 \quad (2.65)$$

derivando con respecto al tiempo las ecuaciones (2.63) a la (2.65) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & [I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3)] \ddot{q}_1 \\ & + 2I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & + 2I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \\ & - 2I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & + 2m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2] \dot{q}_1 \\ & + 2m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [[l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \dot{q}_1 \quad (2.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & [I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]] \ddot{q}_2 - 2m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3 \dot{q}_2 \\ & + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \ddot{q}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3^2 \quad (2.67) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_3} \right] = [I_{x3} + m_3 l_{c3}^2] \ddot{q}_3 + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \ddot{q}_2 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3 \dot{q}_2 \quad (2.68)$$

ahora derivando la ecuación (2.62) con respecto de las posiciones articulares q_1 , q_2 y q_3 se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = 0 \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = & I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \\ & + I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 - I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + \\ & + m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\ & + [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 \\ & - m_2 g [l_{c2} \sin(q_2)] - m_3 g [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \quad (2.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_3} = & I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 - I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + \\
& + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 - \\
& - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2^2 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

empleando la ecuación (2.3) y de la ((2.66) a la (2.71) se obtiene para los pares aplicados:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & [I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3)] \ddot{q}_1 + \\
& + 2I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
& + 2I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \\
& - 2I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
& + 2m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2 + [l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \dot{q}_1 \\
& + f_{f1}(\tau_1, \dot{q}_1)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]] \ddot{q}_2 - 2m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3 \dot{q}_2 \\
& + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \ddot{q}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3^2 \\
& - I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \\
& - I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 - \\
& - m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - \\
& - m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 + \\
& + m_2 g [l_{c2} \sin(q_2)] + m_3 g [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] + f_{f2}(\tau_2, \dot{q}_2)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & [I_{x3} + m_3 l_{c3}^2] \ddot{q}_3 + [I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)]] \ddot{q}_2 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3 \dot{q}_2 - \\
& - I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 - \\
& - m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1^2 + \\
& + m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2^2 + m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + \\
& + f_{f3}(\tau_3, \dot{q}_3)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Reacomodando los términos de las ecuaciones (2.72) a la (2.74) en una sola ecuación matricial, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\tau_1, \dot{q}_1) \\ f_2(\tau_2, \dot{q}_2) \\ f_3(\tau_3, \dot{q}_3) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

donde en la ecuación (2.75) puede verse que son los elementos de la matriz $M(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned}
m_{11} = & I_{z1} + I_{y2} \sin^2(q_2) + I_{z2} \cos^2(q_2) + I_{y3} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{z3} \cos^2(q_2 + q_3) + \\
& + m_2 l_{c2}^2 \sin^2(q_2) + m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]^2 \\
m_{12} = & 0 \\
m_{13} = & 0 \\
m_{21} = & 0 \\
m_{22} = & I_{x2} + I_{x3} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)] \\
m_{23} = & I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)] \\
m_{31} = & 0 \\
m_{32} = & I_{x3} + m_3 l_{c3} [l_{c3} + l_2 \cos(q_3)] \\
m_{33} = & I_{x3} + m_3 l_{c3}^2
\end{aligned}$$

así se tiene los elementos de la matriz de Coriolis:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 2I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 - 2I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 + \\
&\quad + 2I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - 2I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 + \\
&\quad + 2m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 + \\
&\quad + 2m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2 + [l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)] \\
c_{12} &= 0 \\
c_{13} &= 0 \\
c_{21} &= -[I_{y2} \sin(q_2) \cos(q_2) - I_{z2} \cos(q_2) \sin(q_2)] \dot{q}_1 - \\
&\quad - [I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) - I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 - \\
&\quad - [m_2 l_{c2}^2 \sin(q_2) \cos(q_2)] \dot{q}_1 - \\
&\quad - m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \\
c_{22} &= -2m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{23} &= -m_3 l_{c3} l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{31} &= -[I_{y3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) - I_{z3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 - \\
&\quad - m_3 [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] [l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \\
c_{32} &= m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2 \\
c_{33} &= 0
\end{aligned}$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = m_2 g l_{c2} \sin(q_2) + m_3 g [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]$$

$$g_3 = m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

es decir, el vector de pares gravitacionales es:

$$g(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g l_{c2} \sin(q_2) + m_3 g [l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \\ m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

2.4 Parámetros dinámicos

El conjunto de parámetros, denominados dinámicos, del robot, está constituido por las masas de los eslabones, distancias desde el centro de masa de cada eslabón al respectivo eje de giro y por los tensores de inercia (constituidos a su vez de seis diferentes parámetros) de cada eslabón. Cada uno de dichos parámetros presenta una dependencia de la composición física de cada eslabón del manipulador.

Haciendo uso de los parámetros, se obtuvieron los valores de los parámetros dinámicos del robot, los cuales se resumen en la tabla 2.2.

Significado	Notación	Valor	Unidades
Longitud del eslabón 1	l_1	0.35	m
Masa del eslabón 1	m_1	27.72	Kg
Centro de masa 1	l_{c1}	0.203	m
Tensor de Inercia del eslabón 1	I_{xx1}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{xy1}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{xz1}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{yy1}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{yz1}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{zz1}	0.8785	Kg m^2 /rad
Longitud del eslabón 2	l_1	0.35	m
Masa del eslabón 2	m_2	17.46	Kg
Centro de masa 2	l_{c2}	0.048	m
Tensor de Inercia del eslabón 2	I_{xx2}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{xy2}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{xz2}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{yy2}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{yz2}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{zz2}	0.8785	Kg m^2 /rad
Longitud del eslabón 3	l_1	0.35	m
Masa del eslabón 3	m_1	1.65	Kg
Centro de masa 3	l_{c3}	0.048	m
Tensor de Inercia del eslabón 3	I_{xx3}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{xy3}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{xz3}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{yy3}	0.8785	Kg m^2 /rad
	I_{yz3}	3.3362	Kg m^2 /rad
	I_{zz3}	0.8785	Kg m^2 /rad

Tabla 2.2 Parámetros Dinámicos del Robot.

2.5 Modelo Cinemático Directo

La cinemática directa es una función vectorial que describe la relación entre la posición articular de $\mathbf{q}$ con las coordenadas cartesianas de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde n es el número de grados de libertad, y m representa la dimensión del marco de la coordenadas cartesianas.

La posición $x_R \in \mathbb{R}^3$ del dispositivo final del robot con respecto al marco de coordenadas se da en términos de las posiciones articulares es decir: $x_R = f(\mathbf{q})$.

Chapter 3

Sistema de Visión

"El ojo abarca la belleza del mundo entero"

Leonardo Da Vinci

Desde la época de los clásicos griegos se trató de responder filosófica y científicamente a muy diversas cuestiones entre las que destaca el cómo es que el ser humano percibe su realidad exterior, es decir, de qué manera capta, usa y representa la información obtenida por sus sentidos. En el afán de contestar a preguntas como las anteriores, el hombre ha ido progresando en todos los campos en los cuales ha tenido ingerencia, reflejándose así en el desarrollo de nuevas tecnologías. De esta forma a partir de los años sesenta una de las herramientas con las cuales el hombre se ha auxiliado para poner a prueba y desarrollar nuevas y diversas hipótesis

en distintos campos de investigación, es la computadora. Esta ha sido el resultado de desarrollos y logros en diversas áreas. Dada la capacidad de las computadoras referente a la potencia de cálculo de gran cantidad de datos en un tiempo mucho menor al que tomaría hacerlo en forma manual, una área de aplicación directamente beneficiada es el estudio de las propiedades del sistema de visión humano. De esta forma nace lo que se conoce como "Visión Artificial" o "Visión por Computadora". La visión artificial puede ser tratada ya sea como el estudio de cómo transferir a las máquinas el poder de la percepción de la visión humana; también como todos aquellos métodos que permitan a las máquinas "Ver" solo lo que es necesario para un objetivo específico, es decir analizar el contenido visual de una escena. Refiriéndose a la transferencia de la visión humana a las máquinas, existe la tendencia a intentar modelar los sistemas de percepción basándonos en el propio, dando como consecuencia una importante área de investigación, donde la problemática a resolver es responder a la pregunta ¿Cómo vemos?, Por lo que respecta al desarrollo de métodos que permitan a las máquinas analizar imágenes, se han conseguido importantes avances, creando máquinas que superan las capacidades de los seres humanos en la realización de ciertas tareas, dando como conclusión que algunas de las limitaciones de nuestro sistema de visión pueden ser salvadas con la ayuda de sistemas de visión artificial. Sin embargo existen capacidades que no han podido ser duplicadas en forma artificial (siendo la mayoría). Por lo anterior, el problema de emular la percepción humana en máquinas esta lejos de ser resuelto en una forma o ámbito general. En la búsqueda de las soluciones a los problemas que comprende la visión artificial, destaca el emular la visión humana en su percepción y tratamiento de la información, que lleva a cabo. Se propusieron diversas teorías destacando, la dada por Horn (1975,1977), en donde la idea principal es: "debe existir un nivel adicional de comprensión en el que el carácter de las tareas de procesamiento de la información llevadas a cabo durante la percepción se analice y comprenda de forma independiente a los mecanismos y estructuras particulares que los implementan en nuestros cerebros". Esta afirmación

sirve para trabajos subsecuentes que dan como resultado teorías de tipo modular, en las que se analiza el proceso de visión como una sucesión de transformaciones a partir de imágenes del mundo (Marr, 1976; Marr & Nishihara, 1976). Tomando en cuenta estas primeras consideraciones se plantean modelos o metodologías a través de las cuales se trata de dar solución a las interrogantes hechas de cómo codifican, representan y reconocen los sistemas de visión, soluciones que pueden ser aplicables a los mecanismos artificiales, surgiendo así dos grandes marcos de referencia dados en base a la forma de considerar los procesos de decodificación y transformación de la información. El primero de los marcos fue dado por los trabajos de Marr [31] que establece una metodología "bottom/up" o ascendente, donde el proceso de la información pasa por tres grandes bloques que son:

2 D.- Cálculo del esbozo primitivo como estructura informacional que caracteriza los distintos rasgos básicos (bordes, líneas, arcos, manchas, centroides, etc.) presentes en la imagen de intensidades.

2 $\frac{1}{2}$ D.- Construcción de las superficies presentes en la imagen desde el punto de vista del observador, a partir de las informaciones suministradas por el esbozo primitivo y las informaciones tridimensionales proporcionadas por las estereoscopia, sombreado, reflectancia, iluminación, etc.

3 D.- Construcción del modelo que representa a los objetos en el espacio y permite catalogarlos y compararlos con información previamente almacenada.

La visión robótica puede ser definida como el proceso de extracción, caracterización e interpretación de imágenes tridimensionales. Este proceso, comúnmente referido a una visión por computadora, puede ser dividido en seis áreas principales: (a) sensado, (b) preprocesamiento, (c) segmentación, (d) descripción, (f) reconocimiento e (g) interpretación. Sensado es el proceso que produce una imagen visual. Preprocesamiento es un tratamiento con técnicas tales como reducción

de ruido y realce de detalles. Segmentación es el proceso en el que se particiona una imagen en objetos de interés. La descripción es un tratamiento, mediante la computadora, adecuado para diferenciar un tipo de objeto de otro. Reconocimiento es el proceso que identifica esos objetos. La interpretación asigna un significado para un conjunto de objetos reconocidos. Aunque el control mediante retroalimentación visual ha sido un área de investigación en los últimos 30 años, la atención a éste ha crecido drásticamente en años recientes. Los primeros estudios en este campo, en los finales de los 70's, fueron motivados principalmente por problemas de reconocimiento de patrones. Los resultados obtenidos en el reconocimiento, la localización, o la inspección son una parte inamovible, hasta el día de hoy, en el estado del arte. En complemento, el mayor trabajo fue hecho en el dominio del análisis de secuencias de imágenes (visión dinámica). Los primeros sistemas de control con retroalimentación visual fueron reportados a mediados de los 80's. Sin embargo, el costo del hardware para implementar estos sistemas en tiempo real era extremadamente alto.

La capacidad de los sensores utilizados en la robótica incrementan o disminuyen la versatilidad y el campo de aplicación de los robots, en consideración a esto, los sistemas de visión por computadora representan una herramienta muy importante para proporcionarle al robot de un sensor que de forma limitada trata de imitar al sistema de visión humano y le permite una percepción de su ambiente de trabajo sin tener que ser invasivo. En un inicio, el uso de sensores de visión y el control de robots se combinan en modelos de lazo abierto, esto es, la posición del objeto a manipular en el espacio de trabajo se obtiene a través del sistema de visión, posteriormente una secuencia de movimientos es planeada y ejecutada, este modelo es conocido como mira y mueve; por tratarse de un sistema en lazo abierto, éste padece algunas desventajas como son la sensibilidad a la incertidumbre paramétrica y a las perturbaciones externas. Una atractiva solución para mejorar el desempeño y la exactitud de estos tipos de sistemas representa la retroalimentación visual, la utilización de sistemas servo visuales contribuye a disolver las desventajas de sensibi-

lidad del sistema a perturbaciones externas y variaciones en sus parámetros, además que no se necesita una rigurosa precisión en la manufactura de los mecanismos del robot, debido a que pueden ser compensadas mediante la información visual.

Este trabajo de tesis está enfocado al control de robots manipuladores planares usando información visual proporcionada por una cámara web. La tecnología de cámaras más utilizada actualmente es la CCD (charged-coupled-device). Estas cámaras se basan en un único chip de silicio construido mediante procesos litográficos estándares. Se han construido matrices de 4096x4096 elementos de imagen (pixels) de cinco a seis micras.

La finalidad de un sistema de visión es crear un modelo del mundo real a partir de las imágenes. Un sistema de visión recupera la información útil acerca de la escena a partir de proyecciones bidimensionales. De aquí que las imágenes son proyecciones bidimensionales del mundo tridimensional [32], la información que no está directamente disponible debe recuperarse mediante mapeos. Para recuperar dicha información, se requiere del conocimiento acerca de los objetos en la escena y su proyección geométrica [33]. El aspecto de sensores comprende los dispositivos de captura de la imagen, que son la cámara y el lente. Leonardo da Vinci (1452-1519) es de los primeros en describir la formación de las imágenes en este tipo de cámaras. Por lo que respecta a la cámara, ésta debe de cumplir con al menos la captura de 24 fps. Por parte de la óptica empleada, es importante la capacidad del lente usado, entendiéndose por capacidad al abarque o ángulo cubierto por la lente. El abarque puede variar desde un gran angular en un extremo hasta un potente zoom en el otro. En la Figura 3.1 se puede apreciar lo descrito anteriormente.

Es importante saber el abarque dado por el arreglo óptico utilizado, ya que a partir de él se conoce la resolución y máxima definición. Por medio del arreglo óptico se obtiene la representación del objeto en la imagen y se puede determinar el tamaño mínimo de los objetos en la imagen que pueden ser seguidos por el sistema.

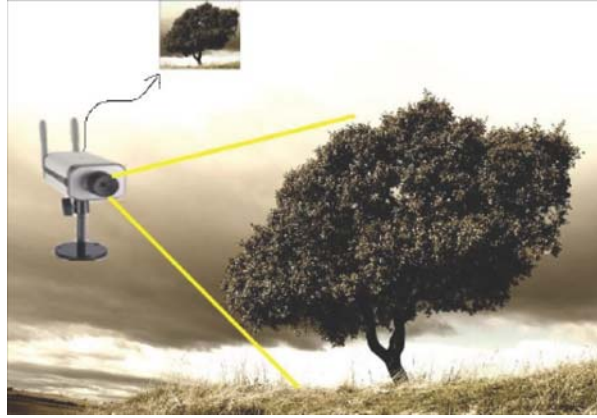


Figure 3.1: Campo Visual de la cámara.

En el caso de usar un dispositivo de distancia focal variable, es necesario que cuente con un control de posición de la lente, para que a partir de dicha posición, se estime el abarque cubierto por la lente, que es representado por la imagen y del cual depende la magnitud de los incrementos angulares dados al sistema de posicionamiento, ver la Figura 3.2.

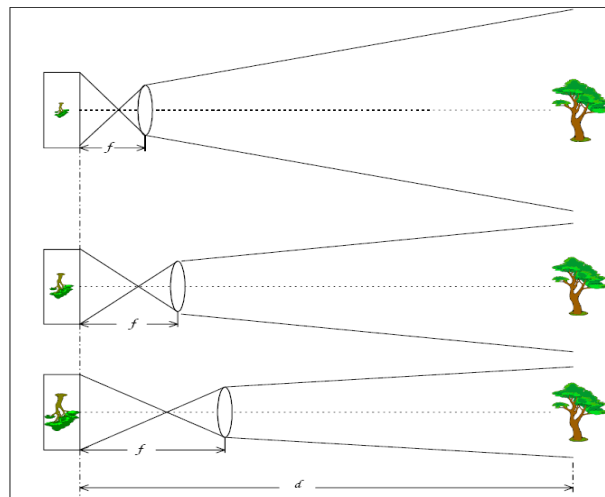


Figure 3.2: Abarque de la distancia focal

Los sistemas de visión se utilizan en diversos campos o áreas de aplicación. Dichos sistemas ayudan a un médico a recuperar información mediante la mejora o realzado de imágenes, realizando mediciones cuantitativas en regiones de interés. Aplicaciones similares han sido desarrolladas para inspección en la industria, la agricultura, etc. También los sistemas de visión son utilizados para el control de calidad de productos que van desde una pizza hasta turbinas, desde estructuras microscópicas hasta tableros de automóviles [33].

En un intento de dotar a las máquinas de un sistema visual aparece el concepto de visión Artificial pero desde una perspectiva general, la visión por computadora es la capacidad de una máquina para ver el mundo que le rodea, más precisamente para deducir la estructura y las propiedades del mundo tridimensional a partir de una o más imágenes bidimensionales [34].

La visión es un área multidisciplinaria, es decir se relaciona con campos como el procesamiento de imágenes, las gráficas por computadora, el reconocimiento de patrones, la inteligencia artificial, las redes neuronales, entre otros. En la actualidad se utilizan cámaras con sensores electrónicos como el CCD o de tipo C'MOS, éstos emplean lentes para incrementar la potencia de la luz y mejorar el enfoque de la imagen.

3.1 Retroalimentación en Base a Centroide

El primer paso del análisis de imágenes consiste generalmente en segmentar la imagen. La segmentación consiste en partir una imagen de entrada en sus partes constituyentes u objetos. El proceso de segmentación no es concerniente con qué es lo que las regiones representan, si no sólo con el proceso de particionar la imagen. En general, la segmentación autónoma es una de las labores más difíciles del tratamiento digital de imágenes. Esta etapa del proceso determina el eventual éxito o fracaso del

análisis. Por una parte, un procedimiento de segmentación demasiado tosco dilata la solución satisfactoria de un problema de procesamiento de imágenes. Por otra, un algoritmo de segmentación débil o errático casi siempre garantiza que tarde o temprano habrá un fallo. De hecho, la segmentación rara vez llega a alcanzar una solución satisfactoria. Por esta razón, se debe poner un considerable cuidado en aumentar la probabilidad de tener una segmentación robusta. En el caso más simple (imágenes binarias) hay sólo dos tipos de regiones: una región de frente (objeto) y una región de fondo. En imágenes de nivel de gris, puede haber muchos tipos de región o clases dentro de la imagen; por ejemplo, en una escena natural a ser segmentada, puede haber regiones de cielo, nubes, tierra, edificios y árboles. Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similitud [35]. En la primera categoría, el método consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos de nivel de gris. Las principales áreas de interés de esta categoría son la detección de puntos aislados y la detección de líneas y bordes de una imagen. Los principales métodos de la segunda categoría están basados en la umbralización, crecimiento de región, división y fusión de regiones. El concepto de segmentación de una imagen basado en la discontinuidad o similitud de los valores del nivel de gris de sus píxeles es aplicable tanto a las imágenes estáticas como a las dinámicas (variantes en el tiempo). En el último caso, sin embargo, el movimiento puede utilizarse a menudo como un potente indicador para mejorar el rendimiento de los algoritmos de segmentación.

La umbralización es uno de los métodos más importantes de la segmentación de imágenes y es una herramienta ampliamente usada en los sistemas de visión. Con la umbralización se convierte una imagen con varios niveles de gris a una nueva con sólo dos, de manera que los objetos quedan separados del fondo. La umbralización se basa en que los píxeles de un determinado objeto tienen el mismo nivel de gris. Como esto no sería del todo cierto se buscan intervalos de gris, cada uno de ellos

pertenecientes a un objeto. Esta técnica sería útil si los objetos tienen una superficie parecida y el fondo es uniforme. Un caso típico es un texto, donde las letras destacan del entorno que es blanco o una imagen tomada con iluminación posterior. Otros ejemplos pueden ser imágenes infrarrojas donde los objetos destacan del entorno por su calor. El problema está en encontrar los valores de gris a tomar como umbrales entre objetos ya que debido al ruido y a que el objeto y el fondo no tienen un único valor de gris sino un intervalo, se traslapan en algunos valores [36]. Desde el punto de vista de la segmentación, la umbralización es un método de producción de regiones de uniformidad dentro de una imagen basada en algún criterio de umbral.

Por lo que respecta a la implementación de un algoritmo, se buscará que de acuerdo a sus características, sea eficaz y eficiente en cuanto a su rapidez de cálculo. Para lograr dicha meta se revisó tanto los principios o aspectos principales, como los métodos más comúnmente usados. Por parte de los aspectos principales se tienen:

- La Resolución.- Referida al tamaño de la imagen, y al muestreo en ella, es decir, la cantidad de información disponible por unidad de área en la imagen.
- La Cuantización.- Dentro de este contexto se refiere a la escala de los posibles valores que puede tener el pixel. Las escalas son definidas por medio de las capacidades tanto de la cámara como del digitalizador, existiendo así, por ejemplo, la escala binaria, la de tonos de gris, la de color aditivo o RGB y la de color substractivo CYM.
- La Velocidad de Muestreo.- La tasa de captura y despliegue de imágenes debe ser como mínimo de 24 imágenes por segundo, para percibir el movimiento en forma continua y sea considerado dentro del tiempo real. Sin embargo existen tasas de muestreo que dependiendo principalmente de la velocidad del objetivo a seguir pueden variar, así será necesario una tasa mayor, a mayor velocidad de objetivo a seguir.

La determinación de la posición de un objeto a lo largo de la secuencia de imágenes puede ser dada por el centroide de dicho objeto, el cual es obtenido mediante un análi-

sis de agrupamiento, dependiente de operaciones de segmentación y reconocimiento previas. Para que el seguimiento de objetos en base a centroide sea aceptable deben realizarse por lo general otro tipo de procedimientos previos, como los de umbralización, segmentación y reconocimiento. Estos al mismo tiempo que contribuyen en el mejoramiento de la definición de los objetos y por ende en su seguimiento, aumentan substancialmente su costo computacional. Debido a lo anterior, el proceso resulta ser muy pesado para que lo realice un procesador de uso genérico, por lo que usualmente este tipo de tareas se realizan en componentes especialmente creados para dicho fin. Este método de seguimiento por medio de centroide necesita de etapas previas para que pueda llevarse a cabo, comúnmente son etapas de segmentación, a partir de tener la segmentación realizada, se calcula el centroide de la región que represente al objeto a seguir, mediante la determinación de sus momentos donde el conjunto de valores umbralizados de la región en la imagen, son el número de filas y columnas de la región. Teniendo el resultado es posible determinar las coordenadas del centroide. Aunque la determinación del centroide puede ser un algoritmo rápido y sencillo, los procesos necesarios previos suelen ser complejos y sobre todo requieren mucho poder de cálculo para efectuarse en tiempo aceptable.

3.2 Imagen Digital y Pixel

Una función de imagen monocromática o en escala de grises F puede ser digitalizada de forma espacial y en amplitud. La digitalización en coordenadas espaciales (u, v) es llamada muestreo de imagen y la digitalización por amplitud es llamada cuantización escala de grises.

Si una imagen continua $f(u, v)$ es aproximada por muestras igualmente espaciadas que son colocadas en una matriz de $N \times M$, el cual es mostrado en la ecuación

siguiente, este arreglo es conocido como imagen digital [37].

$$F = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & f(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M,1) & f(M,2) & \cdots & f(M,N) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Donde cada uno de los elementos del arreglo representa una cantidad discreta y es referido a un elemento de la imagen, conocido como pixel (picture element), éste contiene la intensidad luminosa correspondiente, por ejemplo, para un pixel con una resolución 8 bit, éste puede tomar valores desde cero, equivalente al color negro y con 255 a blanco. Estrictamente hablando, $f(u, v)$ contiene la intensidad de un único punto dentro si la región rectangular es correspondiente. Un subespacio de una imagen es F , denotada por S , donde el elemento a analizar es un pixel en particular, es posible definir las vecindades del pixel, es decir un pixel p con coordenadas (u, v) tiene cuatro horizontales y verticales vecinos, cuyas coordenadas están dadas por la ecuación

$$S = (u + 1, v), (u, v + 1), (u - 1, v), (u, v - 1). \quad (3.2)$$

El espacio de pixeles es llamado espacio de 4 vecinos de p y es denotado por $N_4(p)$ [38], pero el pixel p pudiera no contar con todo sus vecinos, esto debido a que cayeran fuera de las dimensiones de la imagen, entonces seguramente el pixel p se encuentra en el borde de la imagen; como se muestra en la matriz (3.3):

$$\begin{array}{ccccc} & & f(u, v - 1) & & \\ f(u - 1, v) & & f(u, v) & & f(u + 1, v) \\ & & f(u, v + 1) & & \end{array} \quad (3.3)$$

existen también otros 4 vecinos para el pixel p , los cuales se encuentran en las coordenadas diagonales a él, es decir con coordenadas

$$S = (u + 1, v + 1), (u - 1, v + 1), (u - 1, v - 1), (u + 1, v - 1). \quad (3.4)$$

los cuales son denotados por $N_D(p)$, esos puntos junto con los otros cuatro vecinos son llamados espacio de 8 vecinos de p y todos ellos sirven para realizar diversos análisis sobre la imagen F , ver la matriz (3.5).

$$\begin{array}{ccccc} f(u-1, v-1) & f(u, v-1) & f(u+1, v-1) & & \\ f(u-1, v) & f(u, v) & f(u+1, v) & & \\ f(u-1, v+1) & f(u, v+1) & f(u+1, v+1) & & \end{array} \quad (3.5)$$

La conectabilidad entre pixeles es un importante concepto usado para establecer fronteras de un objeto o componentes de regiones en una imagen. Para establecer si un par de pixeles están conectados, debe ser determinado si ellos son adyacentes en algún sentido y si el valor de ellos en escala de grises satisface ciertos criterios de similitud. En el caso de que la imagen fuera binaria, es decir con valores de 0 y 1, dos pixeles se considera que están conectados si son vecinos y ambos tiene el mismo valor.

3.3 El Tiempo Real en la Visión

Una de las características extremadamente difíciles de tratar en cualquier tipo de desarrollo, ya sea de cálculos, ensayos o aplicaciones, es lo que se ha dado a conocer como "Sistemas de Tiempo-Real" (STR). Aunque en la vida diaria lo encontramos en distintos tipos de artículos o servicios de los cuales hacemos uso, resultan difíciles de detectar y más aún de diseñar; pero ¿Qué es en sí un Sistema de Tiempo Real? Para contestar a esta pregunta se refiere a [39] en donde se define como: "Un sistema en Tiempo Real es cualquier sistema donde el tiempo en que se produce su salida es significativa. Esto es debido a que generalmente la entrada corresponde a algún instante del mundo físico y la salida tiene relación con ese mismo instante. El retraso transcurrido entre la entrada y la salida debe ser lo suficientemente pequeño para considerarse una respuesta puntual".

A partir de esta definición se debe distinguir dos aspectos importantes que son el espacio y el tiempo, aspectos que se deben cumplir para que el sistema sea considerado un STR. Por parte del aspecto del espacio se tiene:

Los sistemas tienen contacto con el mundo físico a través de "sensores".

Los sistemas dan una respuesta por medio de "actuadores" hacia ese mundo físico.

La tarea que se lleva a cabo en ese mundo físico dicta, en conjunto con éste, la "restricción" del tiempo dentro del cual debe ser completada dicha tarea; por lo general resulta ser inmediata al estímulo detonante; sin embargo, "inmediato" debe de ser especificado en base al objetivo a lograr por el sistema.

Se tiene que en el ámbito de la visión, los sensores a los que se hace referencia corresponden a la "cámara" con la cual se captan, en una serie de cuadros, las imágenes que se van sucediendo en el tiempo. El actuador es cualquier dispositivo que reaccione a algún tipo de información específica que se obtenga de la imagen, y que actúa físicamente en el mundo, la respuesta está muy ligada a la aplicación o tarea a realizar; por lo general se trata de algún dispositivo de control. Otro aspecto importante en los STR es la restricción en el tiempo, la cual está dictada por el ámbito del problema, así en el caso de problemas en los que interviene la visión, es pertinente tomar como modelo a las características que presenta el sistema de visión humano, el cual nos sirve para percibir el mundo, y que nos indica los parámetros necesarios a satisfacer por sistemas de visión artificiales que emulen dichas capacidades. Así se tiene que para dar respuesta al tiempo real en la visión se debe tener presente a la "Percepción Visual".

Aunque dentro del tema de percepción visual se arraigan una amplia gama de problemas, el de interés en el desarrollo del presente es dar la sensación de continuidad de movimiento para el ojo humano, en el despliegue de imágenes capturadas por una cámara. Para lograr esto es necesario tener presente el funcionamiento de la

formación de la imagen en el ser humano. De esta forma, tomando al ojo humano como sensor en el que se lleva a cabo la formación de la imagen, más específicamente en la retina, se ha descubierto que dicha imagen permanece en la retina del ojo unos instantes para luego ser transmitida al cerebro. El tiempo entre cada nueva formación de imagen es del orden de milisegundos, esto es debido tanto a la "lenta" reacción química de los sensores base, como a la transmisión de la imagen hacia la corteza visual en el cerebro. Este retraso establece la base para nuestra percepción de escenas en movimiento producidas por películas o televisión. La velocidad necesaria con la cual se establece la sensación de continuidad entre cuadros o secuencia de imágenes es conocida como frecuencia crítica de fusión o como tasa de fusión por intermitencia. Para los seres humanos la proporción varía entre individuos y está ligada a la agudeza visual y a otra serie de factores como la edad y herencia genética, pero generalmente 24 cuadros o imágenes por segundo (fps) son suficientes para conseguir la fusión de imágenes y remover el parpadeo o discontinuidades que se presentaría a tasas menores. Es común escuchar que 30 cuadros por segundo es la velocidad para ser considerado video en "Tiempo-real". Sin embargo esto se debe más al estándar impuesto por la tecnología dominante en EEUU y toda América, con el formato NTSC, en el que se tiene una tasa de 30 fps en cuadros entrelazados, es decir "refrescan" la pantalla a una frecuencia de 60 Hz. Esta frecuencia es más que adecuada para permitir lograr la fusión de imágenes. Debido a lo anterior el proceso y análisis de cada una de las imágenes de la secuencia está restringida en el tiempo, sobre todo si se requiere cumplir con el requisito de 24 fps necesarios para ser considerada una visión en tiempo real.

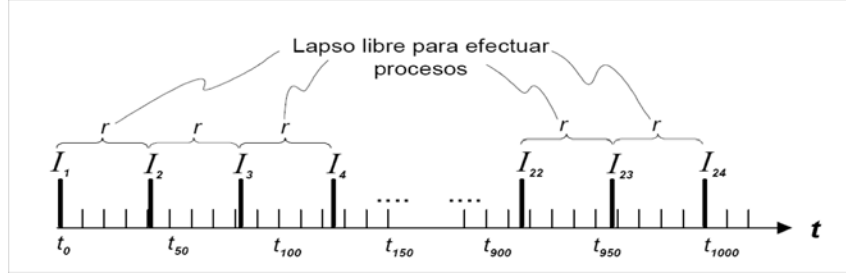


Figure 3.3: Descripción del intervalo de tiempo disponible

3.4 Configuración de Cámara

Los sistemas servo visuales utilizan típicamente una de dos configuraciones de cámara: montada en el efector final o fija en el espacio de trabajo.

La primera es llamada configuración cámara en mano, ver la Figura (3.4), en estos sistemas robóticos la cámara se encuentra montada en el robot y proporciona la información visual del ambiente o espacio de trabajo. El objetivo de esta configuración es mover el manipulador de tal forma que la proyección del objeto se localice en la posición deseada en la imagen de la cámara [40]. En esta configuración existe una relación entre la posición de la cámara y la postura del efector final.

La segunda configuración se denomina cámara fija, ver la Figura (3.5), debido a que el sistema de visión se encuentra fijo en un punto del marco de referencia y captura imágenes del robot y de su ambiente fuera del espacio de trabajo del robot. En este caso la cámara está relacionada al sistema de referencia coordinado del robot. Además la imagen del blanco u objetivo es independiente del movimiento del robot.

El objetivo de esta configuración es mover al robot de forma tal que el efector final alcance el punto o blanco deseado [40].

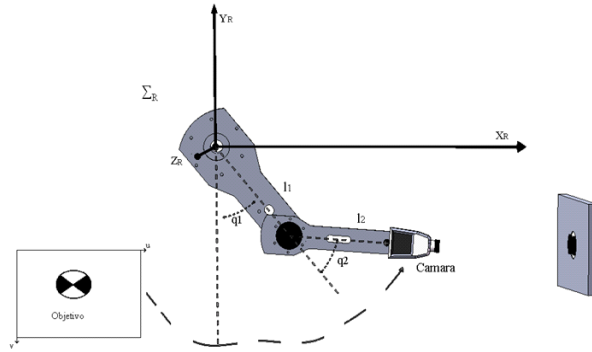


Figure 3.4: Configuración cámara en mano.

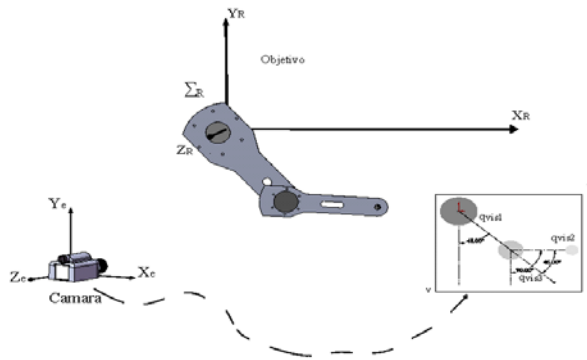


Figure 3.5: Configuración cámara fija.

3.5 Modelo de Visión

El modelo de visión relaciona las coordenadas del marco de referencia del robot manipulador Σ_R con los puntos de la imagen en pixeles Σ_D propios del monitor. En los sistemas de control con retroalimentación visual es necesario conocer el modelo matemático del sistema de visión. En dicho modelo matemático se definen una serie de sistemas cartesianos de referencia.

La geometría de transformación de perspectiva proyecta un punto del mundo

real 3D a un plano 2D. La transformación de imagen juega un rol importante en el procesamiento porque ésta provee una aproximación de la manera en la cual una imagen es formada. Esta transformación por su estructura resulta ser una función no lineal [55].

Considérese un sistema coordenado cartesiano $\sum_R = \{R_1, R_2, R_3\}$, donde los ejes R_1 y R_2 forman el espacio de trabajo del robot manipulador. La cinemática directa, dada por la posición del efector final del robot con respecto a su propio marco de referencia y en términos de las posiciones articulares, se expresa como:

$$x_R = f(\mathbf{q}). \quad (3.6)$$

La cámara de video tiene asociado un sistema de referencia el cual se denota por $\sum_C = \{C_1, C_2, C_3\}$ cuyo origen se localiza en la intersección formada por el eje óptico y el centro de la lente. Las coordenadas de un punto con respecto a este sistema de referencia se expresa como x_C . La localización relativa entre los sistemas de referencia del robot $\sum_R$ y el sistema de la cámara $\sum_C$ está representada por el vector $\mathbf{o}_C = [o_{C_1}, o_{C_2}, o_{C_3}]^T$. De la Figura 3.6 puede deducirse las coordenadas del efector final con respecto al marco de referencia de la cámara.

Un objetivo (target) tiene un punto en el sistema cartesiano $\Sigma_T = \{T_1, T_2, T_3\}$, cuyo origen se referencia con respecto a su centro geométrico. La posición del marco del objeto con respecto a Σ_R se denota por el $\mathbf{o}_T = [o_{T_1}, o_{T_2}, o_{T_3}]^T$.

las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= [x_{R_1} - o_{C_1}] \cos(\theta) + [x_{R_2} - o_{C_2}] \sin(\theta) \\ x_{c_2} &= [x_{R_2} - o_{C_2}] \cos(\theta) + [x_{R_1} - o_{C_1}] \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

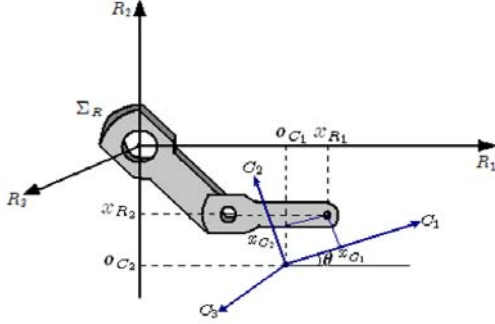


Figure 3.6: Sistemas de referencia del robot y de la cámara.

A partir de las ecuaciones (3.7) se obtiene la siguiente representación matricial

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x_{R1}(\mathbf{q}) \\ x_{R2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_{C1} \\ o_{C2} \end{bmatrix} \right] \quad (3.8)$$

Ahora

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

es la matriz de rotación del marco de referencia de la cámara respecto al marco del robot.

La escena adquirida por la cámara se proyecta en el CCD, la cual tiene asociado un sistema de referencia descrito por $\sum_I = \{I_1, I_2\}$, cuyo origen se encuentra en el centro geométrico del CCD. Los ejes I_1 e I_2 son paralelos y apuntan en la misma dirección de los ejes C_1 y C_2 respectivamente ver la Figura (3.7). Para obtener las coordenadas de la imagen en el plano del CCD es necesario obtener una transformación de perspectiva. De la Figura (3.7) y utilizando el teorema de triángulos semejantes, se tiene que

$$\tan \phi = \frac{h_1}{\lambda} = \frac{h_2}{\lambda - o_{C3}} \implies \frac{h_1}{h_2} = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C3}} < 0 \quad (3.10)$$

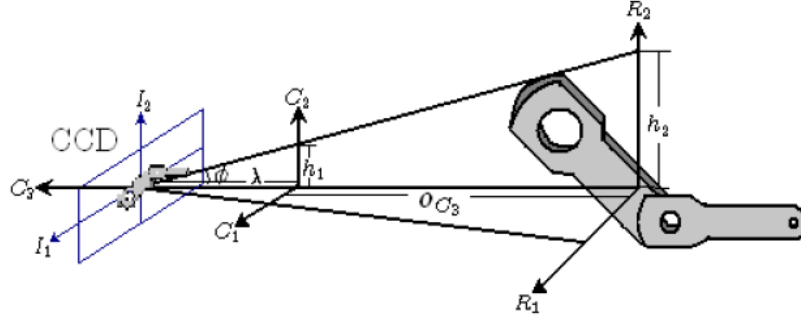


Figure 3.7: Transformación de perspectiva en el CCD.

donde λ es la longitud focal de la cámara de video. Por lo tanto las coordenadas en el plano del CCD están dadas por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_{R_1}(\mathbf{q}) \\ x_{R_2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Por último la imagen de la escena sobre el CCD es digitalizada y transferida hacia la pantalla de la computadora, y se define un nuevo sistema coordenado bidimensional $\sum_D = \{ u \ v \}$, cuyo origen se ubica en la esquina superior izquierda del monitor. Por consiguiente el sistema de visión completo, para la configuración cámara fija, expresa las coordenadas de la imagen en pixeles, de aquí que es necesario agregar los factores de escalamiento de pixeles/m, α_u y α_v , $\lambda > 0$ es la distancia focal de la cámara y $\frac{\lambda}{\lambda + x_{C_3}} < 0$.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & -\alpha_v \end{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda - o_{C_3}} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_{R_1}(\mathbf{q}) \\ x_{R_2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_{C_1} \\ o_{C_2} \end{bmatrix} \right). \quad (3.12)$$

En el desarrollo matemático del modelo de visión presentado se han considerado las siguientes hipótesis:

1. El eje R_3 , del sistema de referencia del robot, es paralelo al eje C_3 , del sistema de referencia asociado a la cámara, es decir $C_3 \parallel R_3$. Además dichos ejes apuntan en la misma dirección, por lo que los planos $R_1 - R_2$ y $C_1 - C_2$ son paralelos ($R_1 - R_2 \parallel C_1 - C_2$) y existe un ángulo de rotación θ alrededor de R_3 para denotar la orientación relativa entre los sistemas de referencia.

2. El plano del CCD es perpendicular al eje óptico, de aquí que los planos $C_1 - C_2$ e $I_1 - I_2$ son paralelos ($C_1 - C_2 \parallel I_1 - I_2$).

3. La cámara de video posee un sistema óptico alineado perfectamente y libre de aberraciones ópticas, por lo tanto el eje óptico intersecta en el centro geométrico del plano del CCD.

Chapter 4

Control de Posición

"Todo nuestro saber procede de lo que sentimos"

Leonardo da Vinci

Los robots manipuladores tienen capacidades fundamentales que los hacen útiles en aplicaciones donde el extremo final necesita ejecutar una trayectoria determinada. Se denomina *control de movimiento* al problema de controlar la trayectoria que deberá seguir el manipulador durante la ejecución de una determinada tarea.

El objetivo de control de movimiento consiste en determinar el torque de los motores para que el vector de errores de las posiciones articulares tienda a cero, de igual forma que el error de la velocidad. Si este objetivo de control de movimiento se verifica, significará que las articulaciones del robot manipulador sigue asintóticamente la trayectoria del movimiento deseado.

Ya que este trabajo de tesis está enfocado al problema de control de robot manipulador que se desplaza libremente dentro de su espacio de trabajo, entonces se estará hablando de *control de movimiento no restringido* ya que el extremo final del manipulador no interactúa con el entorno físico. El control de movimiento no restringido de un robot manipulador consiste en determinar los n componentes del vector de pares aplicados por los actuadores a sus articulaciones de tal forma que las posiciones asociadas a las coordenadas articulares del robot sigan con exactitud una posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ variante en el tiempo [2, 3], es decir la ejecución de un movimiento $\mathbf{q}(t)$ de modo tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

De un modo más formal, puede decirse (de acuerdo con [3]) que el objetivo del control de movimiento no restringido consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de modo tal que el error de posición articular (el punto de equilibrio deseado) tienda a cero de manera asintótica (es decir, que el punto de equilibrio sea global y asintóticamente estable).

Considerando el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad con eslabones rígidos es decir la ecuación 2.25:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) + f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.2)$$

Dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ referidas como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares deseadas se trata de definir una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que las posiciones $\mathbf{q}$ asociadas a las coordenadas articulares del robot sigan con precisión a $\mathbf{q}_d$.

El objetivo de control de movimiento consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)] = \mathbf{0}$$

El Cálculo del vector τ involucra una función vectorial no lineal $q, \dot{q}, \ddot{q}$. Esta función se denomina ley de control o controlador [60]. Pero para fines prácticos es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular $\ddot{q}$.

La Figura (4.1) representa el diagrama a bloques formado por el controlador en lazo cerrado con el robot.

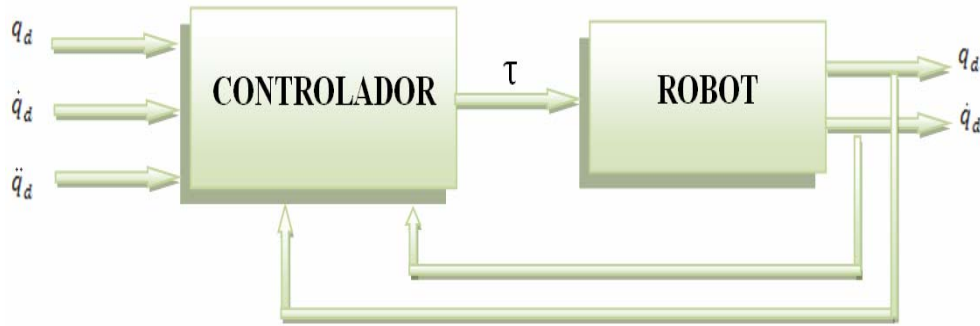


Figure 4.1: Control en lazo cerrado del robot.

Un caso particular del control de movimiento lo constituye el así llamado *control de posición*, también conocido como *regulación* [62]. En el control de posición de un manipulador, se especifica un punto deseado el cual es constante en el tiempo. Cuando el extremo final del robot manipulador es llevado a una posición deseada sin importar la posición inicial, se dice que se está realizando una tarea de control de posición pura.

En las aplicaciones de carácter industrial, los robots manipuladores son controlados utilizando para ello controladores del tipo proporcional-derivativo PD, los cuales han demostrado ser efectivos [3]. Sin embargo este tipo de controladores no toma en cuenta que los servo actuadores colocados en las articulaciones del robot manipulador no son una fuente infinita de par sino que por el contrario todo servo actuador tiene una capacidad limitada en cuanto al par que entrega. Lo anterior

tiene como consecuencia que para cada posición deseada, es necesario realizar una sintonización adecuada de las ganancias proporcionales y derivativas a fin de evitar el fenómeno de la saturación de los servoactuadores [49].

La problemática anterior ha motivado el interés teórico-práctico de muchos investigadores en el área de control automático, para diseñar controladores de posición pura con pares acotados. De acuerdo con [3]: *el problema de control para mantener la acción de control acotada dentro de ciertos límites predeterminados, tomando en cuenta los pares máximos disponibles por los servo actuadores, se le denomina regulación con acciones de control acotadas.*

4.1 Moldeo de Energía

El moldeo de energía es una técnica de diseño que permite proponer nuevos algoritmos de control, este método de diseño se basa en el denominado moldeo de energía más inyección de amortiguamiento propuesto por Takegaki y Arimoto en [13]. Como su nombre lo sugiere, esta metodología trata de moldear la función de energía potencial de la planta a través de un controlador pasivo de un modo tal que la "nueva" función de energía potencial tenga un mínimo único y global. La energía total (energía cinética más energía potencial) que se presentó en la ecuación 2.2 y que se repite para mayor facilidad, está dada por:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (4.3)$$

Para fines de este trabajo se considera que el sistema de visión está equipado con una cámara fija, cuya vista panorámica cubre por completo el espacio de trabajo del robot manipulador, ver la Figura (4.2), debido a esto es posible localizar el extremo final y el objetivo o blanco.

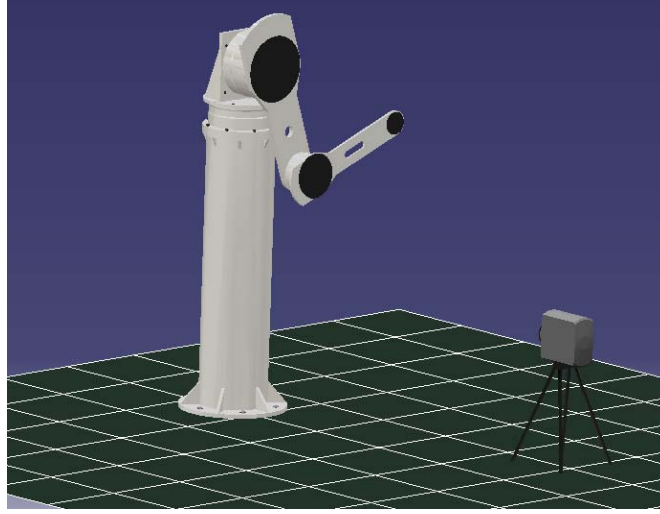


Figure 4.2: Robot manipulador y cámara fija.

El objetivo de control es posicionar el extremo final sobre un blanco localizado en el espacio de trabajo del propio manipulador. Este problema de control puede ser considerado como un caso especial del problema general de la retroalimentación visual.

Debido a que el sistema de control utilizado está basado en imagen, la tarea a ser realizada por el robot se especifica directamente en el plano de la imagen en términos de los rasgos característicos correspondientes tanto al efector final como al blanco u objeto. Se asume que el objeto reside en el plano $R_1 - R_2$, mostrado en la Figura (4.3), su descripción respecto al marco de referencia $\sum_D$ de la imagen de la computadora (pantalla) es $\begin{bmatrix} u_d & v_d \end{bmatrix}^T$ y es denominado vector de rasgos característicos de la imagen deseada.

El problema del control mediante retroalimentación visual para la configuración cámara fija, consiste en diseñar una ley de control para calcular los pares aplicados τ de tal forma que las características o rasgos distintivos de la imagen $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T$, correspondiente al punto que se dan con las coordenadas del centroide

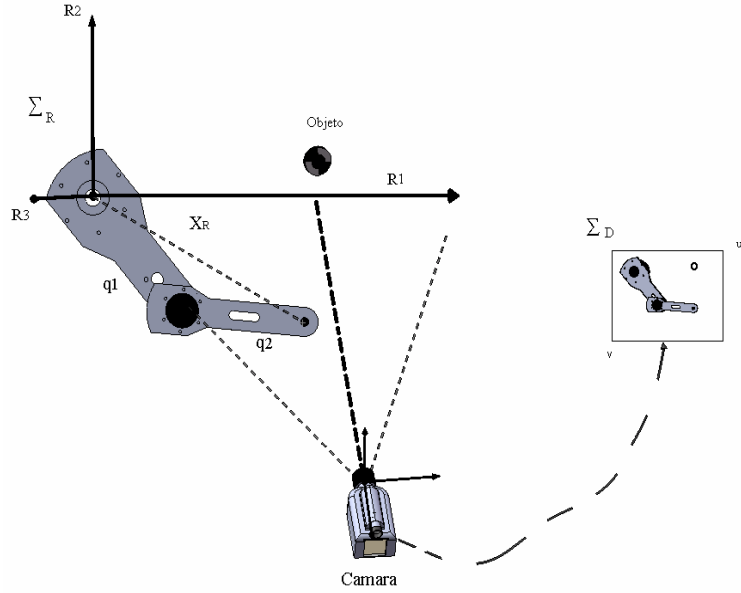


Figure 4.3: Problema de control para la configuración cámara fija.

de un disco negro colocado en el extremo final del robot, alcance el punto u objetivo deseado en el plano de la imagen $\begin{bmatrix} u_d & v_d \end{bmatrix}^T$ de acuerdo con el diagrama a bloques que se presenta en la Figura (4.4).

El error de imagen es definido como $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d - u \\ v_d - v \end{bmatrix}$ por lo tanto, el objetivo de control es garantizar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{u}(t) & \tilde{v}(t) \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, al menos para las condiciones iniciales $\begin{bmatrix} \tilde{u}(0) & \tilde{v}(0) \end{bmatrix}^T$ y que $\dot{\mathbf{q}}$ sea suficientemente pequeña. Es decir asegurar que el error de los rasgos característicos de la imagen, la diferencia entre la posición actual del extremo final expresada en pixeles $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T$ y la posición deseada también en pixeles $\begin{bmatrix} u_d & v_d \end{bmatrix}^T$, tienda a cero cuando el tiempo evolucione.

Con el modelo de visión para la configuración cámara fija, se dice que el problema de control puede resolverse si existe un movimiento articular $\mathbf{q}_d(t) \in \mathbb{R}^2$ de

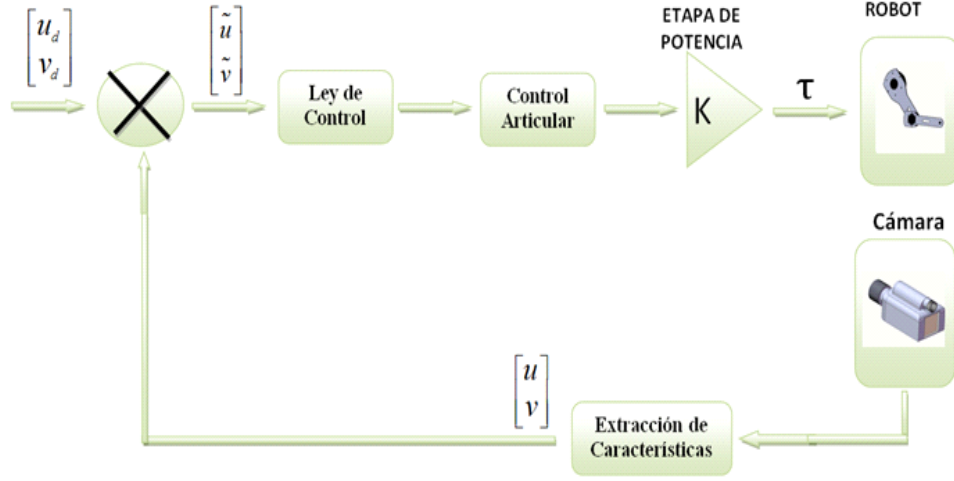


Figure 4.4: Diagrama a bloques de la retroalimentación visual.

acuerdo con la ecuación (3.12) tal que

$$\begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & -\alpha_v \end{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda - o_{c3}} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_{R_1}(\mathbf{q}_d) \\ x_{R_2}(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_{c1} \\ o_{c2} \end{bmatrix} \right) \quad (4.4)$$

por lo tanto el error de la imagen puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{(t)} \\ \tilde{v}_{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & -\alpha_v \end{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda - o_{c3}} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_{R_1}(\mathbf{q}_d) \\ x_{R_2}(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{R_1}(\mathbf{q}) \\ x_{R_2}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \right) \quad (4.5)$$

el modelo de visión completo considerando una matriz de valores intrínsecos de la cámara, dado en píxeles, que relaciona el sistema coordenado de la imagen $\left(\sum_D = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \right)$ y el sistema coordenado del robot $\sum_R$, representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 \\ 0 & -\alpha_v \end{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda - o_{c3}} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_R(\mathbf{q}) \\ x_R(\mathbf{q}) \end{bmatrix} - [\mathbf{O}_R^e] \right). \quad (4.6)$$

con el propósito de facilitar desarrollos matemáticos posteriores, se simplifica en el sistema de visión completo, sustituyendo con variables que representan las opera-

ciones de matrices del sistema, esto es:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_u \lambda}{\lambda - o_{c3}} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_v \lambda}{\lambda - o_{c3}} \end{bmatrix} \mathbf{R}(\theta)^T \begin{bmatrix} x_R(\mathbf{q}) \\ x_R(\mathbf{q}) \end{bmatrix} - [\mathbf{O}_R^c]. \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \Gamma \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{S}_{robot(\mathbf{q})}. \quad (4.8)$$

Donde $\mathbf{S}_{robot(\mathbf{q})}$ es la posición actual del robot. Una vez que se tiene conocimiento tanto de la dinámica del robot así como el modelo matemático del sistema de visión, es posible entrar de lleno al análisis de control de posición de un robot por medio de un sistema de visión, por lo que en el siguiente tema se abordan diversos métodos concernientes al control de robots por retroalimentación visual, además de describirse las leyes de control servo visuales.

4.2 Metodología del Jacobiano Transpuesto

El diseño de un algoritmo de control de movimiento utilizando retroalimentación visual, se puede lograr utilizando controladores basados en el Jacobiano Transpuesto. El razonamiento detrás de esta familia de controladores, es la filosofía del Jacobiano Transpuesto introducida por Takegaki y Arimoto en 1981, para resolver el problema de regulación en el espacio cartesiano.

La cinemática directa dada por la posición cartesiana $\mathbf{x}_R$ del efector final con respecto al marco de referencia del robot en términos de las posiciones articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si la posición y orientación del efector final son especificadas en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio operacional, es natural preguntarse si es posible calcular el Jacobiano vía diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a las velocidades de articulación.

Para este propósito existe una técnica analítica para calcular el Jacobiano.

El modelo cinemático inverso consiste en la relación inversa del modelo cinemático directo, la relación entre la posición cartesiana $\mathbf{x}_R$ y la posición articular $\mathbf{q}$ esto es:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_R) \quad (4.10)$$

La velocidad de traslación del efector final puede ser expresada como la derivada respecto al tiempo del vector $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, representando el origen del marco de referencia del efector final con respecto al marco de referencia base.

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_f(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.11)$$

De esta expresión puede derivarse la llamada matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ que es una matriz de derivadas, para un robot de n grados de libertad el robot manipulador [5], puede definirse como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{q})}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

La determinación de la relación inversa de la matriz Jacobiana resulta solo invertible cuando $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ sea cuadrada, además aún en esta situación puede llegar a ser un problema complejo, ya que es diferente resolver el problema de forma simbólica que para cada instante de tiempo, recordando que los valores de la matriz cambian constantemente, la matriz Jacobiana inversa $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$. Una alternativa consiste en

evaluar de forma numérica para obtener algunos valores de las variables articulares, lo que supone un costo computacional elevado. Todo ello sin tener en cuenta que aquellos valores para los que el determinante de la matriz Jacobiana resulte nulo, a lo que se le conoce como Singularidad.

Al ser la matriz Jacobiana dependiente de las variables articulares, pueden existir combinaciones de éstas que provoquen que el determinante del Jacobiano resulte nulo, como ya se mencionó a estas configuraciones se les denominan singularidades del robot y son de especial importancia por las siguientes razones:

Las singularidades representan configuraciones articulares desde las que el movimiento en ciertas direcciones puede llegar a ser inalcanzable.

Las singularidades corresponden a puntos en el espacio de trabajo del manipulador que pueden ser inalcanzables bajo diminutas perturbaciones de parámetros, tales como longitud, desplazamiento, etc.

Las singularidades usualmente corresponden a puntos en los límites del espacio de trabajo del manipulador, es decir, para puntos máximos de alcance del robot.

Para singularidades cercanas no existe una solución única para el problema cinemático inverso. En tales casos puede existir un número infinito de soluciones o simplemente no haber solución.

Todos los robots representan singularidades en los límites de su espacio de trabajo, pues en dicho límite no es posible el movimiento en dirección perpendicular al mismo, lo que supone una pérdida del grado de libertad en esa dirección del espacio.

4.3 Algoritmo de Control Visual

Para llevar al cabo el diseño del algoritmo de control servo visual se consideró una función, cuya manipulación y análisis matemático permitiera obtener un par acotado, con una adecuada sintonización de sus ganancias, lo cual implica una protección al garantizar que no se sobrepasarían los límites físicos de los servomotores, propios del robot. De aquí que la ecuación del controlador propuesto sea de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(u, v) \nabla f_p(\mathbf{k}_p, \tilde{u}, \tilde{v}) - f_v(\mathbf{k}_v, \dot{u}, \dot{v}) + g(u, v). \quad (4.13)$$

Se tiene como referencia el controlador PD visual [41], que tiene la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.14)$$

Recordando que $R(\theta)$ está definido por la ecuación 3.9 y de las ecuaciones 4.7 y 4.8 se obtiene:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_u \lambda}{\lambda - o_{c3}} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_v \lambda}{\lambda - o_{c3}} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

El sistema de control visual en lazo cerrado tomando en cuenta el modelo dinámico del robot así como el modelo de visión y bajo la configuración de cámara fija, se puede expresar con la ecuación siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{u} \\ -\dot{v} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - g(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

en la que se involucran las características de ambos sistemas, como los errores de imagen $\begin{bmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} \end{bmatrix}^T$ y las velocidades de las articulaciones $\dot{\mathbf{q}}$, definiendo a los errores

de velocidad de la imagen $\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} & \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix}^T$ como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}(\theta)^T \frac{d}{dt} \mathbf{X}_{robot(\tilde{\mathbf{q}})} \\ &= -\mathbf{\Gamma} \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= - \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

El diseño de la ley de control es un procedimiento complicado, una ley de control visual es el controlador PD Visual el cual representa una aportación a la filosofía del Jacobiano Transpuesto propuesta por Takegaki y Arimoto [42, 43], conjuntamente con teoría del Moldeo de Energía [44], este algoritmo de control con retroalimentación visual es representado por la ecuación siguiente:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) Sat \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.18)$$

Se recuerda que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ se definió en la ecuación 4.12, que es como la cinemática diferencial del robot (matriz Jacobiana del robot), para la cual es necesario que sea de rango pleno, es decir que se asegure que para cualquier valor de $\mathbf{q} \exists \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$.

Continuando con la descripción de los términos de la ley de control, el vector $\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) & f(\tilde{v}) \end{bmatrix}^T$ se definen como funciones que afectan a $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ respectivamente y por cuestiones de diseño este tipo de funciones deben ser continuas no acotadas de forma global, además de cumplir con la siguiente expresión:

$$\tilde{u}^T f(\tilde{u}) \geq 0 \quad y \quad \tilde{v}^T f(\tilde{v}) \geq 0 \quad (4.19)$$

El término $\mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) & f(\tilde{v}) \end{bmatrix}^T \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la derivada parcial del vector de funciones $\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) & f(\tilde{v}) \end{bmatrix}^T$ y por su estructura es una matriz diagonal y

definida positiva, $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son las ganancias proporcional y derivativa del controlador y por cuestiones de diseño se consideran matrices diagonales y definidas positivas. Los elementos restantes son $\mathbf{R}(\theta)$ y Γ que provienen del modelo de visión ya definido anteriormente.

En base a la ecuación anterior se presentan variantes del controlador que contienen funciones trigonométricas acotadas, con características que mejoran el desempeño del controlador PD visual [45]. La primera ley de control que se presenta, se desarrolla con la función tangente hiperbólica y se obtiene una familia de controladores expresada por la ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \tanh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.20)$$

Sustituyendo a la tangente hiperbólica por arco tangente se obtiene otra familia de controladores expresada por la ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \arctan \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.21)$$

De la misma forma, sustituyendo ahora con la función seno y argumento de $\frac{\pi}{2} \tanh$ y $\frac{\pi}{2} \arctan$ se obtienen los controladores expresados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \tanh \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \right) \\ & - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & J(\mathbf{q})^T R(\theta) \mathbf{K}_p J_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \arctan \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \right) \\ & - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} R(\theta) J(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Las leyes de control visual propuestas y en particular los algoritmos que se desprende de ellas, al ser sustituidas en la ecuación de lazo cerrado del sistema visual debe producir que el sistema se estabilice en la posición de imagen deseada $\begin{bmatrix} u_d & v_d \end{bmatrix}^T$ o en otras palabras genera un nuevo y único punto de equilibrio estable en la posición deseada; para la demostración de lo antes dicho es necesario realizar un análisis de estabilidad del sistema.

4.3.1 Algoritmo de Control Visual Articular

Para resolver el problema de control con retroalimentación visual articular, se presenta el siguiente esquema de control con compensación de gravedad:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla v_a(k_p, \tilde{\mathbf{q}}) - f_v(k_v, \dot{\mathbf{q}}) + g(\mathbf{q}) \quad (4.24)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de error de las posiciones articulares, $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es el vector de las posiciones articulares deseadas.

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal de la ganancia proporcional, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva también llamada la ganancia derivativa, $\nabla v_a(k_p, \tilde{\mathbf{q}})$ representa la energía potencial artificial, y es una función definida positiva, y $f_v(k_v, \dot{\mathbf{q}})$ denota una función disipativa decreciente, es decir, $\dot{\mathbf{q}}^T f_v(k_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$.

En base a la ecuación (4.24) se presentan variantes del controlador que contienen funciones trigonométricas acotadas, con características que mejoran el desempeño

del controlador PD visual. La primera ley de control que se presenta, se desarrolla con la función tangente hiperbólica expresada por la ecuación:

$$\tau = \mathbf{K}_p \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.25)$$

con otra variante:

$$\tau = \mathbf{K}_p \arctan \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \arctan \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.26)$$

ahora con la función seno y tangente hiperbólica:

$$\tau = \mathbf{K}_p \sin \left(\frac{\pi}{2} \tanh \left(\begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.27)$$

y finalmente:

$$\tau = \mathbf{K}_p \sin \left(\frac{\pi}{2} \arctan \left(\begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.28)$$

4.4 Demostración de Estabilidad

Una de las teorías de estabilidad más importantes fue propuesta por el científico ruso Lyapunov, dicho trabajo fue utilizado para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales, el cual se basa en el estudio de los punto de equilibrio de los sistemas en lazo cerrado sin la necesidad de resolver la ecuación diferencial [45], la herramienta requerida para la demostración de estabilidad de la ley de control servo visual es el segundo método de Lyapunov aunque en el Apéndice A, se describe de forma detallada esta teoría que se utiliza en el algoritmo de control con retroalimentación visual propuesto, a partir de la existencia del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del sistema. El criterio de estabilidad de Lyapunov establece lo siguiente:

"Si es posible asociar una descripción matemática basada en energía, a un sistema dinámico autónomo, y para cada estado del sistema, con excepción del estado de equilibrio, la porción de energía en un intervalo de tiempo es negativa, entonces, la energía disminuye a lo largo de cualquier trayectoria del sistema hasta que alcanza su mínimo en el estado de equilibrio", es decir:

Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, el origen es un punto de equilibrio estable.

Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es definida negativa, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

El teorema de estabilidad de Lyapunov dice: si $x = 0$ es un punto de equilibrio para el sistema y proponemos una función $V(x)$ tal que

$$V(0) = 0 \tag{4.29}$$

$$V(x) > 0 \tag{4.30}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \tag{4.31}$$

entonces el punto de equilibrio es estable.

El primer paso para la demostración de estabilidad del controlador consiste en encontrar la ecuación en lazo cerrado del sistema, la cual relaciona la dinámica del robot con el par aplicado por el algoritmo de control. Considerando la ecuación del modelo dinámico de un robot de n grados de libertad 2.25, pero ahora sin fricción

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) \tag{4.32}$$

y el controlador, se tiene que la ecuación en lazo cerrado es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \mathbf{K}_p \tanh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \\ -\mathbf{K}_v \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

El análisis de la teoría de Lyapunov se basa en el estudio de los puntos de equilibrio del sistema, para la determinación de la existencia de estos puntos de equilibrio del sistema para la ecuación en lazo cerrado se garantiza, al menos de manera local, bajo las siguientes condiciones:

i) Considerando que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es una matriz de rango pleno:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = 0$$

$$-\dot{\mathbf{q}} = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = 0 \Rightarrow \mathbf{q} = K \text{ (constante)}$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{u} \\ -\dot{v} \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

ii) Considerando que $\mathbf{K}_v$ es una matriz diagonal definida positiva, entonces

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = 0$$

$$C(\mathbf{q}, 0) = 0$$

$$M(\mathbf{q}) > 0 \quad \exists \quad M^{-1}(\mathbf{q}) > 0$$

$$\det [\mathbf{R}(\theta)] = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$J(\mathbf{q})\mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = 0 \quad si \quad \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.35)$$

Por tanto se determina que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es único y se encuentra en el origen.

Continuando con el proceso de demostración de la estabilidad del sistema mediante el segundo método de Lyapunov se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{\ln \left(\cosh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right)}^T \mathbf{K}_p \mathbf{\Gamma}^{-1} \sqrt{\ln \left(\cosh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right)} \quad (4.36)$$

La función anterior cumple con lo propuesto con el método de Lyapunov, es decir $V(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$, al realizar la derivada de la función candidata de Lyapunov con

respecto al tiempo y considerar las sustituciones pertinentes se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}_p \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \mathbf{K}_p \tanh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \\
&\quad - \nabla_{\tilde{u}, \tilde{v}} \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \tanh \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \mathbf{K}_p \Gamma^{-1} \Gamma \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

la cual es una función semidefinida negativa y según el segundo método de Lyapunov, se demuestra la estabilidad del sistema de forma local, esto es, que el sistema sería estable en el área perceptible por la cámara y siempre que $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ esté definido. Para probar la estabilidad asintótica del sistema se recurre a analizar la ecuación del sistema en lazo cerrado y aplicando en principio de Invarianza de Krasovskii-LaSalle [46, 47], el cual considera que en una región de espacio invariante (conocido como atractor) que describe el modelo dinámico de un robot, cuyo radio es todo el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ definido por:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2n} / \dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = 0 \wedge \dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{4.38}$$

en él existe un subconjunto en el que se cumple el siguiente enunciado:

$$\Omega_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2n} / \dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{u} = 0 \wedge \tilde{v} = 0 \wedge \dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{4.39}$$

donde el único estado invariante es $\begin{bmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T$ y por lo tanto se puede comprobar que el punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable de forma local, esto es: $\dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$.

Ahora se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado al ser introducida la ley de control visual (4.21), correspondiente a la función arctan, por lo que el sistema de lazo cerrado queda establecido como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) \left[\begin{array}{c} J(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \right) \mathbf{K}_p \arctan \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \\ -\mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Para la cual la función candidata de Lyapunov propuesta es la siguiente:

$$V(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{K}_p \Gamma^{-1} \boldsymbol{\zeta} \quad (4.41)$$

Donde $\boldsymbol{\zeta}$ es :

$$\boldsymbol{\zeta} = \sqrt{\text{diag} \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \arctan \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \frac{\ln}{2} \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) + 1 \\ f(\tilde{v}) + 1 \end{bmatrix}} \quad (4.42)$$

la ecuación (4.41) también cumple con ser $V(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$, al derivar esta función con respecto del tiempo y hacer las sustituciones pertinentes se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}_p \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \mathbf{K}_p \arctan \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \\ &\quad - \nabla_{\tilde{u}, \tilde{v}} \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \arctan \begin{bmatrix} f(\tilde{u}) \\ f(\tilde{v}) \end{bmatrix} \mathbf{K}_p \Gamma^{-1} \Gamma \mathbf{R}(\theta)^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Recurriendo para este caso en el Principio de Invarianza de LaSalle, el cual dicta que existe un subconjunto en el que se cumple el siguiente enunciado:

$$\Omega_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^{2n} / \dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{u} = 0 \wedge \tilde{v} = 0 \wedge \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.44)$$

donde el único estado invariante es $\begin{bmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T$ y por lo tanto se puede demostrar que el punto de equilibrio del sistema es asintóticamente estable de forma local, esto es: $\dot{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$ y por lo tanto se comprueba la estabilidad asintótica del punto de equilibrio de forma local.

4.4.1 Demostración de Estabilidad para el Algoritmo de Control Visual Articular

Considerando el modelo dinámico del robot (4.32) junto con la ley de control (4.24), entonces el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable globalmente y el posicionamiento visual que apunta $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}_2(t) & \tilde{q}_3(t) \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ se logra.

La ecuación del sistema en lazo cerrado se obtiene combinando el modelo dinámico del robot (4.32) y esquema de control (4.24) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\nabla v_a(\mathbf{k}_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(\mathbf{k}_v, \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

que es una ecuación diferencial autónoma, y el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio. Para llevar a cabo el análisis de estabilidad de la ecuación (4.45), se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + v_a(\mathbf{k}_p, \tilde{\mathbf{q}}). \quad (4.46)$$

El primer término de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva con respecto a $\dot{\mathbf{q}}$ porque $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva. El segundo término de la función candidata de Lyapunov (4.46), puede interpretarse como una energía potencial inducida por la ley de control, también es una función definida positiva con respecto al error de la posición $\tilde{\mathbf{q}}$, porque el término $\mathbf{k}_p$ es una matriz definida positiva. Por consiguiente, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva y la función es radialmente ilimitada. Se encuentra la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (4.46) a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado (4.45), después de alguna álgebra y considerado propiedad 1, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \nabla v_a(\mathbf{k}_p, \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T \nabla v_a(\mathbf{k}_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(\mathbf{k}_v, \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \nabla v_a(\mathbf{k}_p, \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(\mathbf{k}_v, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

que es una función semidefinida negativa y por consiguiente es posible concluir estabilidad del punto de equilibrio. Para demostrar la estabilidad asintótica local, la naturaleza autónoma de la ecuación en lazo cerrado (4.45) se explota para aplicar el principio de invarianza de LaSalle's [47] en la región Ω :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \\ \tilde{\mathbf{q}} = 0 \in \mathbb{R}^n, \dot{\mathbf{q}} = 0 \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \end{array} \right\} \tag{4.48}$$

desde que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0 \in \Omega$, $V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ es una función decreciente de t . $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es continua en Ω fijo compacto, se limita debajo en Ω . por ejemplo satisface $0 \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$. Por consiguiente, la solución trivial es la única solución del sistema en lazo cerrado (4.45) restringió a Ω , entonces se concluye que el origen del espacio de estado es estable asintóticamente.

Caso Específico del Controlador

El propósito de esta subsección es aprovecharse de la metodología descrita anteriormente para derivar los nuevos reguladores. Se presentan esquemas de control con compensación de gravedad:

$$\tau = K_p \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - K_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (4.49)$$

La ecuación del sistema de lazo cerrado obtenida, combinando el modelo dinámico de robot (4.32) y el esquema de control (4.49) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{k}_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{K}_v \tanh(\dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

que es una ecuación del diferencial autónoma, y el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio. Para llevar a cabo el análisis de estabilidad de la ecuación (4.50), se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{\ln \left(\cosh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right)}^T \mathbf{K}_p \sqrt{\ln \left(\cosh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right)} \quad (4.51)$$

El primer término de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva con respecto a $\dot{\mathbf{q}}$ porque $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva. El segundo término de la función candidata de Lyapunov (4.51), puede interpretarse como una energía potencial inducida por la ley de control, también es una función definida positiva con respecto al error de la posición $\tilde{\mathbf{q}}$, porque el término $\mathbf{k}_p$ es una matriz definida positiva. Por consiguiente, $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva y la función es radialmente ilimitada. Se encuentra la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (4.51) a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado (4.50), después de

alguna álgebra y considerado propiedad 1, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \\
&\quad - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Segundo ejemplo para propósito de la metodología se obtiene de la misma forma:

$$\tau = K_p \arctan \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - K_v \arctan \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \tag{4.53}$$

Chapter 5

Evaluación Experimental

"La sabiduría es hija de la experiencia"

Leonardo Da Vinci

5.1 Algoritmo para la Extracción de Características

Se diseñó e implementó un nuevo grupo de algoritmos de visión por computadora, cuyo objetivo particular es extraer la información visual necesaria para el modelo de visión. Esta información consiste en la posición espacial de centroides, es decir la ubicación de las marcas visuales, así como su tamaño, para relacionar estos círculos negros con las articulaciones del robot (base, codo y extremo final).

Se hace una síntesis del diseño y funcionamiento del sistema de visión que se ha establecido para el sistema de control visual. El diseño partió de crear un algoritmo de procesamiento de imágenes que sea capaz de dimensionar y ubicar la posición de un conjunto de 3 círculos dentro de su plano imagen. El lenguaje de Matlab está basado sobre una estructura de datos matricial, haciéndose esto ideal para la adquisición y el procesamiento de imágenes [57] [58]. Se estableció crear este sistema de visión en Matlab R2007a/Simulink[®] [59], debido a que es un lenguaje fácil y de rápido entendimiento por lo que hace a los programadores más productivos en menos tiempo que otros lenguajes. La Figura 5.1 muestra un diagrama a bloques sobre los pasos en que se ha dividido el proceso para la etapa del sistema visión.

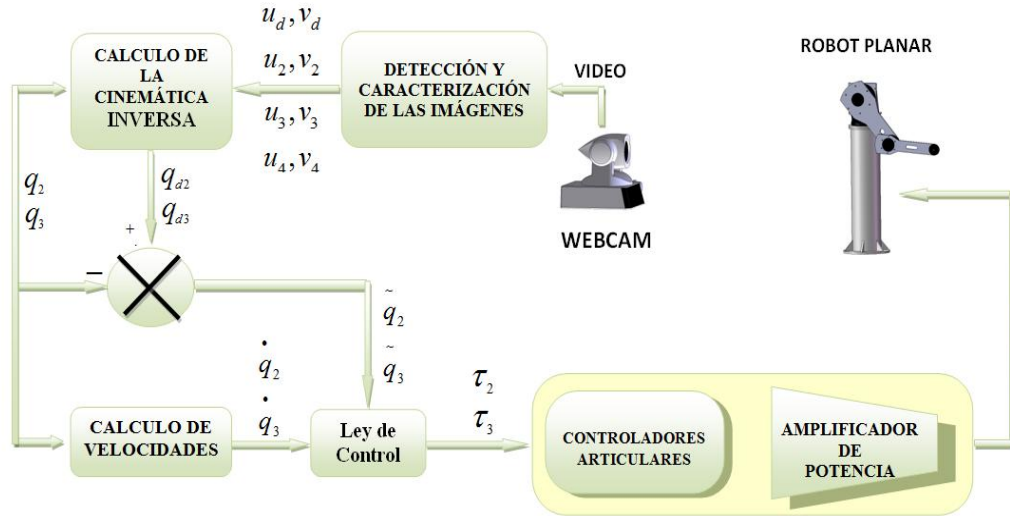


Figure 5.1: Diagrama a Bloques de la adquisición y procesamiento de imágenes.

Es importante señalar que se utilizaron dos formas de programar en Matlab para realizar la adquisición y procesamiento de imágenes utilizando; diagramas de bloques del entorno de trabajo llamado Simulink y con bloques personalizados llamados funciones S. Éstas herramientas utilizan componentes llamados adaptadores de dispositivos para conectar diferentes equipos de adquisición de imagen a sus controladores.

Además, incluyen un adaptador para dispositivos de video de Windows genérico.

En la Figura 5.2 se presenta el programa en Simulink.

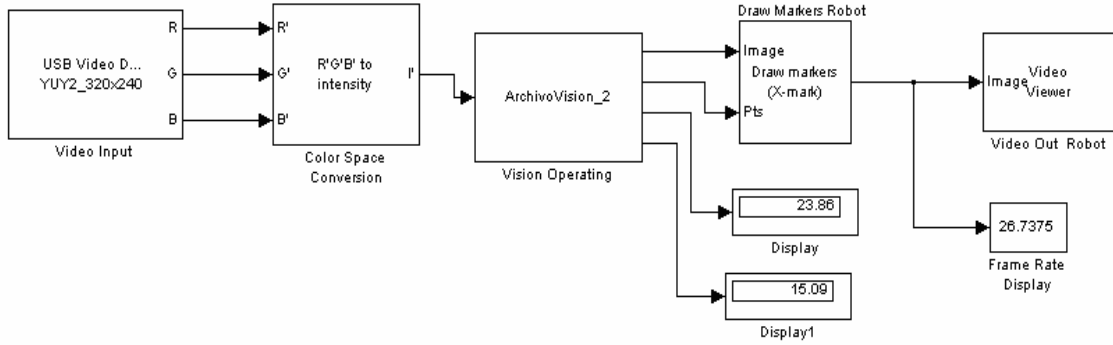
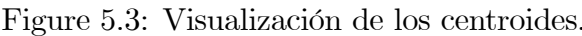


Figure 5.2: Programa en Simulink

La cámara web se encuentra conectada a la computadora vía el puerto usb, en la cual se adquieren y se caracterizan las imágenes obtenidas del video por medio del módulo de Simulink para realizar la detección y caracterización de las imágenes enviadas por la cámara. Se hace la adquisición de las imágenes a color en formato RGB de 8 bits obtenidas con una resolución de 320x240 pixeles, se transforma a tono de gris las imágenes a color, se hace la binarización de las imágenes de los tono de gris, se realiza la identificación del centroide para determinar las coordenadas del efector final y estas son guardadas en un archivo. que se transfiere a la computadora que controla los motores del robot. El algoritmo utilizado para el desarrollo de este programa se muestra a continuación con los siguientes pasos:

1. Adquisición de las imágenes a color (video input).
2. Transformación en tono de gris de las imágenes a color (Color Space Conversión).
3. Binarización de las imágenes en tono de gris (Vision Operating).

- Presentando información del robot de acuerdo con la siguiente Figura 5.3:



90

se reciben en la etapa de control realizándose ahí un proceso para aplicarlos directamente a la ley de control este programa se realizó con el compilador de Visual C++ 6.0. Este esquema de control está trabajando con periodos de muestreo de 41 msecs para el sistema de visión y 2.5 msecs para la etapa de control. La Figura 5.4 muestra el sistema de control visual propuesto.

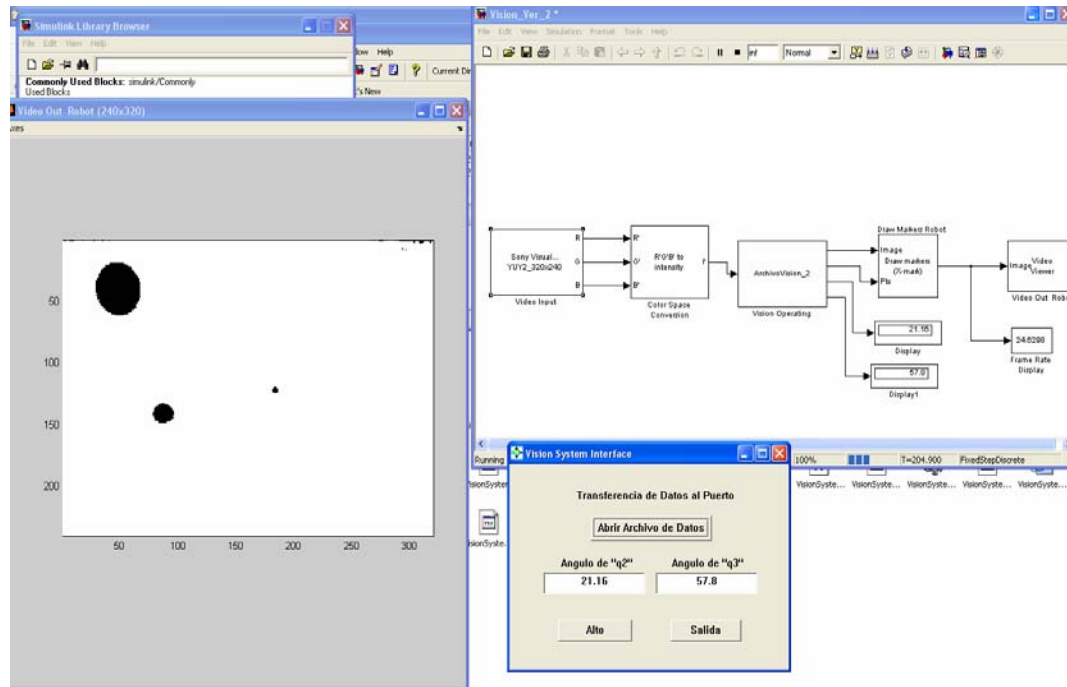


Figure 5.4: Programas ejecutándose.

Se tiene ahora una infraestructura experimental para control visual de robots manipuladores que posee las características de fácil adquisición de las herramientas de trabajo tanto de hardware como de software para la implementación y un rápido entendimiento del ambiente de programación realizado en Matlab R2007a/Simulink[®], y Visual C++ 6.0; velocidad de procesamiento junto con poder de computo con excelente desempeño.

5.1.1 Preparación del Experimento

El desarrollo hecho en el capítulo anterior, tiene como propósito el poder contribuir con leyes de control visual, las cuales puedan ser implementadas en sistemas robóticos, con el afán de conocer las características con que cuenta las leyes de control, se realizó la implementación en un brazo robot tipo planar con cuatro distintos controladores visuales.

La implementación experimental consistió en llevar al robot de una posición inicial a otra posición deseada dentro de su espacio de trabajo [61], ambas dadas en el plano de la imagen (5.5); la trayectoria a recorrer por el efector final robot debería ser siempre vista por la cámara y además se debe cuidar de no llevar al robot cerca de una posición que pudiera provocar alguna singularidad.



Figure 5.5: Movimiento al objetivo deseado.

El primer servo control lo describe la ecuación (4.20), como se puede observar, el argumento fundamental es la función trigonométrica $\tanh$, además las funciones

$\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) & f(\tilde{v}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} \end{bmatrix}^T$ y por lo tanto $J_p \left(\begin{bmatrix} f(\tilde{u}) & f(\tilde{v}) \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, es decir un vector de constantes, por lo cual se omite de la ley de control; se puede observar que este controlador tiene la estructura más sencilla de todos los controladores que se pudieran desprender de la familia de controladores (4.18). Estos controladores fueron implementados en el robot de transmisión directa en una configuración planar de péndulo, del cual ya se describieron las características físicas; por otra parte en lo que concierne al sistema de visión se establece bajo las siguientes condiciones: para cada uno de los cuatro experimentos la cámara fue colocada enfrente del robot a una distancia de $O_c^R = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.6 & 1 \end{bmatrix}$ metros, la cual se encuentra fija y paralela al plano de movimiento del robot planar y dicho sistema no fue rotado con respecto al sistema del robot, es decir, el ángulo de la rotación de la cámara fue de $\theta = 0$ grados, además con la cámara web el tiempo de apertura del obturador es constante y lo suficientemente corto de tal forma que la cámara adquiriera la información necesaria de la escena y la transmita a la computadora, logrando un proceso de adquisición eficaz; el ambiente del robot también tuvo que ser acondicionado de tal forma que se obtuvieran el mejor contraste y así poder discernir entre el disco negro colocado en el extremo final del robot y el fondo. En todos los controladores se seleccionaron como la posición deseada en el plano de la imagen a $\begin{bmatrix} u_d & v_d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 260.0 & 25.0 \end{bmatrix}^T$ [pixels].

5.1.2 Resultados Experimentales

Los algoritmos fueron implementados en lenguaje de programación C++ y posteriormente se realizó un proceso de sintonización de los mismos para seleccionar los valores de las ganancias proporcional $\mathbf{K}_p$ y derivativa $\mathbf{K}_v$ más adecuados, los valores con los que se observó que los controladores mostraban su mejor comportamiento

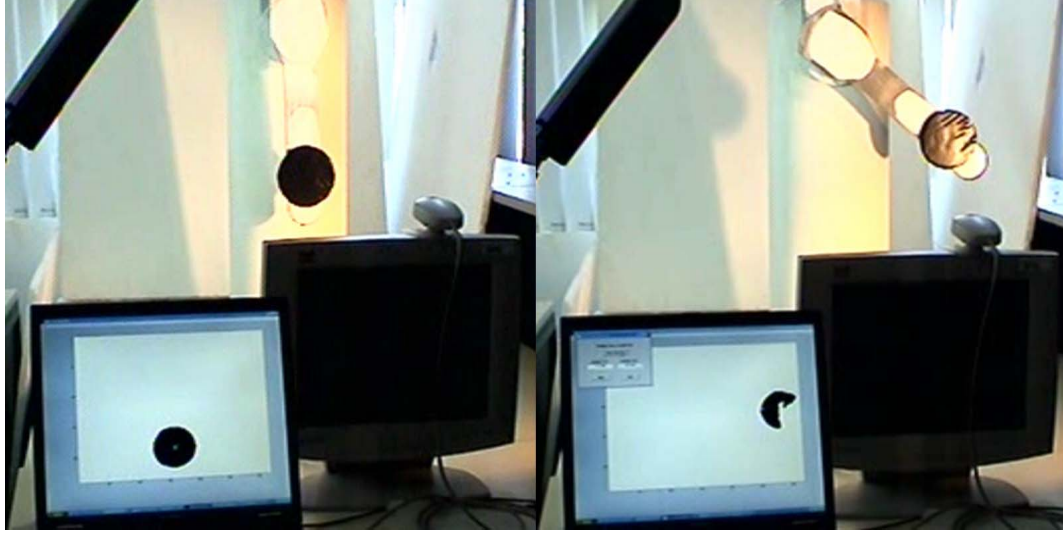


Figure 5.6: Posición inicial y final del robot.

son expuestos en el Cuadro (5.1)

Controlador	K_p	K_v
Ecuación 4.20	3.5	0.1
Ecuación 4.21	2.5	0.1
Ecuación 4.22	3.2	0.1
Ecuación 4.23	3.7	0.1

(5.1)

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la actividad realizada por el robot.

Resultados experimentales del algoritmo de control Visual (4.20)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \tanh \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}).$$
(5.2)

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la actividad realizada por el robot en forma de péndulo para el controlador (4.21):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{R}(\theta) \mathbf{K}_p \mathbf{J}_p \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \arctan \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.3)$$

Resultados experimentales ahora con el controlador (4.22) :

$$\boldsymbol{\tau} = J(\mathbf{q})^T R(\theta) \mathbf{K}_p J_p \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \tanh \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} R(\theta) J(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.4)$$

Finalmente los resultados experimentales con el controlador (4.23) :

$$\boldsymbol{\tau} = J(\mathbf{q})^T R(\theta) \mathbf{K}_p J_p \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \arctan \left(\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \Gamma^{-1} R(\theta) J(\mathbf{q})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.5)$$

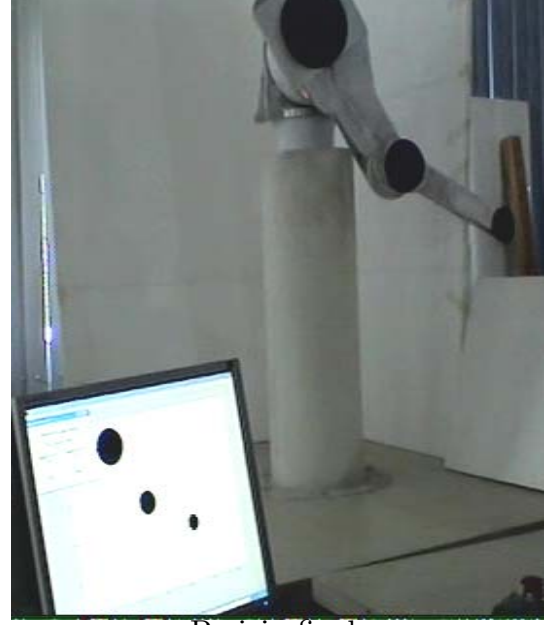
Ahora se presenta un análisis de otra de las importantes ramas del control por retroalimentación visual (visual servoing) y el objetivo que se persigue es el de poder generar un nuevo esquema de control que le permita al sistema de visión, además de deducir la posición del efector final del robot, poder también estimar las posiciones de cada una de sus articulaciones, con el fin de diseñar una ley de control visual sin usar la matriz Jacobiana del robot, es decir un controlador de posición articular pero con retroalimentación visual. Lo antes descrito se puede ejemplificar en la Figura (5.15).

Se procede colocando tres discos negros de diferentes tamaños en las articulaciones del robot. Un disco negro grande para el hombro, un disco negro mediano en

el codo, y uno pequeño para el extremo final. Ver las Figuras ?? y ?? de la posición inicial y la final donde se identifican los círculos.



Posicin inicial.



Posicin final.

(5.6)

Para poder estimar los ángulos que existen entre cada una de ellas, esto en base al concepto de la cinemática inversa visual. Las coordenadas de las articulaciones se estimaron en base al centroide de cada disco y utilizando la cinemática inversa como es muestra en la Figura (5.16):el cual establece que a partir de las coordenadas de las articulaciones del robot en el plano de una imagen $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T$ es posible determinar por funciones trigonométricas los ángulos existentes entre ellas q_2 y q_3 , pero de forma visual, de esta manera se puede prescindir de la información que entregan los servomotores del robot.

$$l_2 = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \quad (5.7)$$

$$l_3 = \sqrt{(u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2} \quad (5.8)$$

y

$$q_3 = \arccos \left(\frac{(u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right) \quad (5.9)$$

$$q_2 = \left(\frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{atan} \left(\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \right) - \operatorname{atan} \left(\frac{l_3 \sin(q_3)}{l_2 + l_3 \cos(q_3)} \right) \quad (5.10)$$

donde l_2 , l_3 representan la longitud de los eslabones 2 y 3 respectivamente, u y v son los ejes de la información visual. Para encontrar la ecuación 5.9 y 5.10 se utiliza la Figura 5.16.

Se seleccionaron los centroides de cada disco como los puntos característicos del objeto. En todos los controladores se seleccionaron como la posición deseada en el plano de la imagen a $[u_d \ v_d]^T = [198 \ 107]^T$ [pixels] y la posición inicial $[u(0) \ v(0)]^T = [50 \ 210]^T$ [pixels], esto es $q_2(0), q_3(0) = [0 \ 0]^T$ and $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ [grados/seg]. Los controladores evaluados han sido escritos en el lenguaje C. El tiempo de muestreo se ejecutó a 2.5 mseg., mientras la retroalimentación visual estaba en 43 mseg. La cámara de CCD se puso frente al robot y su posición con respecto al marco del robot Σ_R fue $O_c^R = [0_{c_1}^R, 0_{c_2}^R, 0_{c_3}^R]^T = [-0.5, -0.6, -1]^T$ metros, el ángulo de la rotación $\theta = 0$ grados. Se trabajo MATLAB ver 2007a utilizando el módulo de Simulink para procesar la imagen. La señal de video de la cámara-CCD tiene una resolución de 320x240 pixeles en el formato de RGB.

Para apoyar los desarrollos teóricos, en esta sección se presentan los resultados experimentales de los controladores propuestos en el robot planar con la configuración del cámara-fija.

Controlador	K_{p2}	K_{p3}	K_{v2}	K_{v3}
Ecuación 4.25	26.0;	1.8	12.0	1.2
Ecuación 4.26	17.3	1.2	6.6	1.2
Ecuación 4.27	28.0	1.5	17.0	1.2
Ecuación 4.28	32.0	1.5	8.0	1.2

(5.11)

Las Figuras (5.17) (5.18) muestran los resultados experimentales del controlador (4.25), las ganancias proporcionales y derivativas se seleccionaron con estos valores $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{26.0, 1.8\}$ [N], $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{12.0, 1.2\}$ [Nm]. respectivamente y $\mathbf{u}_d = 198$ y $\mathbf{v}_d = 107$. La respuesta transitoria es rápida y estaba alrededor de 3 seg. El error de posición es pequeño y tiende a cero asintóticamente.

Los resultados experimentales para el controlador (4.25) se muestra en las Figuras (5.17) y (5.18). La respuesta transitoria estaba alrededor de los 3 segundos. Los componentes del error tienden asintóticamente.

$$\tau = \mathbf{K}_p \tanh \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.12)$$

Las Figuras (5.19) (5.20) muestran los resultados experimentales del controlador (4.26), las ganancias proporcionales y derivativas se seleccionaron con estos valores $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{17.3, 1.2\}$ [N], $\mathbf{K}_v = \text{diag}\{6.6, 1.2\}$ [Nm]. respectivamente y $\mathbf{u}_d = 198$ y $\mathbf{v}_d = 107$. La respuesta transitoria es rápida y estaba alrededor de 1 seg. El error de posición es pequeño y tiende a cero asintoticamente.

Los resultados experimentales para el controlador (4.26) se muestra en las Figuras (5.19) y (5.20). La respuesta transitoria estaba alrededor de 1 segundo. Los componentes del error de posición tienden asintóticamente.

$$\tau = \mathbf{K}_p \arctan \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_v \arctan \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.13)$$

De forma similar las Figuras (5.21) (5.22) muestran los resultados experimentales del controlador (4.27), las ganancias proporcionales y derivativas se seleccionaron según la tabla (5.11). La respuesta transitoria es rápida y estaba alrededor de 2 seg.

Los resultados experimentales para el controlador (4.27) se muestra en las Figuras (5.21) y (5.22). La respuesta transitoria estaba alrededor de 2 segundo. Los componentes del error de posición tienden asintóticamente.

$$\tau = \mathbf{K}_p \sin \left(\frac{\pi}{2} \tanh \left(\begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.14)$$

Finalmente en las Figuras (5.23) (5.24) muestran los resultados experimentales del controlador (4.28), las ganancias proporcionales y derivativas se seleccionaron según la tabla (5.11). La respuesta transitoria es rápida y estaba alrededor de 2 seg.

Los resultados experimentales para el controlador (4.28) se muestra en las Figuras (5.23) y (5.24). La respuesta transitoria estaba alrededor de 2 segundo. Los componentes del error de posición tienden asintóticamente.

$$\tau = \mathbf{K}_p \sin \left(\frac{\pi}{2} \arctan \left(\begin{bmatrix} \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{bmatrix} \right) \right) - \mathbf{K}_v \tanh \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(\mathbf{q}). \quad (5.15)$$

Si se deseará tener el robot tridimensional, es decir con las posiciones de los tres grados de libertad, se tendría que poner otra cámara arriba del robot para que presente la información de la articulación q_1 .

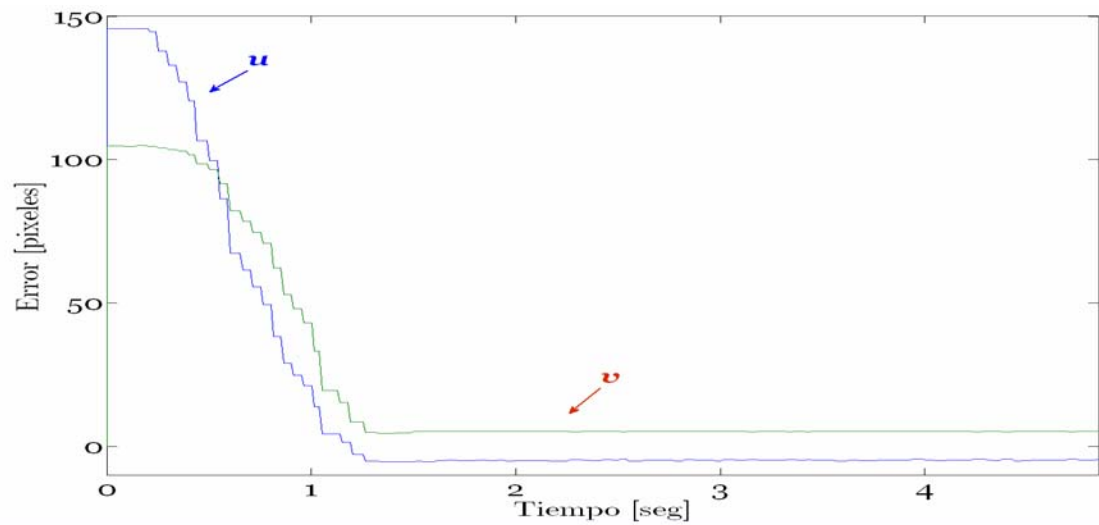


Figure 5.7: Errores visuales con el controlador tanh

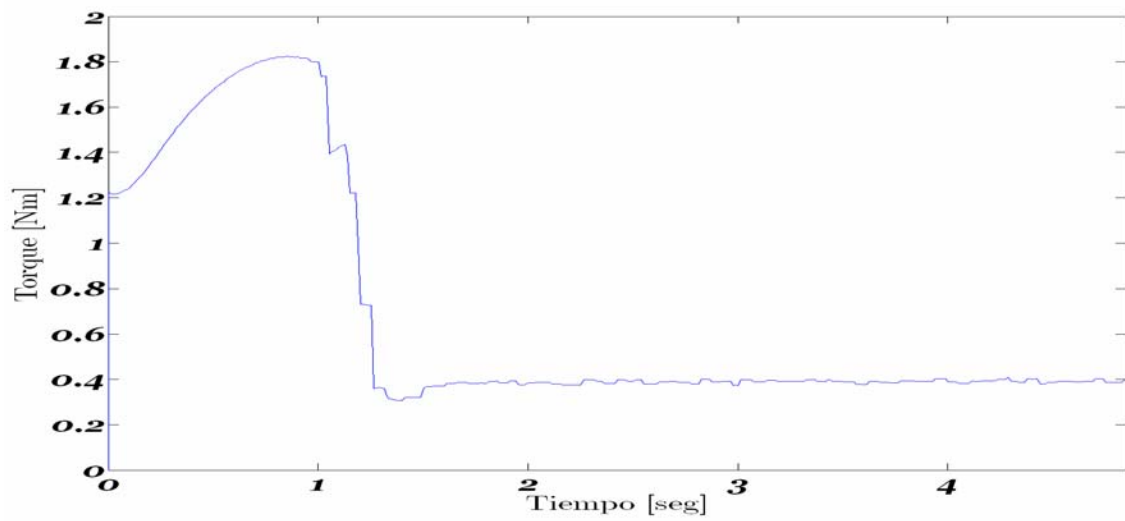


Figure 5.8: Torque aplicado del controlador tanh

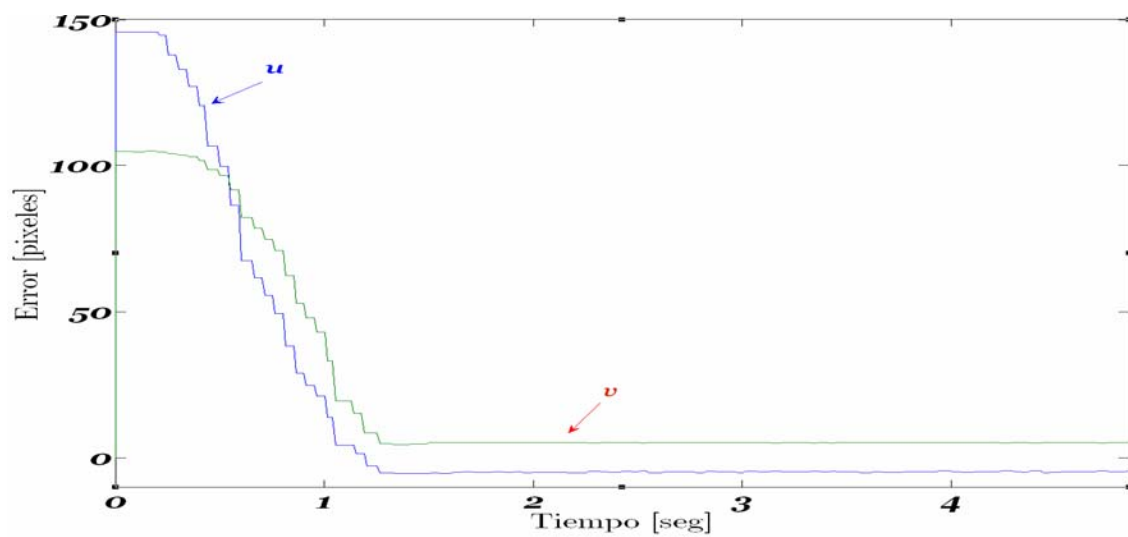


Figure 5.9: Errores visuales con el controlador arctan

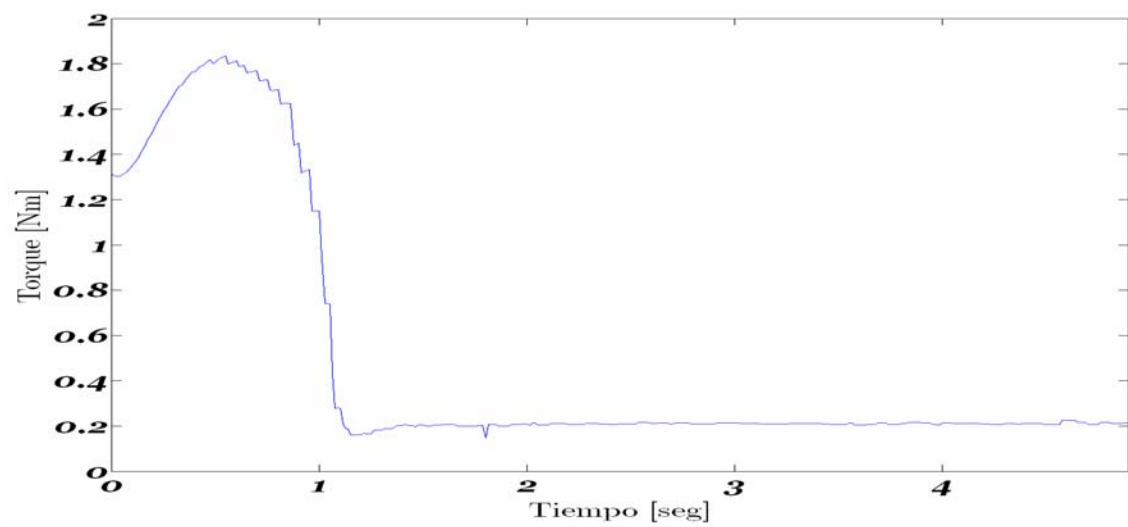


Figure 5.10: Torque aplicado con el controlador arctan

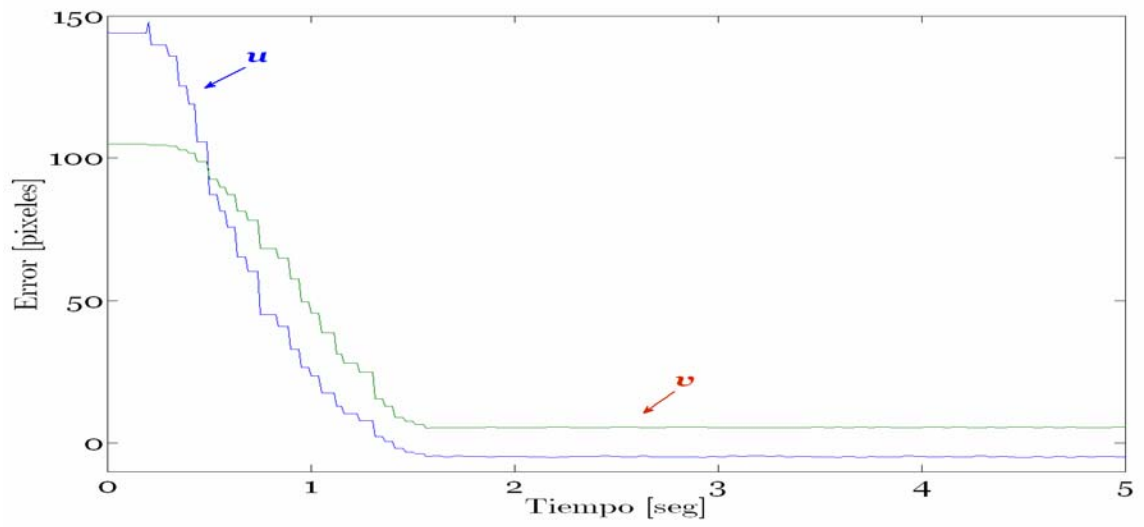


Figure 5.11: Errores de imagen con el controlador sen y tanh

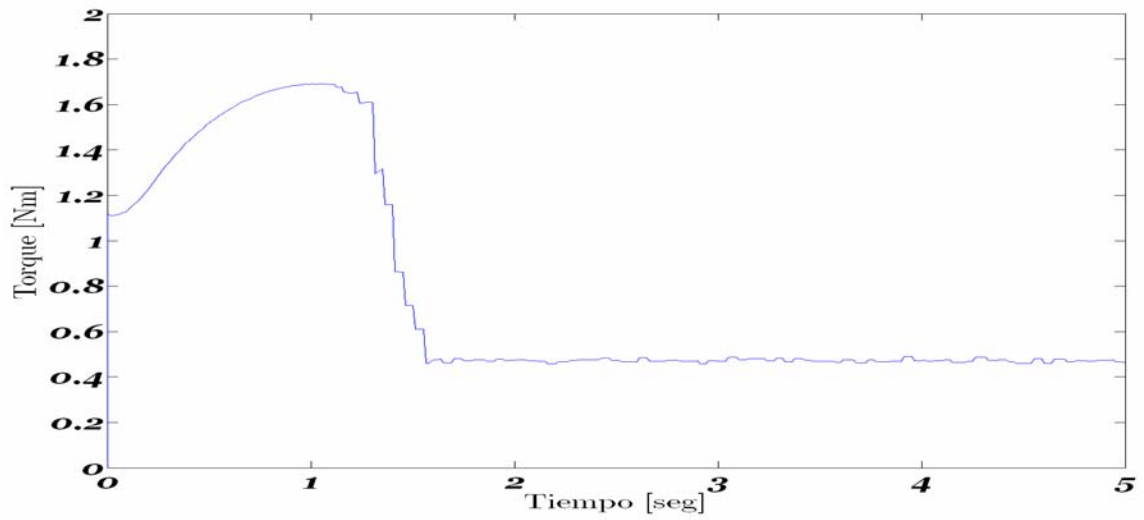


Figure 5.12: Torque aplicado por el controlador seno y tanh

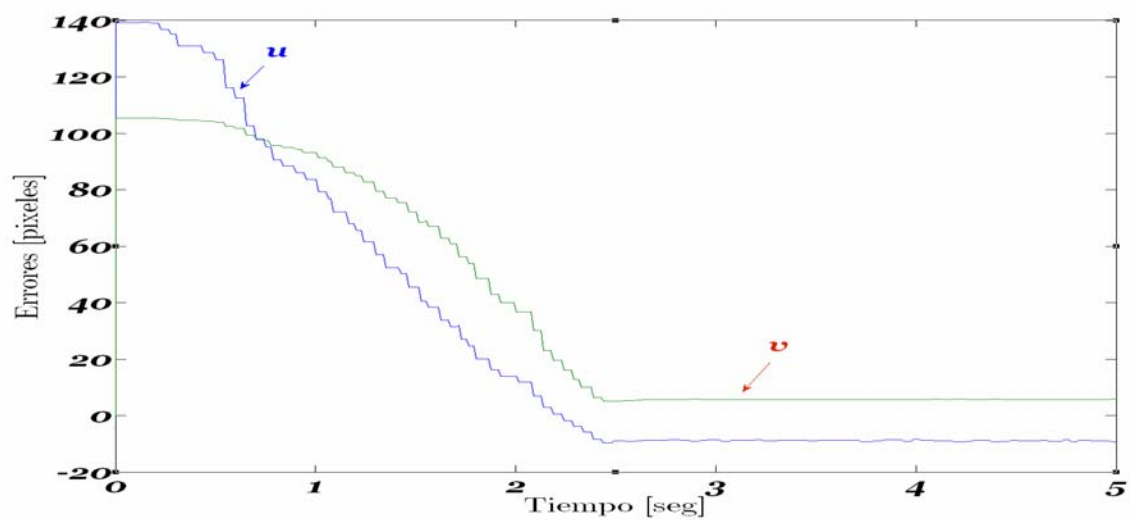


Figure 5.13: Error de la imagen con el controlador seno y arctan

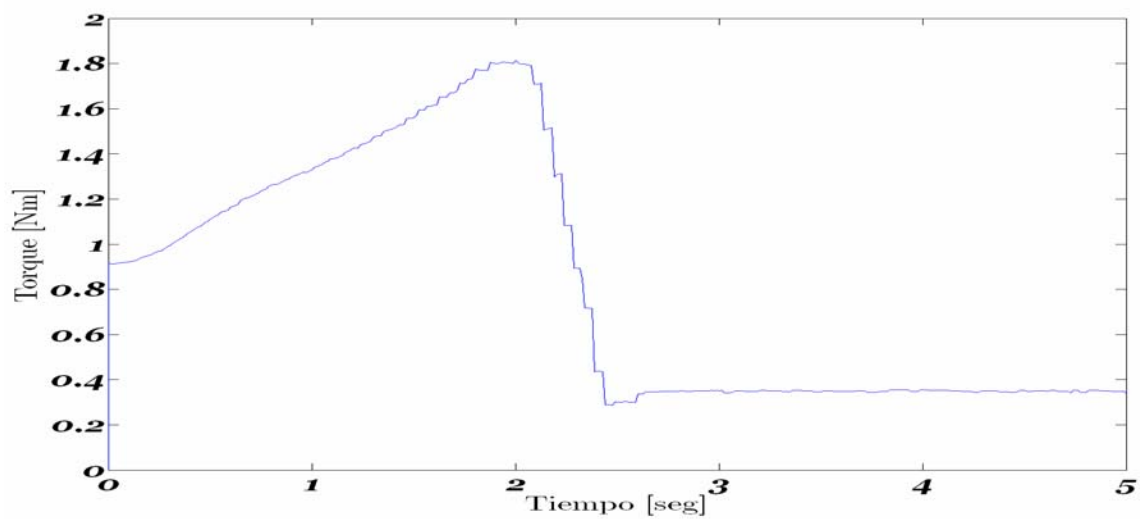


Figure 5.14: Torque aplicado por el controlador seno y arctan

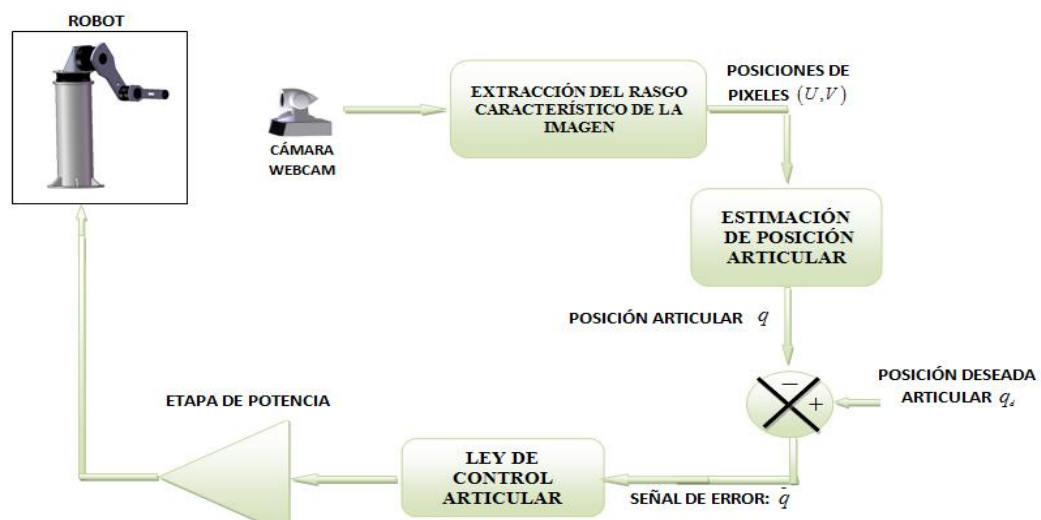


Figure 5.15: Estimación de posición angular.

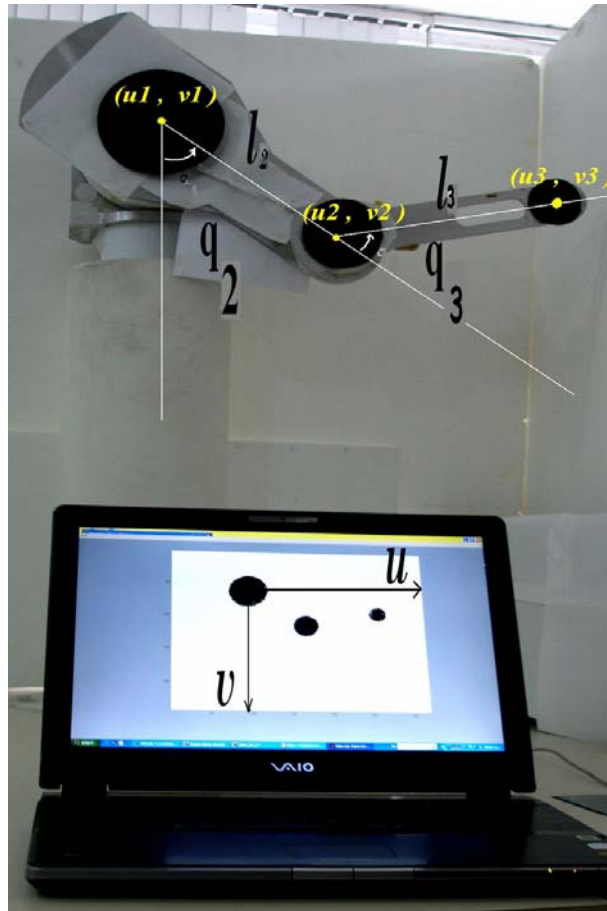


Figure 5.16: Robot manipulador y el sistema de visión.

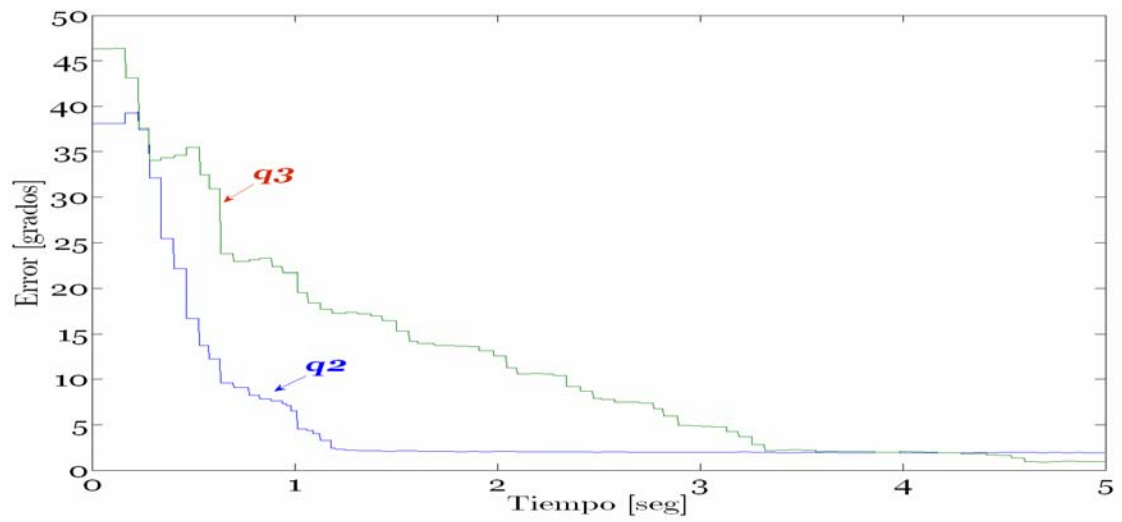


Figure 5.17: Errores articulares visuales con el controlador tanh

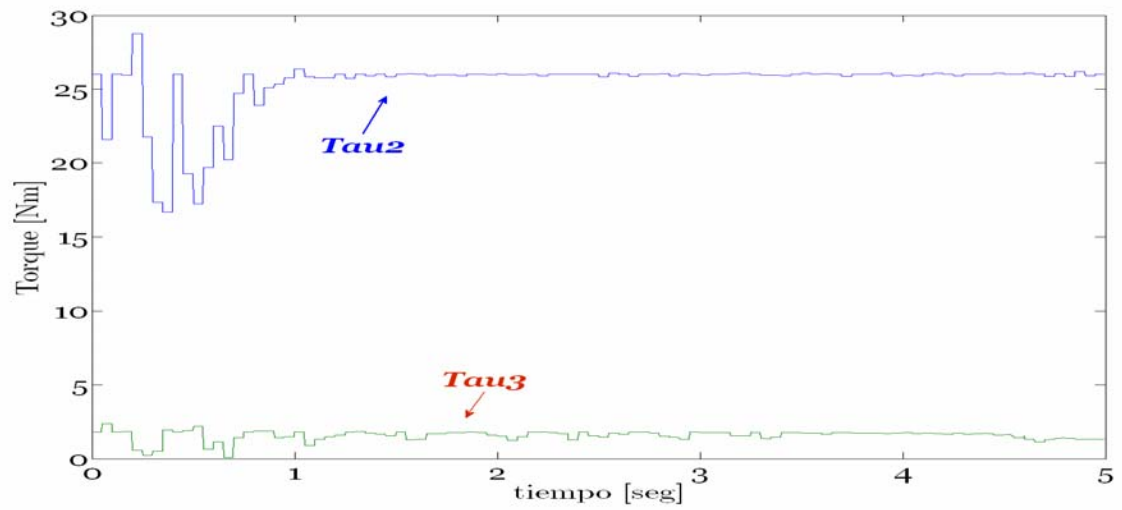


Figure 5.18: Torque aplicado con el controlador tanh

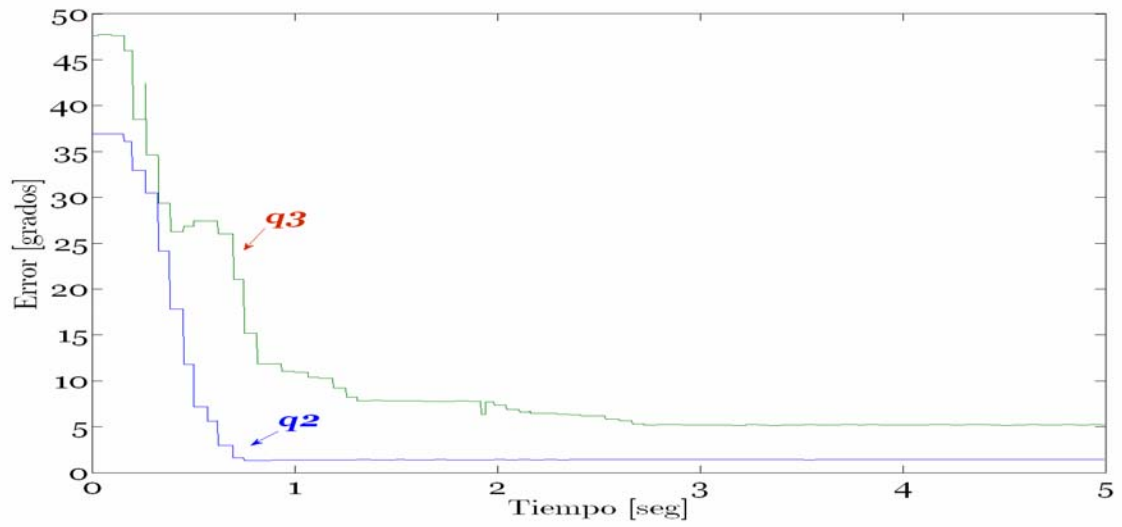


Figure 5.19: Errores articulares visuales con el controlador arctan

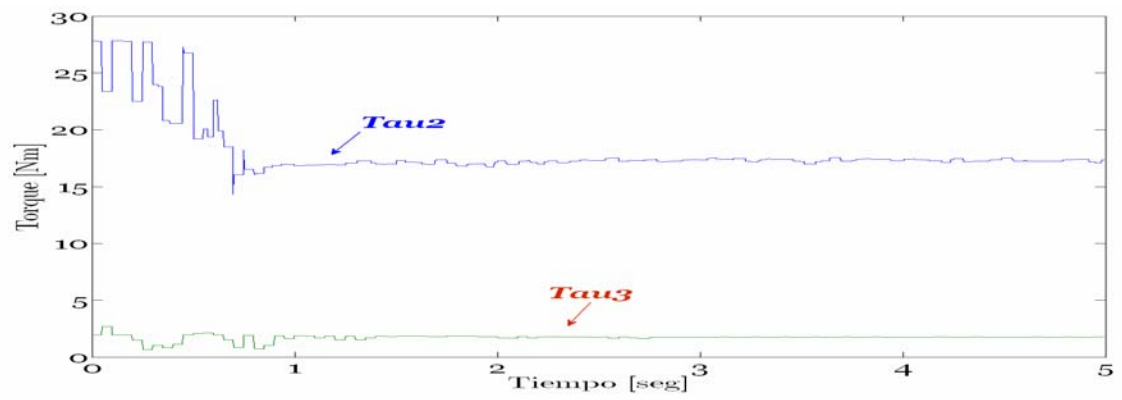


Figure 5.20: Torque aplicado con el controlador arctan

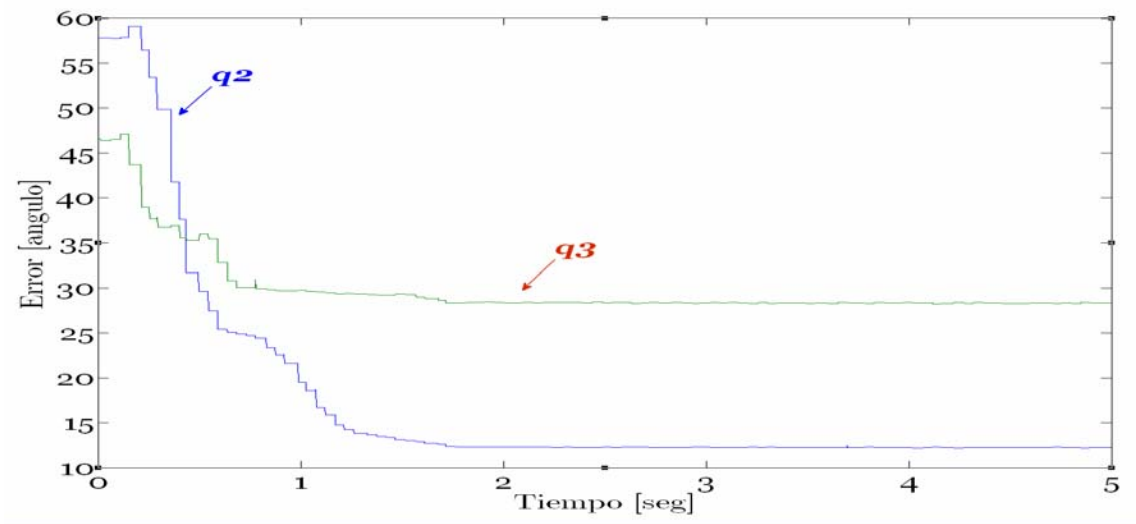


Figure 5.21: Errores de imagen con el controlador seno y tanh

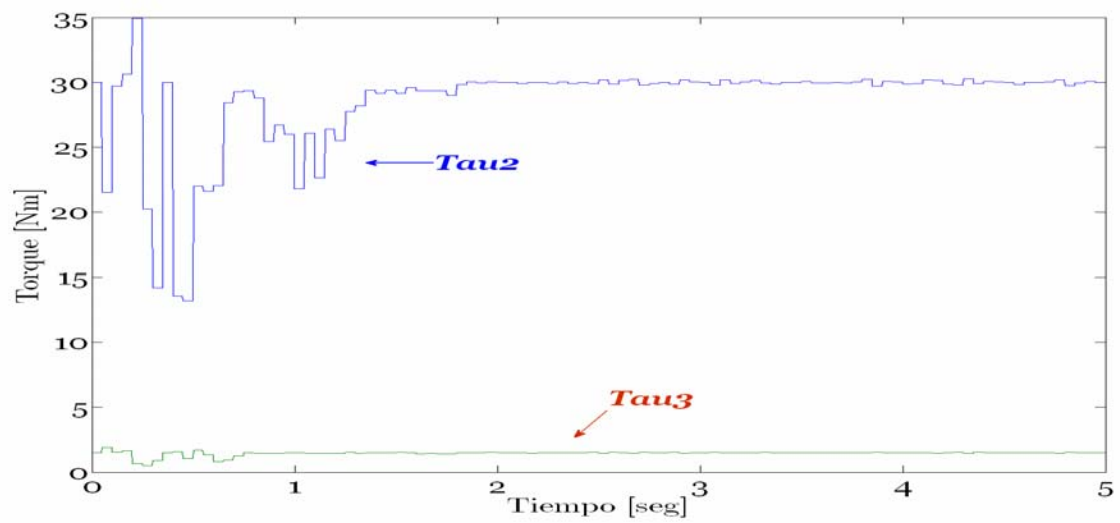


Figure 5.22: Torque aplicado con el controlador seno y tanh

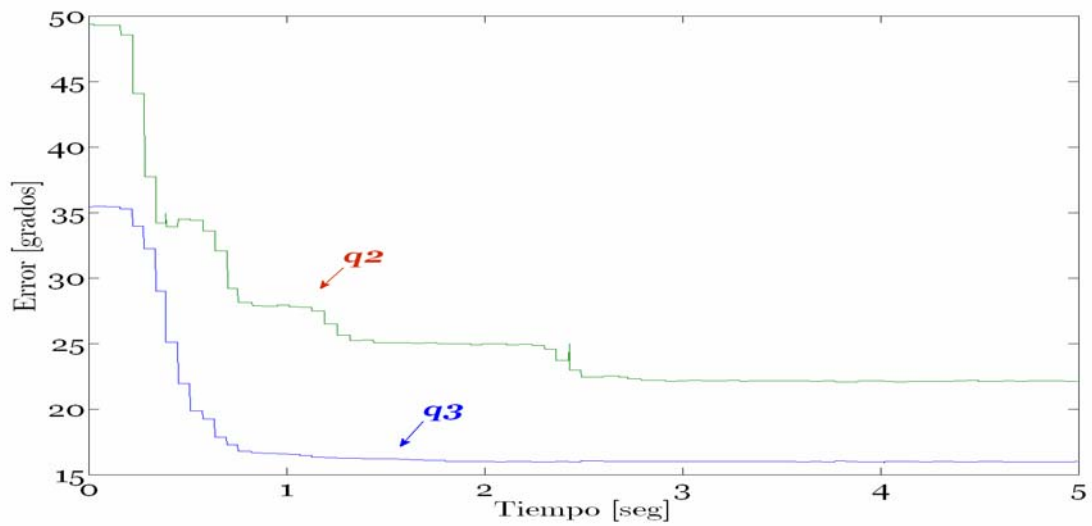


Figure 5.23: Errores articulares visuales con el controlador seno y arctan

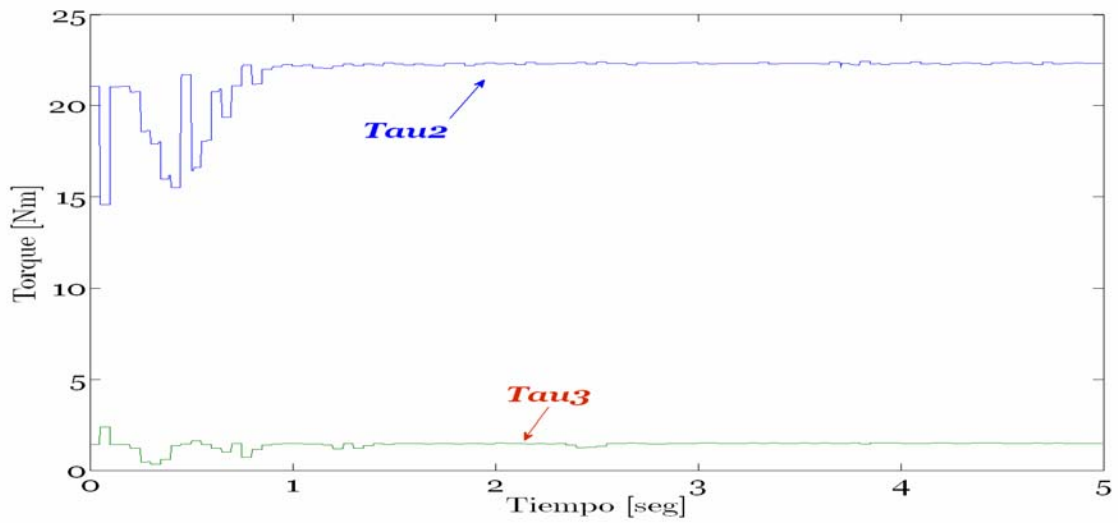


Figure 5.24: Torque aplicado con el controlador seno y arctan

Chapter 6

Conclusiones

"Si una persona es perseverante, aunque sea dura de entendimiento,
se hará intelingente; y aunque sea débil se transformará en fuerte"

Leonardo da Vinci

Este reporte de tesis, presentó el trabajo realizado durante años. En este período se obtuvieron diversos resultados en el campo de la robótica y visión por computadora aplicada al control visual de robots manipuladores. Dichas aportaciones realizadas se presentan a continuación:

Se realizó una minuciosa investigación bibliográfica, la cual permitió obtener una base teórica del material necesario para cumplir con los objetivos de este trabajo de tesis. Se acondicionó una nueva plataforma de experimental del brazo robot manipulador y del sistema de visión.

Se obtuvo una descripción detallada del modelo dinámico del robot y del modelo matemático que representa al sistema de visión en configuración cámara fija. La metodología que se utilizó fue la de Euler-Lagrange, por ser la que presenta mejores propiedades documentadas para el diseño y análisis de estabilidad, gracias a esto se pudo realizar una demostración de estabilidad formal del algoritmo de control servo visual.

Se diseñó una familia de algoritmos de control servo visual, los cuales posee una demostración formal de estabilidad asintótica global. En el algoritmo de control de posición mediante retroalimentación visual, se utilizó la filosofía del Jacobiano transpuesto, y la visual articular incluyendo su demostración de estabilidad en el sentido de Lyapunov utilizando la ecuación en lazo cerrado, el modelo dinámico del robot y el modelo de visión.

Se realizó la experimentación, comprobando que los controladores servo visuales diseñados funciona adecuadamente en la práctica. Los resultados experimentales de aplicar estos controladores en la plataforma fueron aceptables. El desarrollo de este tipo de sistema de control visual sienta las bases para el diseño y perfeccionamiento de otras infraestructuras de control visual así como para poner a prueba el diseño de nuevas leyes de control visual en trabajos futuros.

Se presentaron las aportaciones de este trabajo en distintas publicaciones internacionales. Dentro de una investigación una de las pruebas de la terminación exitosa o de avance de una etapa de la misma es la publicación del trabajo. Durante este período se realizaron publicaciones para revista internacional con arbitraje y ponencias de trabajos publicados en extenso en Congresos Internacionales o Nacionales, presentándose en los eventos de la mayor relevancia en su área. En general, se puede decir que en esta tesis se obtuvo una contribución en el área de control, control visual y robótica. Las publicaciones realizadas son:

Artículos en revista

1. "Visual Servoing Controller for Robot Manipulators". WEAS (World Scientific and Engineering Academy and Society) Transactions on Circuits and Systems. Se está en espera de su aceptación.
2. "Controlador con retroalimentación visual para Robot Manipulador". Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI). Se está en espera de su aceptación. con el código de identificador asignado: 2007/166.
3. "Programming Environment and a new Position Control for the PUMA 200 robot". International Journal of Factory Automation Robotics and Soft Computing. International Society for Advanced Research. CSRA-428. ISSN: 1827-1340. Año 2006 Aceptado.

Publicaciones en Congresos

1. "A New Family of Controllers for Position Control of Robot Manipulators". 2nd International Conference on Informatics in Control, Automation & Robotics ICINCO 2005, organizado por la IFAC (International Federation of Automatic Control). Barcelona España septiembre de 2005.
2. "A New Position Controller: Pascal's Cartesian Controllers". WSEAS (World Scientific and Engineering Academy and Society) International Conference on DYNAMICAL SYSTEMS and CONTROL Venecia Italia.2005.
3. "Ambiente de Programación y un nuevo control de posición para robot Puma 200". 7º Congreso Interamericano de Computación Aplicada a la Industria de Procesos. Villa Real, Portugal 2005.

4. "Control de posición con acciones acotadas para robots manipuladores". II Semana Nacional de Ingeniería Electrónica Universidad Autónoma Metropolitana. 2006.
5. "Programming Environment and a new positioning control for the PUMA 200 robot". Instrumentation, Measurement, Control, Circuits and Systems (IMC-CAS 2005) Cancún, México
6. "Robot de transmisión directa con controladores saturados". XII Simposio de Ingeniería Eléctrica. Santa Clara, Cuba 2005.
7. "Robot Manipulador Didáctico". XII Simposio de Ingeniería Eléctrica. Santa Clara, Cuba 2005.
8. "Diseño, modelado y construcción de un robot móvil" Quinto Congreso Mexicano de Robótica COMRob 2003, de la Asociación Mexicana de Robótica, A. C. AMRob, San Luis Potosí, S.L.P. a 15 de agosto del 2003.
9. "A New Position Controller for Mobile Robots", paper number:410-113 conference Proceedings of the International Association of Science and Technology for Development IASTED International Conference Applied Simulation and Modelling ASM 2003. ISBN: 0-88986-384-9 ISSN: 1021-8181 . Marbella España 3 a 5 de septiembre del 2003.
10. "A simple controller of robot manipulator for industrial applications" Segundo Congreso Nacional de Electrónica. Puebla, México.
11. "Bounded Controller for Robot Manipulators", paper number:363-171 conference Proceedings of the International Association of Science and Technology for Development IASTED International Conference Applied Simulation and Modelling ASM. ISBN:0-88986-334-2 ISSN:1021-8181. Creta, Grecia.

12. “PD Controller for Robot Manipulators Based on Neural Networks”, Seminario Anual Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación SAAEI Matanzas.
13. “Experimental Evaluation of Saturated Control for Robot Manipulators”, Applied Simulation and Modelling IASTED Marbella, España.

En resumen se puede decir que este trabajo presentó una nueva familia de controladores con retroalimentación visual en la configuración cámara fija para un robot manipulador planar. Se propuso un esquema de control visual-servoing con base en posición, empleando la dinámica completa del robot y el modelo de visión, se demostró la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio utilizando la ecuación en lazo cerrado. La cinemática inversa se usa para obtener los ángulos de la articulación deseada y los de articulación de la posición del centroide calculado. Se presentaron resultados experimentales en un robot manipulador de dos grados de libertad utilizando motores de transmisión directa

6.1 Trabajo futuro

Algunos trabajos a realizar para continuar trabajando en esta línea de investigación son:

1. Diseñar e implementar una plataforma 3D con cámaras en visión estereo, para un robot de tres grados de libertad (caso tridimensional).
2. Implementación de distintos controladores visuales de trayectorias.
3. Realizar el análisis de estabilidad para el caso de seguimiento de un objeto.
4. Desarrollar el análisis de estabilidad para controladores visuales difusos.

Appendix A

Fundamentos de la teoría de Lyapunov

"La práctica debe siempre ser edificada sobre la buena teoría"

Leonardo Da Vinci

En un sistema de control es importante preguntar acerca de sus propiedades varias, si es estable, ya que un sistema de control inestable es típicamente inútil y potencialmente peligroso. Cualitativamente, un sistema es descrito como estable si, iniciando el sistema en algún lado cercano al punto de operación deseado implica que permanecerá alrededor de tal punto para todo tiempo posterior. Desde el punto de vista de diferentes autores [2, 3, 4, ?, 52, 53, 54] la aproximación más útil y general para estudiar la estabilidad de sistemas de control no lineales es la teoría introducida a fines del siglo XIX por el matemático ruso Alexandr Mikhailovich Lyapunov. El trabajo de Lyapunov, *The General Problem of Motion Stability*, incluye dos métodos

para el análisis de estabilidad (los así llamados método de linearización y método directo) y fue publicado en 1892. El método de linearización deriva conclusiones sobre la estabilidad local de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. El método directo no está restringido al movimiento local, y determina las propiedades de estabilidad de un sistema no lineal construyendo una función escalar “*tipo energía*” para el sistema y examinando la variación temporal de dicha función. Han sido desarrollados muchos refinamientos de los métodos de Lyapunov. Actualmente, el método de linearización ha llegado a representar la justificación teórica del control lineal, mientras que el método directo de Lyapunov ha llegado a ser la herramienta más importante para el análisis y diseño de sistemas no lineales. En este Apéndice serán mostrados los conceptos fundamentales de la teoría de Lyapunov, que sustentan los análisis de estabilidad presentados en el trabajo de tesis en lo que al control de movimiento se refiere en coordenadas articulares.

A.1 Sistemas no lineales

Un sistema dinámico no lineal puede ser representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{A.1}$$

donde en (A.1) $\mathbf{f}$ es una función vectorial no lineal de dimensión $n \times 1$ y $\mathbf{x}$ es el vector de estado de dimensión $n \times 1$. Un valor particular del vector de estado es también llamado un punto debido a que corresponde a un punto en el espacio de estado. Aún cuando la ecuación (A.1) no contiene explícitamente a la entrada de control como una variable, es directamente aplicable a los sistemas de control retroalimentados. La razón es que la ecuación (A.1) puede representar la dinámica en lazo cerrado de un sistema de control retroalimentado, con la entrada de control siendo una función

del estado $\mathbf{x}$ y del tiempo t , y de esta manera desapareciendo en la dinámica de lazo cerrado. Una clase especial de sistemas no lineales son los sistemas lineales. La dinámica de los sistemas lineales es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{A.2}$$

donde $\mathbf{A}(t)$ es una matriz de dimensión $n \times n$.

A.2 Sistemas autónomos y no autónomos

Los sistemas lineales son clasificados ya sea como variantes en el tiempo o invariantes en el tiempo, dependiendo de si la matriz $\mathbf{A}$ varía o no con el tiempo. En el contexto más general de los sistemas no lineales, estos adjetivos son reemplazados tradicionalmente por “autónomos” y “no autónomos”.

Definition 1 *El sistema no lineal dado en (A.1) se dice que es autónomo si $\mathbf{f}$ no depende explícitamente del tiempo, es decir, si la ecuación de estado del sistema puede ser escrita como sigue:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{A.3}$$

de otra manera, el sistema es llamado no autónomo.

A.3 Puntos de equilibrio

Es posible para la trayectoria de un sistema corresponder a un único punto. Tal punto es llamado un punto de equilibrio. Muchos problemas de estabilidad son formulados con respecto a puntos de equilibrio.

Definition 2 *Un estado $\mathbf{x}^*$ es un estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema si una vez que $\mathbf{x}(t)$ es igual a $\mathbf{x}^*$, permanece igual a $\mathbf{x}^*$ para todo tiempo futuro.*

Matemáticamente, la definición anterior significa que el vector constante $\mathbf{x}^*$ satisface lo siguiente:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \quad (\text{A.4})$$

y los puntos de equilibrio del sistema pueden encontrarse resolviendo el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales dadas por la ecuación (A.3). Un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{A.5})$$

tiene un único punto de equilibrio (el origen $\mathbf{0}$) si la matriz $\mathbf{A}$ es no singular. Si la matriz $\mathbf{A}$ es singular, el sistema lineal tiene un número infinito de puntos de equilibrio, los cuales están contenidos en el espacio nulo de la matriz $\mathbf{A}$, es decir, el subespacio definido por $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto implica que los puntos de equilibrio no son aislados.

A.4 Conceptos de estabilidad

Al principio de este apéndice, se introdujo la noción intuitiva de estabilidad como un tipo de buen comportamiento alrededor de un punto de operación deseado. Sin embargo, ya que los sistemas no lineales pueden tener un comportamiento mucho más complejo que el de los sistemas lineales, la mera noción de estabilidad no es suficiente para describir las características esenciales de su movimiento. Se necesita un número de conceptos de estabilidad más refinados, tales como estabilidad asintótica, estabilidad exponencial y estabilidad asintótica global. En esta sección se definen

tales conceptos. En lo que sigue sea β_R la región esférica definida por $\|\mathbf{x}\| < R$ en el espacio de estado, y $\mathbf{S}_R$ la superficie esférica definida por $\|\mathbf{x}\| = R$.

A.4.1 Estabilidad e inestabilidad

En la definición que sigue se introducen los conceptos básicos de estabilidad e inestabilidad.

Definition 3 *El estado de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se dice que es estable si, para cualquier $R > 0$, existe $r > 0$, tal que si $\|\mathbf{x}(0)\| < r$, entonces $\|\mathbf{x}(t)\| < R$ para todo $t \geq 0$. De otro modo, el punto de equilibrio es inestable.*

Esencialmente, la estabilidad (también llamada estabilidad en el sentido de Lyapunov, o estabilidad de Lyapunov) significa que la trayectoria del sistema puede mantenerse arbitrariamente cercana al origen al iniciarla lo suficientemente cercana al origen. Más formalmente la definición establece que el origen es estable, si, dado que no se desea que la trayectoria de estado $\mathbf{x}(t)$ se salga de una región esférica β_R de radio arbitrariamente especificado, puede encontrarse un valor $r(R)$ tal que al iniciar el estado dentro de la región esférica β_R en el instante de tiempo 0 se garantiza que el estado permanecerá dentro de la región esférica β_R para todo tiempo futuro. Matemáticamente la Definición 6 puede ser escrita como:

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \|\mathbf{x}(0)\| < r \implies \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}(t)\| < R \quad (\text{A.6})$$

o equivalentemente:

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \mathbf{x}(0) \in \beta_r \implies \forall t \geq 0, \mathbf{x}(t) \in \beta_R \quad (\text{A.7})$$

Contrariamente, un punto de equilibrio es inestable si existe al menos una región esférica β_R , tal que para cada $r > 0$, no importa que tan pequeña sea, es

siempre posible para la trayectoria del sistema iniciar en algún lugar dentro de la región esférica β_r y eventualmente abandonar la región esférica β_R . La inestabilidad de un punto de equilibrio típicamente es indeseable, debido a que frecuentemente conduce al sistema dentro de un ciclo límite o resulta en daños a los componentes eléctricos o mecánicos involucrados.

A.4.2 Estabilidad asintótica y estabilidad exponencial

En muchas de las aplicaciones de la ingeniería, la estabilidad de Lyapunov no es suficiente. Por ejemplo, cuando la altitud de un satélite es perturbada de su posición nominal, no sólo se desea que el satélite mantenga su altitud dentro de un rango determinado por la magnitud de la perturbación, es decir, la estabilidad de Lyapunov, sino que también se requiere que la altitud regrese en forma gradual a su valor original. Este tipo de requerimiento en la ingeniería es capturado por el concepto de la estabilidad asintótica.

Definition 4 *Un punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable si es estable, y además existe algún $r > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ entonces $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ conforme $t \rightarrow \infty$.*

La estabilidad asintótica significa que el equilibrio es estable, y que además, los estados que inician cercanos al origen del espacio de estado realmente convergen al origen conforme el tiempo tiende a infinito. Es decir que las trayectorias del sistema que inician dentro de la región esférica β_r convergen al origen. La región esférica β_r es llamada un *dominio de atracción* del punto de equilibrio. Un punto de equilibrio el cual es estable en el sentido de Lyapunov pero que no es asintóticamente estable, se dice que es *marginamente estable*. Obsérvese que la convergencia del estado al origen no implica la estabilidad.

En muchas aplicaciones todavía no es suficiente con saber que un sistema convergerá al punto de equilibrio después de un tiempo infinito. Existe una necesidad para estimar que tan rápido la trayectoria del sistema se aproxima a $\mathbf{0}$. El concepto de estabilidad exponencial puede ser utilizado para tal propósito.

Definition 5 *Un punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es exponencialmente estable si existen dos constantes estrictamente positivas α y λ , tal que:*

$$\forall t > 0, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t} \quad (\text{A.8})$$

en alguna región esférica β_r alrededor del origen.

En otras palabras, la estabilidad exponencial de un sistema significa que el vector de estado converge al origen más rápido que una función exponencial.

A.4.3 Estabilidad local y global

Las definiciones anteriores son formuladas para caracterizar el comportamiento *local* de los sistemas, es decir, cómo el estado evoluciona después de iniciar cercano al punto de equilibrio. Las propiedades locales dicen poco acerca de cómo se comportará el sistema cuando el estado inicial está alejado del punto de equilibrio. Para tal propósito son requeridos los conceptos globales.

Definition 6 *Si la estabilidad, estabilidad asintótica o estabilidad exponencial se mantienen para cualesquiera estados iniciales, el punto de equilibrio se dice que es estable, asintóticamente estable o exponencialmente estable en el espacio completo de estado. Se dice entonces que el punto de equilibrio es estable, asintóticamente estable o exponencialmente estable en forma global.*

A.4.4 Método directo de Lyapunov

La filosofía básica del método directo de Lyapunov es la extensión matemática de la observación física fundamental: si la energía total de un sistema mecánico (o eléctrico) es disipada de manera continua, entonces el sistema, sea lineal o no lineal, deberá eventualmente establecerse hacia un punto de equilibrio. Así, puede concluirse la estabilidad de un sistema examinando la variación temporal de una función escalar. El procedimiento básico del método directo de Lyapunov consiste en generar una función escalar tipo energía para el sistema dinámico y examinar la variación temporal de dicha función escalar; de esta manera pueden derivarse conclusiones sobre la estabilidad del conjunto de ecuaciones diferenciales sin utilizar las difíciles definiciones de estabilidad o sin requerir el conocimiento explícito de las soluciones. A continuación se dan las definiciones necesarias y los teoremas del método directo de Lyapunov.

Definition 7 Una función escalar continua $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es localmente definida positiva si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, y además, en una región esférica β_{R_0} :

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathcal{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad (\text{A.9})$$

si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ y la propiedad de arriba se mantiene sobre el espacio de estado completo, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es definida positiva globalmente.

Definition 8 Una función escalar continua $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es localmente definida negativa si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, y además, en una región esférica β_{R_0} :

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathcal{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad (\text{A.10})$$

si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ y la propiedad de arriba se mantiene sobre el espacio de estado completo, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es definida negativa globalmente.

Definition 9 Una función escalar continua $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es localmente semidefinida positiva si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, y además, en una región esférica β_{R_0} :

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathcal{V}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (\text{A.11})$$

si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ y la propiedad de arriba se mantiene sobre el espacio de estado completo, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es semidefinida positiva globalmente.

Definition 10 Una función escalar continua $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es localmente semidefinida negativa si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, y además, en una región esférica β_{R_0} :

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathcal{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{A.12})$$

si $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ y la propiedad de arriba se mantiene sobre el espacio de estado completo, entonces $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ se dice que es semidefinida negativa globalmente.

Theorem 11 (*Estabilidad Local*) Si, en una región esférica β_{R_0} , existe una función escalar $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ con primeras derivadas parciales continuas, tal que:

- $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ es definida positiva (localmente en β_{R_0})
- $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa (localmente en β_{R_0})

entonces el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es estable. Si, realmente, la derivada $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ es localmente definida negativa en β_{R_0} , entonces la estabilidad es asintótica.

Theorem 12 (*Estabilidad Global*) Suponga que existe una función escalar $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ con primeras derivadas parciales continuas tal que:

- $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ es definida positiva

- $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ es definida negativa
- $\mathcal{V}(\mathbf{x}) \longrightarrow \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty$

entonces el equilibrio en el origen es global y asintóticamente estable.

Definition 13 *Un conjunto $\mathbf{G}$ es un conjunto invariante para un sistema dinámico si cada trayectoria del sistema que inicia en un punto en $\mathbf{G}$ permanece en $\mathbf{G}$ para todo tiempo futuro.*

Theorem 14 (Teorema sobre conjuntos invariantes localmente) *Considere un sistema autónomo de la forma (A.2), con $\mathbf{f}$ continua, y sea $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Suponga que:*

- para algún $l > 0$, la región Ω_l definida por $\mathcal{V}(\mathbf{x}) < l$ es acotada
- $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$ en Ω_l

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de todos los puntos dentro de Ω_l donde $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$, y $\mathbf{M}$ el conjunto invariante más grande en $\mathbf{R}$. Entonces, toda solución $\mathbf{x}(t)$ que se origina en Ω_l tiende a $\mathbf{M}$ conforme $t \longrightarrow \infty$.

Corollary 15 *Considérese el sistema autónomo (A.2), con $\mathbf{f}$ continua, y sea $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ una función escalar con derivadas parciales continuas. Suponga que en una cierta vecindad Ω del origen:*

- $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ es localmente definida positiva
- $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa

- el conjunto $\mathbf{R}$ definido por $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$ no contiene trayectorias del sistema (A.2) más que la trayectoria trivial $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$

Entonces, el punto de equilibrio $\mathbf{0}$ es asintóticamente estable. Además, la región conectada más grande de la forma Ω_l (definida por $\mathcal{V}(\mathbf{x}) < l$) dentro de Ω es un dominio de atracción del punto de equilibrio.

Theorem 16 (*Teorema sobre conjuntos invariantes globalmente*) Considere un sistema autónomo de la forma (A.2), con $\mathbf{f}$ continua, y sea $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Suponga que:

- $\mathcal{V}(\mathbf{x}) \longrightarrow \infty$ conforme $\|\mathbf{x}\| \longrightarrow \infty$
- $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \leq 0$ sobre el espacio de estado completo

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de todos los puntos donde $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$, y $\mathbf{M}$ el conjunto invariante más grande en $\mathbf{R}$. Entonces, todas las soluciones convergen global y asintóticamente a $\mathbf{M}$ conforme $t \longrightarrow \infty$.

References

- [1] Commision of the European Communities IRDAC
- [2] Sciavicco L., Siciliano B. (2001) *Modelling and Control of Robot Manipulators*. 2nd ed., Springer-Verlag, London.
- [3] Reyes F. (1997) *Control de un robot de transmisión directa de dos grados de libertad*. Tesis Doctoral, División de Física Aplicada, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE, Ensenada, B.C., México.
- [4] Lewis F.L., Abadallah C.T. and Dawson D.M. (1993) *Control of Robot Manipulators*. 1st ed., Macmillan Publishing Company, New York.
- [5] Kely R. Santibáñez V. (2003), *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Prentice Hall.
- [6] Jesús Manuel Gómez de Gabriel, Aníbal Ollero Baturone, *Teleoperación y Tel-errobótica*, Prentice Hall, 2006.
- [7] Hutchinson S., G. D. Hager and P. I. Corke, *A Tutorial on Visual Servo Control*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 5, October 1996, pp. 651-670.
- [8] Hill J. and W. T. Park, *Real Time Control of a Robot with a Mobile Camera*. in Proc. 9th ISIR, Washington, D.C., Mar. 1979, pp. 233-246.
- [9] Weiss L. E., A. C. Sanderson, and C. P. Neuman, *Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback*. in IEEE Journal of Robot. Automat., vol. RA-3, pp. 404-417, Oct. 1987.
- [10] Wilson W. J., C. C. Williams, and Graham S. B. *Relative End-Effector Control Using Cartesian Position Based Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation. vol. 12 No. 5, pp. 684-696. October 1996.

- [11] Kelly R., P. Shirkey and M. W. Spong, *Fixed-Camera Visual Servo Control for Planar Robots*. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis, Minnesota, April 1996, pp. 2643-2649.
- [12] Corke P. I. *Visual Control of Robot Manipulators A review*. Visual Servoing, K. Hashimoto, Ed. Singapore: World Scientific, pp. 1-31, 1993.
- [13] Takegaki M. and Arimoto S. (1981) *A new feedback method for dynamic control of manipulators*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. June, Vol. 103, pp. 119-125.
- [14] Reyes F. and R. Kelly, *Experimental Evaluation of Fixed-Camera Direct Visual Controllers on a Direct-Drive Robot*. IEEE International Conference on Robotics & Automation. Leuven, Belgium, May 1998, pp. 2327-2332.
- [15] Malis E. and S. Benhimane, *A Unified Approach to Visual Tracking and Servoing*. Robotics and Autonomous Systems, Vol. 52, Issue 1 , 31 July 2005, pp. 39-52.
- [16] Conticelli F. and B. Allotta, *Nonlinear Controllability and Stability Analysis of Adaptive Image-Based Systems*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 2, 2001, pp. 208-214.
- [17] Park J. and Y.J. Lee, *Robust Visual Servoing for Motion Control of the Ball on a Plate*. Mechatronics, Vol. 13, Issue 7 , September 2003, pp. 723-738.
- [18] Reyes F. and R. Kelly (1997). Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot. *Robotica*, Cambridge University Press. Vol. 15, 563–571.
- [19] Malis E. and P. Rives, *Robustness of Image-based Visual Servoing with Respect to Depth Distribution Errors*. IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2003, pp. 1056-1061.
- [20] Mills J.K., Baines P., Chang T., Chew S., Jones T., Lam S. and Rabadi A. (1995) *Development of Robot Control Test Platform*. IEEE Robotics and Automation Magazine. Vol. 2, No. 4, December, pp. 21-27.
- [21] Parker Hannifin Corporation (1995) *Dynaserv DM & DR Direct Drive Servos: A User Guide*. Compumotor Division.
- [22] Asada H. and Youcef-Toumi K. (1987) *Direct-Drive Robots: Theory and Practice*. The MIT Press.
- [23] Precision MicroDynamics Inc. (1996) *MFIO-3A User's Manual: PC Motion Control Interface Card*. Version 1.5

- [24] Loria, A.(1996) *On Output Feedback Control of Euler-Lagrange Systems*. PhD Thesis. Centre de Recherches de Royallieu. Université de Technologie de Compiègne. France.
- [25] Goldstein H. (1974) *Classical Mechanics*. Addison Wesley.
- [26] Symon K.R. (1960) *Mechanics*. 2nd ed., Addison Wesley, Massachusetts.
- [27] Ortega R., Spong M.W. (1989) *Adaptive Motion Control of Rigid Robots: a Tutorial*. Automatica, Vol. 25, No. 6, pp. 877-888.
- [28] Olsson H., Åström K.J., Canudas de Wit C., Gäfvert M. and Lischinsky P. (1998) *Friction Models and Friction Compensation*. European Journal of Control, December, No. 4, pp. 176-195.
- [29] Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K.J and Lischinsky P. (1995) *A new model for control of systems with friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 3, pp. 419-426.
- [30] Spong M.W. and Vidyasagar M. (1989) *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York.
- [31] Marr D., "Vision A computational Investigation into Human Representation and Processing of Visual Information", Freeman, 1982
- [32] Collewet C. and F. Chaumette, "Positioning a Camera with Respect to Planar Objects of Unknown Shape by Coupling 2-D Visual Servoing and 3-D Estimations". IEEE Trans. on Robotics and Automation. Vol. 18, No. 3, 2002, pp. 322-333.
- [33] Jain R., R. Kasturi and B. G. Schunck, "Machine Vision". McGraw Hill, 1995.
- [34] L. Shapiro, G. Stockman, "Computer Vision", Michigan State University and Whashington University, vol. 1, pp. 13-40, March 2000.
- [35] Rafael C. González, Richard E. Woods, Tratamiento Digital de Imágenes, Addison- Wesley/Diaz de Santos, Wilmington, Delaware, EUA, 1996.
- [36] Arturo de la Escalera Hueso, Visión por Computador, Prentice Hall, 2001.
- [37] Gerhard X. Ritter, Joseph N. Wilson, "Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra," CRC Press, vol. 1, Second edition , pp. 13-40, March 2000.
- [38] C. Tomasi, "Mathematical Methods for Robotics and Vision," Stanford University, CS-205, pp. 3-7, January 2000.

- [39] Burns A. and Wellings A. "Real-time systems and programming languages", University of York, Addison Wesley, 1996.
- [40] Kelly R., "Robust Asymptotically Stable Visual Servoing of Planar Robots". IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 12, No. 5, 1996, pp. 1-8.
- [41] Reyes F. and R. Kelly, *Experimental Evaluation of Fixed-Camera Direct Visual Controllers on a Direct-Drive Robot*. IEEE International Conference on Robotics & Automation. Leuven, Belgium, May 1998, pp. 2327-2332.
- [42] Takegaki M. and Arimoto S. "A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators," Journal of Dynamic System, Measurement, and Control pp. 119- 125, 1981.
- [43] Arimoto S. and Makizaki F. "Asimptotic Stability of Feedback Control laws for Robot Manipulators," Proc. of IFAC Symp on Robot Control. Barcelona, 1985.
- [44] R. Kelly \Regulation of Manipulators in Generic Task Space; An Energy Shaping Plus Damping Injection Approach," IEEE Trans. on Robotic and Automat., vol 15(2), pp. 381-386, 1999.
- [45] Pérez Gallardo Joel. (2007), Control de un Robot de dos grados de libertad por medio de Retroalimentación Visual, Tesis de Maestría en Electrónica de la FCE de la BUAP.
- [46] RM. Vidyasagar "Nonlinear System Analisis," Englewood Cli[®]s. N.J. Prentice Hall, 1993.
- [47] Khalil H.K. (2002) *Nonlinear systems*. 3th Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [48] Barahona J. L. (2004), Plataforma Experimental Para Propósitos De Investigación Científica en Robótica, Tesis de Maestría en Electrónica de la FCE de la BUAP.
- [49] Reyes F., Kelly R. (1996) *A Direct Drive Robot for Control Research*. Proceedings of the IASTED International Conference, Applications of Control and Robotics. Orlando Fl., pp. 181-184.
- [50] Bona B., Indri M. and Smaldone N. (2001) *Open System Real Time Architecture and Software Design for Robot Control*. Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advance Intelligent Mechatronics, Como, Italy, pp. 349-354.

- [51] Loria, A.(1996) *On Output Feedback Control of Euler-Lagrange Systems*. PhD Thesis. Centre de Recherches de Royallieu. Université de Technologie de Compiègne. France.
- [52] Sastry S. (1999) *Nonlinear systems: analysis, stability and control*. Springer Verlag, New York.
- [53] Krstic M., Kanellakopoulus I. and Kokotovic P. (1995) *Nonlinear and adaptive control*. John Wiley & Sons, New York.
- [54] Slotine J.J.E. and Li W. (1991) *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [55] Mendoza M. O. (2005), Control de Posición de Robots Manipuladores Mediante Retroalimentación Visual, Tesis de Maestría en Electrónica de la FCE de la BUAP.
- [56] Jimenez J.J.(2007), Reconocimiento de Formas usando Visión, Tesis de Maestría en Electrónica de la FCE de la BUAP.
- [57] The MathWorks, Image Acquisition ToolBox, User's Guide, Natick MA, USA, 2003-2007.
- [58] The MathWorks, Image Processing ToolBox, User's Guide, Natick MA, USA, 2003-2007.
- [59] The MathWorks, Simulink, Simulation and Model-Based Design: Writing S-Functions, Natick MA, USA, 2003-2007.
- [60] F. Reyes, C. Campuzano and J. Cid, PD-Type Controller With Nonlinear Proportional Gain for Robot Manipulators, publicado en el XX Congreso Internacional Académico de Ingeniera Electronica, del 26 al 30 de Octubre de 1998.
- [61] F. Reyes and J. Cid. Development of an Experimental Platform with open architecture for Robots Manipulators, The International Association of Science and Technology for Development, IASTED 99, USA.
- [62] F. Reyes and J. Cid. Nonlinear Controller for Position of Robot Manipulators. 4th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI2000) y la 6th International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis, USA.